Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXI (1987), págs. 107-134

ZUR ENTWICKLUNG DER KOMPAKTHEITSSCHLUSSWEISEN

von

Klaus Gero KALB*

§0. Einleitung. Grundlegende Sätze der Analysis, die auf Kompaktheitsschlußweisen beruhen, sind der Satz von der Extremwertannahme und der Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit (einer stetigen reellwertigen Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall). Eine Formulierung dieser sowie einiger weiterer historisch zu diskutierender Sätze finden Sie im dem Anhang unter Nummer [1]. Eine einheitliche Behandlung dieser Sätze - auch in abstrakten Situationen - erfolgt *heute* mit dem Überdeckungssatz, der im deutschen und angelsächsischen Sprachraum als "Satz von Heine-Borel", im französischen Sprachraum als "Satz von Borel-Lebesgue" bezeichnet wird. Dieser Satz wurde aber erst 1894 von Borel (und auch zunächst nur für den Spezialfall abzählbarer Überdeckungen) angegeben. Dagegen sind die übrigen Sätze in die Zeit von 1860-1880 einzuordnen. In diesem Zusammenhang ist als ältere Schlußweise der der heute meist als "Satz von Bolzano-Weierstrass" bezeichnete Auswahlsatz

---

* Eine Kurzfassung wurde vorgetragen auf der DMV-Tagung 1983 in Köln (Sektion Geschichte der Mathematik). Die Arbeit beruht auf dem Kapitel "Kompaktheitsschlußweisen" meiner zweistündigen Vorlesung "Geschichte der reellen Analysis" vom SS 1982 und SS 1986.

zu nennen. - Es soll hier versucht werden, die geschichtliche Entwicklung dieser Sätze, insbesondere die allmähliche Aufklärung des Zusammenhangs zwischen Auswahlsatz und Überdeckungssatz, zu schildern. Hierbei soll schwerpunktmäßig der Fall des euklidischen Raumes behandelt werden, während auf die etwa ab 1905 erfolgende Abstrahierung der Schlußweisen im Rahmen der im Entstehen begriffenen mengentheoretischen Topologie nur kurz eingegangen werden kann. Hierzu sei auf die informativen Arbeiten von Jean-Paul Pier (vgl. Literaturverzeichnis) hingewiesen.

Bevor ich in die Details gehe, eine kurze Bemerkung über den Stand der Analysis um 1870: In dieser Zeit erfolgte die arithmetische Begründung der reelen Zahlen durch Weierstrass, Méray, Cantor und Dedekind. Nach wichtigen Ansätzen von Cauchy, Bolzano, Gauß und Abel in den Jahren 1800-1825 fanden die Grundlagen der Analysis ihre endgültige Ausformulierung in einer zweiten Präzisionsstufe vor allem in der Weierstrass'schen Vorlesungen in Berlin ab 1861; hier spielte zunächst mündliche Überlieferung eine wesentliche Rolle, bis ab 1870 sich Weierstrass' Schüler und andere Mathematiker in Fachaufsätzen in Crelles Journal und den jungen Mathematischen Annalen auch mit Grundlagenfragen der Analysis beschäftigten. Wesentlich für die Verbreitung des Weierstrass'schen Gedankengutes war eine Arbeit von Heine von 1872 in Crelles Journal (Band 74) mit dem Titel "Die Elemente der Funktionenlehre". Wie diese einflußreiche Arbeit einzuordnen ist, wird besonders deutlich durch eine Fußnote, in der Heine schreibt: "Den allgemeinen Gang des Beweises einiger Sätze... nach den Prinzipien des Herrn *Weierstrass* kenne ich durch mündliche Mitteilungen von ihm selbst, von Herrn *Schwarz* und *Cantor*, so daß bei diesen Beweisen nur die Durchführung im Einzelnen von mir herrührt."

§1. Die Entstehung der Kompaktheitsschlußweisen der Gruppe A.

Die Entstehung der Kompaktheitsschlußweisen der Gruppe A (vgl. den Anhang) ist noch in die Phase der mündlichen Überlieferung von Weierstrass' Vorlesungen und des Briefwechsels in den Jahren 1860-70 einzuordnen. So stützt sich Cantor 1870 bei einer Arbeit über trigonometrische Entwicklungen auf das unter [1] erwähnte Lemma von Schwarz, das dieser ihm mündlich mitgeteilt habe. In einer Fußnote heißt es, daß dieses Lemma sich seinerseits auf den "in den Vorlesungen von Herrn Weierstrass häufig vorkommenden und bewiesenen Satz" von der Extremwertannahme stütze: vgl. [2]. In dieser Fußnote weist Cantor auch auf den - heute gebräuchlichen-Beweis des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung durch Ossian Bonnet hin; darin wird der Mittelwertsatz auf den Satz von Rolle zurückgeführt, der seinerseits mit dem Satz von der Extremwertannahme bewiesen wird. (Cauchy hatte den Mittelwertsatz nur für *stetig* differenzierbare Funktionen bewiesen).

Weierstrass führte den Satz von der Extremwertannahme auf den Auswahlsatz zurück, wie es z.B. bei einer von Dugac referierten Vorlesungsmitschrift von 1874 zu verfolgen ist; vgl. [3]. Sein Beweis für den Auswahlsatz für $\mathbb{R}$ ist ähnlich dem von ihm zuvor gegebenen Beweis für die Existenz des Supremums beschränkter Folgen und Weierstrass zitiert in diesem Zusammenhang Bolzanos berühmte Arbeit von 1817 "Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege", in der im Zusammenhang mit dem Beweis des Zwischenwertsatzes die Existenz des Supremums beschränkter Folgen wohl erstmals stringent gezeigt wird (durch Rückführung auf die von Bolzano hier erstmals bereits vor Cauchy hervorgehobene Vollständigkeit von $\mathbb{R}$). Aus Mitteilungen von H.A. Schwarz ist zu entnehmen, daß Weierstrass diese Arbeit von Bolzano schon vor 1870 gekannt haben muß. So schreibt Schwarz 1870 an Cantor, daß "ohne die Schlußweisen, die von Weierstrass von den Prinzipien Bolzanos ausgehend entwickelt worden sind, bei vielen Untersuchungen keine Fortschritte erzielt worden wären".

Auch an anderer Stelle spricht Schwarz (vgl. [10]). offensichtlich auf den Auswahlsatz gemünzt von einer "von Bolzano ersonnenen und Herrn Weierstrass weiterentwickelten Schlußweise". In der Literaturzusammenstellung, die in der Würdigung der Beiträge von Bolzano durch Otto Stolz 1881 (vgl. [11]). enthalten ist, wird aber keine Arbeit von Bolzano angegeben, in der der Auswahlsatz oder der Satz von der Extremwertannahme explizit auftreten. Stolz bezieht die Nennung des Namens von Bolzano in diesem Zusammenhang nicht auf die explizite Formulierung, sondern auf von Weierstrass aufgegriffene Ideen aus Bolzanos Beweis für die Existenz des Supremums; er teilt mit, daß ihm Schwarz diese seine Einschätzung brieflich bestätigt habe.

Eine erste *Veröffentlichung* des Auswahlsatzes (aber ohne Beweis) findet man in einer Arbeit von Cantor 1872; vgl. [4]. Eine Formulierung dieses Satzes fur $\mathbf{R}^n$ mit Beweis ist in einer Arbeit von Cantor 1884 enthalten: vgl. [5]. Der Beweis stützt sich auf das nach Cantor benannte Schachtelungsprinzip. Interessant ist hier die folgende Zuerkennung der Idee der Schlußweise durch Cantor selbst: "Ich bemerke, daß die hier angewandte Beweismethode, welche wohl schwerlich durch eine wesentlich andere ersetzt werden kann, ihrem Kerne nach sehr alt ist; in neuerer Zeit findet man sie u.a. in gewissen zahlentheoretischen Untersuchungen von *Lagrange, Legendre* und *Dirichlet* und in *Cauchy's* 'Cours d'Analyse' (Note troisième) und einigen Abhandlungen von *Weierstrass* und *Bolzano*; es erscheint mir daher nicht richtig, sie vorzugsweise oder ausschließlich auf *Bolzano* zurückzuführen, wie solches in neuerer Zeit beliebt geworden ist".

Diese Einschätzung Cantors verhindert aber nicht mehr, daß in dem Enzyklopädie-Artikel "Mengenlehre" von Schoenflies 1898 (vgl. [5]) der Auswahlsatz endgültig als "Satz von Bolzano-Weierstrass" bezeichnet wird. Es ist eine Ironie der Mathematikgeschichte, daß in einem bereits 1830 geschriebenen, aber erst 1930 veröffentlichten Manuskript von Bolzano der Satz über die Extremwertannahme explizit formuliert und sein Beweis auf den Auswahlsatz zurückgefuhrt wurde: vgl. [6].

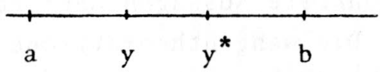
§2. Die Entstehung der Kompaktheitsschlußweisen der Gruppe B. Wir kommen nun zur historischen Diskussion der Entwicklung der Gruppe B von Sätzen, die heute meist mit dem Überdeckunssatz begründet werden, zur Zeit ihrer Entstehung aber auf den Satz von der Existenz des Supremums, den Auswahlsatz oder den Satz von der Extremwertannahme zurückgeführt wurden. Es zeigt sich aber *in der Nachsicht*, daß ein Teil dieser Beweise bei nur geringfügiger Modifikation eine Begründung für den Uberdeckungssatz liefert. Man darf diese Bemerkung aber nicht so verstehen, daß die Autoren bereits vor Borel im Besitze dieses Satzes gewesen wären. Vielmehr ging es ihnen um ganz konkrete Aussagen über Funktionen oder Reihen von Funktionen. Die mengentheoretische Denkweise, die zur Erfassung des Überdeckungssatzes notwendig ist, war den Analytikern der 70-er Jahre noch weitgehend fremd.

Zunächst zur Entwicklung des Konzepts der gleichmässigen Stetigkeit: Cauchy identifizierte 1823 bei seinem Beweis fur die Existenz des bestimmten Integrals einer stetigen Funktion $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ *unbewiesenerweise* die punktweise Stetigkeit mit der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf [a,b]. Dirichlet hat dann in seinen Vorlesungen über Integrationstheorie in diesem Zusammenhang implizit die gleichmäßige Stetigkeit von f bewiesen. In den Blickpunkt der mathematischen Öffentlichkeit trat der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit erst ab 1870 vor allem durch die Beiträge von Heine: In den Schlußbemerkungen zu einer Arbeit von 1870 geht er auf verschiedene Stetigkeitstypen von Funktionen zweier Veränderlicher ein und führt (vgl. [7]) die gleichmäßige Stetigkeit als eine neue *Voraussetzung* ein. Carl Neumann greift in einer Arbeit von 1871 den Vorschlag von Heine auf und setzt bei seinen Betrachtungen ausdrücklich die gleichmäßige Stetigkeit der von ihm betrachteten stetigen Funktionen auf einer kompakten Mannigfaltigkeit voraus (vgl. $\boxed{8}$)! Erst im Folgejahr 1872 beweist Heine als Schlußsatz seiner oben bereits erwahnten Arbeit "Die Elemente der Funktionenlehre" den Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit für *Funktionen einer reellen Variablen*; vgl. $\boxed{9}$. -Wir wollen uns Heines Beweis kurz ansehen.

Satz von Heine: **Eine stetige Funktion $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ist auf $[a,b]$ gleichmäßig stetig.**

Beweis (Crelles J. **74**, 1872; vgl. $\boxed{9}$): Sei $\varepsilon > 0$ beliebig,

punktweise Stetigkeit von f $\Rightarrow \begin{cases} \text{Fur jedes } y \in [a,b) \text{ existiert ein} \\ \text{maximales } y^* \in (y,b]\text{, so daß} \\ |f(x)-f(y)| \leqslant 3\varepsilon \text{ für alle} \\ x \in [y,y^*]. \end{cases}$



Setze

$$x_1 = a^*,$$
$$x_2 = x_1^* \quad \text{falls} \quad x_1 < b,$$
$$x_3 = x_2^* \quad \text{falls} \quad x_2 < b,$$
etc....

Wenn $a < a^* = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ fur ein $n \in \mathbb{N}$, so gilt mit $\delta = \min\limits_{k=1} (x_k - x_{k-1})$:

$$|f(x)-f(y)| \leqslant 9\varepsilon \quad \text{für alle} \quad x,y \in [a,b] \text{ mit } |x-y| \leqslant \delta.$$

Der Fall $a = x_1 < x_2 < \ldots < b$ kann aber nicht eintreten, denn er führt unter Verwendung der Stetigkeit von f in $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ zu einem Widerspruch zur Definition der x_n.

Wir sehen *heute* sofort, daß Heines Argument den Überdeckungssatz für $[a,b]$ für beliebige offene Überdeckungen *G* zeigt:

Heines Argument zeigt den Überdeckungssatz für $[a,b]$ für *beliebige* offene Überdeckungen G:

$$[a,b] \subset \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \Rightarrow \begin{cases} \text{Für jedes } y \in [a,b) \text{ existiert ein maximales} \\ y^* \in (y,b], \text{ so daß fur alle } x \in [y,y^*) \text{ gilt:} \\ [y,x] \subset G \text{ fur ein } G \in \mathcal{G} \end{cases}$$

Setze

$$x_1 = a^*,$$
$$x_2 = x_1^* \quad \text{falls} \quad x_1 < b,$$
$$x_3 = x_2^* \quad \text{falls} \quad x_2 < b,$$
etc....

Wenn $a < a^* = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so folgt die Behauptung (denn jedes der Intervalle $[a,x_1]$, $[x_1,x_2]$, ... wird von zwei Mengen aus $\mathcal{G}$ überdeckt).

Der Fall $a^* = x_1 < x_2 < \ldots < b$ kann aber nicht eintreten, denn er führt unter Betrachtung von $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ zu einem Widerspruch zur Definition der x_n.

Im selben Band von Crelles Journal geht Schwarz in einer Arbeit über die Integration der Potentialgleichung auf die erwähnte *Voraussetzung* der gleichmäßigen Stetigkeit in der Arbeit von Neumann ein und bemerkt (vgl. [10]), daß auf Grund des Satzes von Bolzano-Weierstrass "ohne Schwierigkeiten der Nachweis geführt werden kann", daß bei Funktionen auf einem abgeschlossenen Rechteck beide Stetigkeitskonzepte zusammenfallen. Dabei denkt er anscheinend an einen (heute wohlbekannten) direkten Widerspruchsbeweis. (Angenommen, eine stetige Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ (I ein abgeschlossenes Intervall des $\mathbb{R}^2$) ist nicht gleichmäßig stetig auf I. Dann existieren ein $\delta > 0$ und für $n = 1,2,\ldots$ Punkte $x_n, y_n \in I$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, jedoch $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass (oBdA; genauer sind Teilfolgen zu betrachten): $x_n, y_n \to a \in I$. Dann $0 = |f(a) - f(a)| = \lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| \geq \delta$ Widerspruch).

Die Folgejahre brigen weitere Beweise für den Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit, durch die der Zusammenhang zwischen dem Auswahlsatz und dem Überdeckungssatz (ohne daß dies so ausgesprochen wird) weitgehend aufgedeckt wird und Kompaktheitsschlußweisen entwickelt werden, die auch bei anderen Problemstellungen erfolgreich eingesetzt werden können. - Ich kann hier nur einen Beweis von Jacob Lüroth kurz diskutieren.

J. Lüroth: *Bemerkung über die gleichmäßige Stetigkeit.* Math. Ann. **6** (1873), 319-320.

$I \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes abgeschlossenes Intervall; $f: I \to \mathbb{R}$ stetig.

Beh.: f ist auf I gleichmäßig stetig.

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$.

$$\text{punktweise Stetigkeit von } f \Rightarrow \begin{cases} \text{Zu jadem } x \in I \text{ existiert } \rho = \rho_x > 0, \\ \text{so daß} \\ \sup\{|f(x')-f(x'')| : x', x'' \in \\ \qquad D_\rho[x] \cap I\} \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Sei $\rho(x) := \sup\{\rho_x : \text{alle } \rho_x\}$ $(x \in I)$.

$x \mapsto \rho(x)$ ist stetig auf I (denn $|\rho(x)-\rho(y)| < |x-y|$),

$\rho(x) > 0$ für alle $x \in I$.

"Nach einem Satz von Herrn Weierstrass" ist

$$\rho = \min\{\rho(x) : x \in I\} > 0.$$

Damit gilt fur alle $x,y \in I$:

$$|x-y| \leqslant \rho \ (\leqslant \rho(x)) \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon .$$

Lüroths Schlußweise zeigt auch die Gültigkeit des Überdeckungssatzes für *beliebige* (nicht notwendig abzählbare) offene Überdeckungen G von I: Nach dem obigen Argument existiert nämlich ein festes $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in I$ die Kreisscheibe $D_\rho[x]$ in einer der Mengen aus G enthalten ist.

Da aber I durch endlich viele $D_\rho[x]$ überdeckt wird, hat man eine endliche Teilüberdeckung von G für I. Die Schlußweise zeigt sogar, daß jeder folgenkompakte (folglich totalbeschränkte) metrische Raum die Überdeckungseigenschaft hat.

Dini benutzt 1878 beim Beweis des nach ihm benannten Satzes die Lürothsche Schlußweise. Pringsheim gibt 1894 an, daß Weierstrass mit dieser Schlußweise auch den Satz von der gleichmäßigen Konvergenz bewiesen habe; er versucht diesen Beweis zu modifizieren, wobei er dem Überdeckungssatz greifbar nahe kommt, ohne ihn ganz zu erfassen (vgl. [11]). Eine Präzisierung seines Ansatzes (wie sie später durch Schoenflies (vgl. [7]) erfolgte) gibt eine direkte Rückführung des Überdeckungssatzes auf den Auswahlsatz (ohne Umweg über den Satz von Weierstrass).

§3. Borels Überdeckungssatz. Als E. Borel in seiner Thèse von 1894 den Überdeckungssatz erstmals explizit aussprach, hatte er noch kein allgemeines Beweisprinzip im Auge, sondern mehr einen Hilfssatz, den er bei der Behandlung einer *funktionentheoretischen* Fragestellung an ganz spezifischer Stelle benötigte. Er formulierte seinen Satz auch spezieller und gab ihm einen ganz anderen Beweis, als es nach der obigen Analyse bereits vorliegender Kompaktheitsschlußweisen möglich schien. Die Erkenntnis der grundlegenden Bedeutung des Überdeckungssatzes für die Analysis sowie seines Zusammenhangs mit den bereits vorliegenden Methoden kann erst zehn Jahre später als abgeschlossen angesehen werden. Es wäre deshalb historisch wichtig, den genauen Anlaß für die erste Formulierung des Überdeckungssatzes zu kennen, worauf ich hier aber aus Platzgründen nicht eingehen kann (vgl. hierzu die Darstellung in [14]).

Die ursprüngliche Borelsche Formulierung seines Satzes finden Sie unter [12]; wichtig ist, daß *abzählbare* Ausgangsüberdeckungen vorausgesetzt werden. Die Teilüberdeckung wird

- im Verstandnis Borels - *konstruktiv* durch Induktion über die abzählbaren Ordinalzahlen gewonnen: Das Induktionsverfahren kommt vor dem Erreichen der ersten überabzählbaren Ordinalzahl zum Stillstand, weil dabei immer wieder neue Überdeckungsintervalle benötigt werden, aber nur abzahlbar viele solcher Intervalle zur Verfügung stehen. Der Borelsche Beweis ist somit ganz wesentlich an die Abzahlbarkeitsvoraussetzung und an den Spezialfall linearer Intervalle gebunden. Borel war sich 1894 ganz sicher noch nicht der Verallgemeinerungsfähigkeit und damit erst vollen Tragfähigkeit seiner Schlußweise bewußt sowie ihres Zusammenhangs mit den bereits vorliegenden Kompaktheitstechniken.

Die folgenden zehn Jahre bringen nun die Adaption des Überdeckungssatzes durch die Analytiker, seine Formulierung in der gebotenen Allgemeinheit und die Aufklärung des Zusammenhangs mit den älteren Schlußweisen: In dem Enzyklopädieartikel "Mengenlehre" von A. Schoenflies von 1898 (vgl. [5]) ist der Überdeckungssatz noch nicht erwähnt. Borel wiederholt ihn im gleichen Jahre in den Präliminarien zu seinen 'Leçons sur la théorie des fonctions', und zwar unter den gleichen einschränkenden Voraussetzungen, aber mit einem neuen Widerspruchsbeweis durch Rückführung auf das Schachtelungsprinzip. A. Schoenflies nimmt 1900 den Satz in seinen DMV-Bericht "Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten" (vgl. [6]) unter der Bezeichnung "Satz von Heine-Borel" auf, bei Reproduktion des ursprünglichen Borelschen Beweises. An anderer Stelle beweist Schoenflies den Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit (in n Variablen) unter Präzisierung der Kompaktheitsschlußweise von Pringsheim, merkt aber (wohl als erster) auch an, daß dieser Satz eine unmittelbare Folge des Überdeckungssatzes ist. Die Loslösung von der Voraussetzung der Abzählbarkeit des überdeckenden Ausgangssystems erfolgt 1903/05 in den "Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives" von H. Lebesgue, wo der Satz dann wesentlich beim Aufbau der Maßtheorie verwendet wird, ferner in Noten von W.H. Young (Proc. London Math.

Soc. (1) **35** (1902/3),p.384) und F. Riesz (CR Paris **140**(1905) 224-226). Riesz schreibt: "In dieser neuen Form erweist sich das Theorem als gemeinsame Ausgangsbasis für mehrere Fundamentalsätze der Theorie der Funktionen einer rellen Veränderlichen" und gibt als Beispiele die Sätze von der Extremwertannahme und von der gleichmäßigen Stetigkeit an. - In einer Folgenote "Sur une propriété des ensembles fermés" von 1905 (CR Paris **105**, 298-300) (in der er auch auf die Äquivalenz von Überdeckungseigenschaft und Abgeschlossenheit bei beschränkten Teilmengen von $\mathbb{R}$ hinweist) nimmt Borel zu dieser weiteren Entwicklung Stellung. Er bestätigt dabei die Rieszsche Einschätzung, daß der Überdeckungssatz erst durch die Befreiung von der Abzählbarkeitsvoraussetzung seinen vollen Wert gewinne, wobei er diese Verallgemeinerung Lebesgue zuschreibt: "Ich bin glücklich darüber, daß mir die Gelegenheit gegeben ist, anzuzeigen, welches der Anteil von M. Lebesgue bei diesem verallgemeinerten Satze und seinen Anwendungen ist". Wohl durch diese Bemerkung ist in Frankreich die Bezeichnung "Satz von Borel-Lebesgue" üblich geworden. Es ist in diesem Zusammenhang anzumerken, daß der sog. "Überdeckungssatz von Lindelöf" (über die Existenz abzählbarer Teilüberdeckungen beliebiger offener Überdeckungen) bereits 1903 unabhängig durch E. Lindelöf (CR Paris **137**, 697) und W.H. Young bewiesen wurde (von letzterem ausdrücklich zu seiner - oben bereits erwähnten - Verallgemeinerung des Borelschen Satzes auf überabzählbare Uberdeckungen), von Borel aber offensichtlich übersehen wurde. - Borel gibt in der gennanten Note noch einen weiteren Beweis des Überdeckungssatzes an, den er einer brieflichen Mitteilung von Baire verdanke; dieser Beweis ist genau die Adaption des oben diskutierten Lürothschen Beweises des Satzes von Heine auf die mengentheoretische Situation.

Mittlerweile war auch in der amerikanischen Literatur die Bezeichnung des Überdeckungssatzes als "Satz von Heine-Borel" aufgetreten. Borel nimmt hierzu - fälschlicherweise - wie folgt Stellung: "Dieser Beweis von M. Baire ist nicht ohne Ähnlichkeit mit dem, den Heine für die Gleichmäßigkeit der Stetigkeit (Crelles J. 74) gegeben hat. Zweifellos liegt es an dieser Analogie, daß gewisse Autorem dem in Frage stehenden Theorem die Bezeichnung 'Satz von Heine-Borel' gegeben haben". - Schoenflies erläutert diese von Borel offensichtlich nicht ganz anerkannte Bezeichnung des Überdeckungssatzes 1907 (cf. [7]) wie folgt: "Der Unterschied beider Satze ist nur der, daß Heine nur die Stetigkeitsaussage im Auge hatte, während das (Borelsche)... Theorem den allgemeinen geometrischen Inhalt des Schlußverfahrens enthält, mit dem Heine operiert; es gobt den Beweisgrund des Heineschen Satzes seinen allgemeinsten geometrischen Ausdruck".

Die Jahre nach 1904 bringen eine "Explosion" von Beweisen für den Überdeckungssatz (vgl. Enzykl. II C.9, p. 885). In einer CR-Note von 1912 reiht Borel eine Version des Überdeckungssatzes unter die "Fundamentalsätze der Theorie der reellen Funktionen" ein. In der 1913 erschienenen revidierten Fassung (vgl. [9]) seines DMV-Berichtes von 1900 schreibt Schoenflies bereits, daß sich der Überdeckungssatz "sich mehr und mehr als einer der wichtigsten Sätze für die Theorie der Punktmengen herausgestellt hat..." und weiter, daß er "den wesentlichen Beweisgrund für eine Reihe wichtiger Sätze aus Geometrie und Analysis" bildet.

§4. Abstrahierungen. Abschließend möchte ich in einer ganz kurzen Skizze auf die Entwicklung des heutigen *abstrakten* Kompaktheitsbegriffes eingehen. Der Ursprung hierzu ist wohl hauptsächlich in der Diskussion des Dirichletschen Prinzips zu sehen, bei dem - wie Weierstraß 1870 kritisiert hatte - der Satz von der Extremwertannahme ungeprüft in einer allgemeineren Situation als der von stetigen Funktionen einer *numerischen* Veränderlichen angewendet wird. Bei der Rehabilitierung des Dirichletschen Prinzips verwenden Arzelà 1895 und Hilbert 1905 eine Auswahlschlußweise für Mengen stetiger Funktionen, die 1884 von Ascoli erstmals angegeben worden war. 1904 betrachtet Fréchet (vgl. [13]) - möglicherweise vor diesem Hintergrund - auf einem gänzlich abstraktem Raum einen axiomatischen Limesbegriff, führt die *Kompaktheit* - die Bezeichnung stammt vom ihm - einer Menge E ein als - wie wir heute sagen - relative Folgenkompaktheit und zeigt den Satz von Weierstrass für stetige reellwertige Funktionen auf einer kompakten abgeschlossenen Menge. Diese Definition wird in seiner Thèse von 1906 - in der nun die Namen von Ascoli, Arzelà und Hilbert auch angeführt werden - aufgegriffen; im Kern erfolgt hierin (vgl. [14]) für die von Fréchet eingeführten metrischen Räume der Nachweis der Äquivalenz von Folgenkompaktheit und Überdeckungseigenschaft; auch die heute sog. Totalbeschränktheit wird in diesem Zusammenhang bereits diskutiert. Hausdorff führt 1914 in seinem Buch "Gründzuge der Mengenlehre" die separierten toplogischen Räume ein und nennt (vgl. [15]) nach Fréchet eine Menge E kompakt, wenn jede unendliche Teilmenge von E einen Häufungspunkt besitzt. Er gibt die endgültige - bei Fréchet noch mi Ballast behaftete - Diskussion der verschiedenen Kompaktheitsbegriffe für metrische Räume und weist für Hausdorffräume mit 2. Abzählbarkeitsaxiom nach, daß eine Menge genau dann die Überdeckungseigenschaft (bzgl. beliebiger offener Überdeckungen) besitzt, wenn sie kompakt und abgeschlossen ist. Hiermit ist die Entwicklung zu einem ersten Abschluß gebracht.

Gleichzeitig zeigt aber Hausdorffs Diskussion - wegen der Zusatzforderung des 2. Abzählbarkeitsaxiomes - gewisse Schwächen der Fréchet-Hausdorffschen Kompaktheitsdefinition, wenn es sich um allgemeinere als metrische Räume handelt. In den Folgejahren wurden für diesen Fall verschiedene andere - nicht äquivalente - Kompaktheitsdefinitionen diskutiert, u.a. von Fréchet, Kuratovski - Sierpinski und Alexandroff-Uryhson (vgl. hierzu J.P. Pier [7]). Letztere nannten 1924 eine Menge in einem Hausdorffraum *kompakt*, wenn sie die Überdeckungenschaft bzgl. *abzählbarer* und *bikompakt*, wenn sie diese Eigenschaft bzgl. *beliebiger* offener Überdeckungen besitzt und charakterisierten beide Begriffe durch entsprechende Heine-Borel-Eigenschaften (vgl. [16]) - Da sich in der Folgezeit der Bikompaktheitsbegriff der Moskauer Schule verglichen zu allen anderen Definitionen als der flexibelste erwies, wurde dann spater (ab etwa 1950) die Bezeichnung 'kompakt' allgemein akzeptiert mit der Übedekkungseigenschaft bzgl. beliebiger offener Uberdeckungen verbunden.

ANHANG

[1] Sätze die auf Kompaktheitsschl weisen beruhen:

<u>**Gruppe A**</u> (1860-1870):
Satz von der Extremwertannahme ("(Fundamental-) Satz von Weirstrass"): Eine stetige Funktion $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ist auf $[a,b]$ beschränkt und nimmt dort ihr Supremum und Infimum an.

Satz von Rolle

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Lemma. Wenn $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und $f'(x) = 0$ fur alle $x \in [a,b]$, so ist f konstant.

Lemma von Schwarz: Wenn $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist und

$$\Delta^2 f(x) = \lim_{h\to o} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = 0 \text{ fur alle } x \in [a,b],$$

so ist f linear.

<u>**Gruppe B**</u> (1870-1880):
Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit ("Satz von Heine"): Eine stetige Funktion $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ist auf $[a,b]$ gleichmäßig stetig.

Satz von Dini: Sei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u(x)$ eine auf $[a,b]$ punktweise konvergente Reihe stetiger Funktionen mit $u_n(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [a,b]$, $n = 1,2,...$ und sei die Summe $x \to u(x)$ stetig.

Dann ist die Konvergenz der Reihe gleichmäßig auf [a,b].

Satz von der gleichmäßigen Konvergenz: Sei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ eine auf [a,b] punktweise gleichmäßig konvergente Reihe (stetiger) Funktionen (d.h. für alle $y \in [a,b]$ und alle $\varepsilon > 0$ existieren $n_0 = n_0(y) \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$, so daß $\left|\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n(x)\right| < \varepsilon$ für alle $x \in [y-\delta, y+\delta] \cap [a,b]$). Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ auf [a,b] gleichmäßig konvergent.

Kompaktheistsprizipien:

Überdeckungssatz ("Satz von Heine-Borel", "Satz von Borel-Lebesgue"; 1894 ff): Zu jeder (abzählbaren) offenen Überdekkung von [a,b] existiert eine endliche Teilüberdeckung.

Auswahlsatz ("Satz von Bolzano-Weierstrass"; 1830, ab ca. 1860): Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge. (Jede unendliche beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ vesitzt einen Häufungspunkt.)

2 Extremwertsatz bei K. Weierstrass:

Aus: G. Cantor, *Beweis, dass eine für jeden reellen Werth von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion f(x) sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt.* Crelles J. **72** (1980), 139-142. Fußnote auf p. 141.

*) Dieser Beweis stützt sich im Wesentlichen auf den in den Vorlesungen des Herrn *Weierstrass* häufig vorkommenden und bewiesenen Satz:

„Eine in einem Intervalle $(a \dots b)$ (die Grenzen incl.) der reellen Veränderlichen x gegebene, stetige Function $\varphi(x)$ ***erreicht*** das Maximum g der Werthe, welche sie annehmen kann, zum Mindesten für einen Werth x_0 der Veränderlichen, so dass $\varphi(x_0) = g$."

Einen ähnlichen, auch hierauf beruhenden Beweis für den Fundamentalsatz der Differentialrechnung hat *Ossian Bonnet* geführt; derselbe findet sich in „*Cours de calcul différentiel et intégral,* par *J. A. Serret,* Paris 1868" im ersten Bande, Seite 17—19.

3 Auswahlsatz bei K. Weierstrass:

Aus: K. Weierstrass, *Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen.* Vorlesung vom SS 1874, Ausgearbeitet von G. Hettner, Zitiert nach Dugac [2], p.77:

WEIERSTRASS donne à la page 305 l'énoncé du théorème que tout ensemble infini borné de nombres réels admet un point d'accumulation. La démonstration (pp. 305—310) est semblable à celle que nous avons vue pour l'existence de la borne supérieure. Il en déduit (pp. 310—311) le théorème qu'une fonction continue sur un compact atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure. L'existence des points d'accumulation est démontrée dans le cas de sous-ensembles bornés infinis de $\mathbb{R}^n$ (p. 313) et de $\mathbb{C}^n$ (p. 318).

4 Auswahlsatz bei G. Cantor:

Aus: G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*. Math. Ann. 5 (1872), 123-132. Ausschnitt aus p. 129:

Zur Theorie der trigonometrischen Reihen. 129

Um diese abgeleiteten Punktmengen zu definiren, haben wir den Begriff *Grenzpunkt einer Punktmenge* vorauszuschicken.

Unter einem Grenzpunkt einer Punktmenge P verstehe ich einen Punkt der Geraden von solcher Lage, dass in jeder Umgebung desselben unendlich viele Punkte aus P sich befinden, wobei es vorkommen kann, dass er ausserdem selbst zu der Menge gehört. Unter Umgebung eines Punktes sei aber hier ein jedes Intervall verstanden, welches den Punkt *in seinem Innern* hat. Darnach ist es leicht zu beweisen, dass eine aus einer unendlichen Anzahl von Punkten bestehende Punktmenge stets zum Wenigsten *einen* Grenzpunkt hat.

5 Auswahlsatz bei G. Cantor:

Aus: G. Cantor, *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*. Math. Ann. 23 (1885), 453-488. Ausschnitt aus p.454 ($G_n = \mathbf{R}^n$ in heutiger Bedeutung):

Als einfachstes Beispiel einer *Beschaffenheit* von Punktmengen, welche den Charakter Υ haben, führe ich diejenige Beschaffenheit einer unendlichen Punktmenge an, wonach sie aus *unendlich viel* Punkten besteht; offenbar genügt diese Beschaffenheit den beiden *soeben formulirten* Voraussetzungen. Es gilt nun folgender Satz:

Theorem I. *Ist H irgend ein ganz im Endlichen liegender n-dimensionaler Theil von G_n und P eine in H enthaltene Punktmenge von der Beschaffenheit Υ, so giebt es wenigstens einen Punkt g von H in solcher Lage, dass, wenn K_n irgend eine n-dimensionale Vollkugel mit dem Mittelpunkt g ist, derjenige Bestandtheil von P, welcher in das Gebiet K_n fällt, stets die Beschaffenheit Υ hat, der Radius der Vollkugel K_n mag so klein genommen werden, wie man wolle.*

(6) Auswahlsatz und Extremwertsatz bei B. Bolzano:

Aus: B. Bolzano, *Functionenlehre*. Manuskript von 1830. Herausgegeben von K. Rychlik: B. Bolzano's Schriften. Prag. 1930. Ausschnitt von P. 28 und 29:

Wir wissen nun. (aus §.), daß sich die unendlich vielen Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 ... entweder alle, oder doch ein so großer Theil derselben, daß ihre Menge schon selbst unendlich ist, in ein Paar Grenzen p und q einschließen lassen, welche einander so nahe rücken können, als wir nur immer wollen, und es ergibt sich (aus §.*)), daß eine dieser Grenzen durch c, die andere durch $c \pm \omega$ vorgestellt werden könne, wenn wir durch c eine gewisse nicht außerhalb a und b liegende beständige Zahl, durch ω aber eine Zahl. die ins Unendliche abnehmen kann, bezeichnen.

---

*) *NB*. Die zwei §§. auf welche sich hier berufen wird. sind in der Lehre von der Meßbarkeit der Zahlen erwiesen.

§. 22. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx von $x=a$ bis $x=b$ einschließlich stetig ist, und es gibt eine beständige meßbare Zahl C von der Art, daß die unendlich vielen Werthe der Fx. welche zum Vorschein kommen, wenn wir ihrer Veränderlichen x nach und nach eine unendliche Menge innerhalb a und b gelegener Werthe ertheilen, sich der Zahl C in das Unendliche nähern: so gibt es auch unter den Werthen von $x=a$ bis $x=b$ einschließlich wenigstens Einen $=c$. für welchen $Fc=C$ wird.

Beweis. Bezeichnen wir die unendlich vielen Werthe der x. welche die Eigenschaft haben, daß die ihnen zugehörigen Werthe der Fx sich der Zahl C in das Unendliche nähern, durch x_1. x_2, x_3, x_4 ... *in inf.*: so folgt (aus §.), daß sich. wenn auch nicht alle diese Werthe, doch eine unendliche Menge derselben einschließen lassen in ein Paar Grenzen von der Form c und $c \pm \omega$, wenn wie durch c eine nicht außerhalb a und b gelegene Zahl bezeichnen. Hieraus ergibt sich aber (nach §. 14.), daß. weil unsere Function für den Werth $x=c$ stetig seyn soll, $Fx=C$ seyn müsse.

(7) Formulierung des Konzepts der gleichmaßigen Stetigkeit bei E. Heine:

Aus: E. Heine, *Ueber trigonometrische Reihen*, Crelles Journal 71 (1870), 353-365. Ausschnitt aus p. 361.

Es scheint aber noch nicht bemerkt zu sein, dass diese Eigenschaften, *diese Continuität in jedem einzelnen Punkte nach zwei Richtungen hin*, nicht diejenige Continuität ist, welche man voraussetzen muss, wenn man auf die Function analoge

Schlüsse anwenden will, wie diejenigen, welche für die continuirlichen Functionen mit einer Veränderlichen gestattet sind, und die man *gleichmässige Continuität* nennen kann, weil sie sich gleichmässig über alle Punkte und alle Richtungen erstreckt. *Eine Function zweier Veränderlichen x, y heisse gleichmässig continuirlich in einem Gebiete, wenn für jede beliebig kleine gegebene Grösse ε Grössen h_1 und k_1, von denen keine Null ist, existiren, so dass die Differenz $f(x+h, y+k)-f(x, y)$ kleiner als ε bleibt, so lange h und k resp. h_1 und k_1 nicht überschreiten, und zwar muss dieses bei gegebenem ε und festgehaltenen h_1 und k_1 für alle Punkte (x, y) und $(x+h, y+k)$ stattfinden, die dem Gebiete, seine Begrenzung eingeschlossen, angehören.*

8 Gleichmaßige Stetigkeit bei C. Neumann:

Aus: C. Neumann, *Revision einiger allgemeinen Sätze aus der Theorie des logarithmischen Potentials*. Math. Ann. 3 (1871), 325-349. Ausschnitt von p. 327:

Eine von den rechtwinkligen Coordinaten x, y abhängende Function $\Phi(x, y)$ wird daher als stetig *auf* oder *in Erstreckung* einer gegebenen Fläche $\mathfrak{T}$ nur dann bezeichnet werden dürfen, wenn nachgewiesen ist erstens, dass sie stetig ist in jedem Punkte *innerhalb* $\mathfrak{T}$, und zweitens, dass sie stetig ist in jedem Punkte am *Rande* von $\mathfrak{T}$. — Für die vorliegenden Betrachtungen scheint übrigens der gewöhnliche Begriff der Stetigkeit nicht ausreichend zu sein. Wie dem auch sei, jedenfalls wird in den hier zu erörternden Sätzen eine vollständige Strenge erreicht werden durch Einführung eines etwas engeren, von Heine angegebenen Begriffes, welcher — nach Heine's Vorgang — als der Begriff *gleichmässiger Stetigkeit* zu bezeichnen, und in folgender Weise zu definiren ist.

Sind p, q zwei auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{T}$ bewegliche Punkte, welche mit einander verbunden sind durch einen Faden von der Länge ϱ, deren Entfernung von einander also beständig $\leqq \varrho$ bleiben muss, und sind Φ_p, Φ_q die in diesen Punkten vorhandenen Werthe der Function, so wird im Allgemeinen die Differenz zwischen Φ_p und Φ_q um so kleiner sein, je kleiner ϱ genommen wird. Kann nun, mit Bezug auf ein gegebenes ε, wie klein dasselbe auch sein mag, jederzeit durch gehörige Verkleinerung der Fadenlänge ϱ dafür gesorgt werden, dass die genannte Differenz, während einer beliebigen in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{T}$ vor sich gehenden Bewegung des Punktpaares p, q, beständig *kleiner* bleibt als jenes ε, so soll die Function Φ bezeichnet werden als *gleichmässig stetig* in Erstreckung der Fläche $\mathfrak{T}$. In gewissen besonderen Fällen ist hierbei noch eine Festsetzung hinzuzufügen, darin bestehend, dass bei der gedachten Bewegung der Faden ϱ beständig *auf* der Fläche bleiben soll, dass er also den Rand der Fläche niemals überschreiten darf.

9 **Satz von der gleichmaßigen Stetigkeit bei E. Heine:**

Aus: E. Heine, *Die Elelemente der Functionenlehre*. Crelles J. **74** (1872), 172-188. Ausschnitt von p. 184 und 188.

§. 3. Eigenschaften continuirlicher Functionen.

1. *Definition.* Eine Function $f(x)$ heisst *continuirlich* von $x = a$ bis $x = b$, wenn sie bei jedem einzelnen Werthe $x = X$ zwischen $x = a$ und $x = b$, mit Einschluss der Werthe a und b, continuirlich ist (B, §. 2, Def. 1); sie heisst *gleichmässig continuirlich* von $x = a$ bis $x = b$, wenn für jede noch so kleine gegebene Grösse ε eine solche positive Grösse η_0 existirt, dass für alle positiven Werthe η, die kleiner als η_0 sind, $f(x \pm \eta) - f(x)$ unter ε bleibt. Welchen Werth man auch x geben möge, nur vorausgesetzt, dass x und $x \pm \eta$ dem Gebiete von a bis b angehören, muss *dasselbe* η_0 das Geforderte leisten.

1. *Lehrsatz.* Jede ganze Potenz von x ist zwischen irgend welchen gegebenen Grenzen gleichmässig continuirlich.

6. *Lehrsatz.* Eine von $x = a$ bis $x = b$ (für alle einzelnen Werthe) continuirliche Function $f(x)$ ist auch gleichmässig continuirlich. (B, §. 3, Def. 1).

Beweis. Bezeichnet 3ε eine beliebige Grösse, so existirt eine solche Zahl, dass von $x = a$ bis zu ihr hin $f(x) - f(a)$ absolut $\leqq 3\varepsilon$ ist. Ein Werth, der dies leistet, ist der grösste und macht zugleich $f(x) - f(a) - 3\varepsilon = 0$. (B, §. 3, Lehrs. 5). Dieser Werth sei x_1. In ähnlicher Art findet man eine Zahl x_2 als die grösste, welche bewirkt, dass von $x = x_1$ bis $x = x_2$ immer $f(x) - f(x_1) \leqq 3\varepsilon$ bleibt. So fährt man fort; kommt man nach einer endlichen Anzahl n von Operationen zu $x_n = b$ oder findet, dass $f(x) - f(x_{n-1})$, von $x = x_{n-1}$ bis $x = b$, noch nicht 3ε überschreitet, so ist der Satz bewiesen.

Es bliebe noch der Fall übrig, dass kein n existirt, dass also die Grössen x_1, x_2, etc. eine unendliche Reihe von wachsenden Grössen bilden, die unter b liegen. Diese Reihe wäre dann eine Zahlenreihe, deren Zahlzeichen X sei; hervorzuheben ist ihre Eigenschaft, nach der für jedes n die Gleichung besteht: $f(x_{n+1}) - f(x_n) = 3\varepsilon$. Nun sei η_0 von der Beschaffenheit, dass $f(X)$ sich von $f(X - \eta)$ um weniger als ε unterscheidet, so lange $\eta < \eta_0$. Zwischen die Zahlen $X - \eta_0$ und X mögen von der obigen Zahlenreihe x_n, x_{n+1}, etc. fallen, so dass (B, §. 2, Folg. 1) $f(x_{n+1}) - f(x_n)$ kleiner als 2ε wäre, während es andererseits 3ε sein müsste. Die zu Grunde liegende Annahme ist daher unmöglich, und die Function eine gleichmässig continuirliche.

Halle, im October 1871.

10 **Satz von der gleichmaßigen Stetigkeit bei H.A. Schwarz:**

Aus: H.A. Schwarz, *Zur Integration der partiellen Differentialgleichung* $\Delta f = 0$. Crelles J. **74** (1872), 218-253.

Ausschnitt aus der Fußnote von p. 220:

Bei Beginn meiner mathematischen Studien habe ich folgende Erklärung der Stetigkeit einer Function zweier Argumente kennen gelernt, die ich auch jetzt noch für die richtige halte: „Eine Function $f(x, y)$ ist in der Umgebung des Werthepaares x_0, y_0 eine stetige Function ihrer beiden (stetig veränderlichen) reellen Argumente, wenn es nach Annahme einer von Null verschiedenen, sonst hinsichtlich ihrer Kleinheit keiner Beschränkung unterworfenen positiven Grösse ε stets möglich ist, in der Umgebung des Werthepaares x_0, y_0 einen nach zwei Dimensionen ausgedehnten Bereich abzugrenzen, so dass für *alle*, zugleich dem ursprünglichen Bereiche der Variablen, für den die Function erklärt ist, und dem abgegrenzten Bereiche zugehörenden Werthepaare x_0+h, y_0+k die Differenz $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ dem absoluten Betrage nach kleiner ist als ε. Hierbei ist die Gestalt jenes abgegrenzten Bereiches im Allgemeinen keinen Beschränkungen unterworfen. Genügt eine Function dieser Bedingung für alle dem Innern und für alle der Begrenzung eines gegebenen Bereiches der unabhängigen Variablen angehörenden Werthepaare x_0, y_0, so ist die betrachtete Function *für diesen Bereich* eine stetige Function ihrer Argumente". Es scheint mir kein Bedürfniss vorzuliegen, von dieser Erklärung abzugehen, da mit Hülfe einer von *Bolzano* ersonnenen und von Herrn *Weierstrass* weiter entwickelten Schlussweise ohne Schwierigkeit der Nachweis geführt werden kann, dass jede Function, welche im obigen Sinne für einen gegebenen Bereich eine stetige Function ihrer Argumente ist, für denselben Bereich auch in dem Sinne des Herrn *Heine* gleichmässig stetig ist. Da auch das Umgekehrte stattfindet, so decken sich die beiden Begriffe vollkommen.

11 **Versuch einer Uberdeckungsschlußweise vor Borel** (im Zusammenhang mit dem Beweis des Satzes von der gleichmäßigen Konvergenz):

Aus: A. Pringsheim, *Ueber die nothwendigen und hinreichnden Bedingungen des Taylor'schen Lehrsatzes für Functionen einer reellen Variablen.* Math. Ann. **44** (1894), 57-82, Anhang. Auszug aus p. 81:

Es ist klar, dass man durch Fortsetzung dieses Verfahrens den Geltungsbereich (B) der Ungl. (2) mit Festlegung einer bestimmten Zahl n als unterer Grenze für ν beständig vergrössern kann, und es kommt also lediglich darauf an zu zeigen, dass man auf diese Weise stets nach einer *endlichen* Anzahl derartiger Operationen dazu gelangen kann, denselben auf den vorgelegten Bereich (A) auszudehnen. Hierzu genügt offenbar der Nachweis, dass man *jede* beliebige Stelle von (A) nebst einer gewissen endlichen Umgebung durch eine endliche Anzahl der angegebenen Operationen dem Bereiche (B) einverleiben kann. Wäre dies nun *nicht* der Fall, so müssten die Radien $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_k, \dots$ mit wachsendem k unter jede Grenze herabsinken, sobald man sich bei dem angedeuteten Verfahren einer oder mehreren bestimmten Stellen (x', y') von (A) nähert. Dies ist aber unmöglich: da nämlich jeder solchen Stelle (x', y') in Folge der Voraussetzung eine bestimmte Umgebung (ϱ') in dem angegebenen Sinne zugeordnet werden kann, so gehört zu jeder Stelle (x_k, y_k), die um weniger als $\frac{1}{2}\varrho'$ von (x', y') entfernt ist, eine Umgebung (ϱ_k), deren Radius ϱ_k sicher $> \frac{1}{2}\varrho'$ ist, sodass also ϱ_k stets oberhalb einer endlichen Grenze bleibt. Hiermit ist aber der ausgesprochene Satz bewiesen. **)

12 **Erste Formulierung des Überdeckungssatzes bei E. Borel:**
Aus: E. Borel, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. Paris (3) **12** (1894), 9-55. (Thèse; vgl. auch Werke I.) - Ausschnitt von p. 281-282.

Beachte: Es ist eine *abzählbare* Intervalluberdeckung gemeint.

Voici ce théorème : *Si l'on a sur une droite une infinité d'intervalles partiels, tels que tout point de la droite soit intérieur à l'un au moins des intervalles, on peut déterminer effectivement un* NOMBRE LIMITÉ *d'intervalles choisis parmi les intervalles donnés et ayant la même propriété* (*tout point de la droite est intérieur à au moins l'un d'eux*). Il est bien entendu que le mot *intérieur* est toujours pris dans le sens restreint qui exclut les extrémités; il est aisé de s'assurer que, sans cela, le théorème ne serait pas vrai. On pourrait démontrer directement que tout point de la droite est nécessairement à l'intérieur d'un intervalle de rang limité (en supposant les intervalles numérotés suivant une loi quelconque), mais la démonstration suivante parait être davantage dans la nature des choses.

Partons d'une extrémité A de la droite, soit $A_i B_i$ un des intervalles qui comprennent le point A; soit de même $A_{i_1} B_{i_1}$ un des intervalles qui comprennent le point B_i, $A_{i_2} B_{i_2}$ un des intervalles qui comprennent le point B_{i_1}, etc. Nous supposons, bien entendu, que A désigne toujours l'extrémité gauche des intervalles, B l'extrémité droite. Les points B_{i_1}, B_{i_2}, B_{i_3}, ..., s'ils n'atteignent pas l'extrémité B de la droite, ont une limite B_{i_ω} et ce point est compris dans un intervalle $A_{i_{\omega+1}} B_{i_{\omega+1}}$ tel que $A_{i_{\omega+1}}$ tombe, par exemple, entre $B_{i_{m-1}}$ et B_{i_m}; nous pourrons alors ne pas tenir compte des intervalles $A_{i_{m+k}} B_{i_{m+k}}$, et nous aurons tout de même une suite ininterrompue d'intervalles sur la droite. Nous continuerons de même, en passant à la limite lorsque cela sera nécessaire et montrant alors qu'on peut conserver seulement un nombre fini des intervalles déjà considérés. Je dis que nous atteindrons nécessairement l'extrémité B de la droite, car, si on ne l'atteignait pas, on définirait une série d'intervalles ayant pour extrémités

$$B_{i_1},\quad B_{i_2},\quad \ldots,\quad B_{i_\omega},\quad B_{i_{2\omega}},\quad \ldots,\quad B_{i_{\omega^2}},\quad \ldots,\quad B_{i_{\omega^\omega}},\quad \ldots,$$

les indices étant *tous* les nombres de la seconde classe de nombres (définis par M. Cantor). Mais ces indices sont aussi dans un certain ordre, les nombres naturels, en tout ou en partie. C'est là une contradiction puisque la seconde classe de nombres constitue un ensemble de seconde puissance.

Ainsi on arrivera nécessairement, en employant le procédé régulier indiqué, à *déterminer effectivement* un nombre fini d'intervalles qui recouvriront toute la droite.

13 **Erste Formulierung des abstrakten (Folgen-) Kompaktheitsbegriffes und Abstrahierung des Satzes von der Extremwertannahme durch M. Fréchet:**

Aus: F. Fréchet, Généralisation d'un théoreme de Weierstrass. C.R. Acad. Sci. Paris 139 (1904), 848-850. Ausschnitt von p. 849-850.

» II. Nous supposons donnée une certaine catégorie C d'éléments quelconques (nombres, surfaces, etc.), dans laquelle on sache discerner les éléments distincts. Nous pourrons dire que U_A est une *fonction* (*ou opération fonctionnelle*) *uniforme dans un ensemble* E d'éléments de C, si à tout élément A de E correspond un nombre bien déterminé U_A.

» Pour arriver à la notion de continuité d'une telle fonction, nous supposerons acquise une définition qui donne un sens précis à cette phrase : *la suite infinie* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *d'éléments de* C *a une limite* B. Il nous suffira que cette définition, d'ailleurs quelconque, satisfasse aux deux conditions suivantes : 1° si la suite $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ a une limite, toute suite $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots$, formée d'éléments d'indices croissants de la première suite a aussi une limite qui est la même; 2° si aucun des éléments A_1, $A_2, \ldots$ d'une suite quelconque n'est distinct de A, cette suite a une limite qui est A.

» Ceci étant, nous appellerons *élément limite* d'un ensemble E, un élément A qui soit la limite d'une suite d'éléments *distincts* pris dans E. Un ensemble E sera *fermé* s'il ne donne lieu à aucun élément limite ou s'il contient ses éléments limites.

» Nous pourrons dire maintenant qu'une opération fonctionnelle U uniforme dans un ensemble *fermé* E est *continue* dans E si les nombres U_{A_n} tendent toujours vers U_A lorsque la suite quelconque d'éléments de E : $A_1, \ldots, A_n, \ldots$, a pour limite A, quel que soit l'élément limite A de E.

» Enfin nous appellerons *ensemble compact* tout ensemble E tel qu'il existe toujours au moins un élément commun à une suite infinie quelconque d'ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, contenus dans E, lorsque ceux-ci (possédant au moins un élément chacun) sont fermés et chacun contenu dans le précédent.

» III. Moyennant les définitions précédentes, nous arrivons immédiatement à la généralisation annoncée :

» Théorème. — *Toute opération fonctionnelle* U_A *uniforme et continue dans un ensemble compact et fermé* E : 1° *est bornée dans* E; 2° *y atteint au moins une fois sa limite supérieure.*

» IV. Le théorème précédent faisant jouer un rôle important à la notion d'ensemble compact, il y a lieu d'étudier les propriétés d'un tel ensemble. On y parvient plus facilement au moyen de la proposition suivante :

» *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble* E *soit compact est que tout ensemble* E_1 *formé d'une infinité d'éléments distincts contenu dans* E *donne lieu à un élément limite au moins.*

» La définition montre aussi que les ensembles compacts jouissent de propriétés analogues à celles des ensembles limités de points de l'espace. En particulier, tout ensemble formé d'un nombre fini d'éléments distincts est compact, tout ensemble formé d'un nombre fini d'ensembles compacts est lui-même compact, tout ensemble contenant un ensemble non compact est non compact,

» Ce rapprochement s'explique lorsqu'on remarque que, en prenant comme éléments les points d'une droite par exemple, et en adoptant la définition ordinaire de la limite d'une suite de points, on trouve que *tout ensemble limité de points d'une droite est un ensemble compact*. Un intervalle (où les extrémités sont comprises) sera un ensemble compact et fermé. On retrouve ainsi le cas particulier de Weierstrass que nous avons rappelé. Le même théorème s'étend à l'espace à un nombre fini de dimensions. On peut prouver qu'il s'étend encore (en choisissant convenablement la définition de la limite) à l'espace à une infinité dénombrable de dimensions. Ces propositions, d'apparence bien abstraite, comportent de nombreuses applications. »

14 Zur Aufklärung des Zusammenhangs zwischen Auswahlsatz und Überdeckungssatz:

Aus: F. Fréchet, *Sur quelques points du calcul fonctionel*. Rend. Circ. Matem. Palermo 22 (1806), 1-74 (Thèse).

classe normale (V) = etwas allgemeinere Begriffsbildung als die eines vollständigen, separierten, perfekten metrischen Raumes.

extremal = folgenkompakt.

Aus: p.26:

42. Théorème.—*Soit E un ensemble d'éléments d'une classe normale (V). Pour que de toute famille H* dénombrable ou non *) *d'ensembles I tels que tout élément de E soit intérieur au sens étroit à au moins l'un d'eux, on puisse extraire un nombre fini d'ensembles I formant une famille G jouissant de la même propriété que H, il faut et il suffit que E soit extrémal.*

*) Dans le cas où *E* est un ensemble linéaire, on obtient la généralisation du théorème de M. Borel (voir la note du n° 36) étendu par M. Lebesgue au cas où la famille *H* est non dénombrable. Sa démonstration (iv, page 105) ne se généralise pas au cas actuel.

Der *Begriff* des metrischen Raumes stammt von Fréchet, die *Bezeichnung* von Hausdorff. Fréchet führt in der oben betrachteten Situation den Begriff der Totalstetigkeit ein und vergleicht ihn mit der Folgenkompaktheit. Zu einer vergleichenden Würdigung der Beitrage von Fréchet und Häusdorff vgl. [12]

15 Zur Aufklärung des Zusammenhangs zwischen Auswahlsatz und Überdeckungssatz.

Aus: F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig 1914. (Erste Auflage).

Kapitel VII: Punktmengen in allgemeinen Räumen. Zunächst u.a. Einführung der Begriffsbildung des separierten topologischen Raumes E. ("Häusdorffsche Umgebungsaxiome").

DEF.: 1º x heiβt Häufungspunkt einer Menge M $\subset$ E, wenn in jeder Umgebung von x unendlich viele Punkte von M liegen.

2º Gebiet:= offene Menge.

§4 Divergente, kompakte, konvergente Mengen.

aus p. 230-231:

Eine unendliche Menge ohne Häufungspunkt nennen wir divergent;[1] das ist ein Spezialfall einer unendlichen isolierten Menge ($\mathfrak{D}(A, A_\beta) = 0$). Im euklidischen Raume ist z. B. die Menge der ganzzahligen Punkte divergent; die Menge der Punkte, deren Koordinaten die Reziproken ganzer Zahlen sind, ist unendlich und isoliert.

Eine Menge ohne divergente Teilmenge nennen wir (nach M. Fréchet) kompakt; dazu rechnen wir natürlich auch die endlichen Mengen inkl. der Nullmenge. Jede unendliche Teilmenge einer kompakten Menge A hat also mindestens einen (nicht notwendig zu A gehörigen) Häufungspunkt. Jede Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt; die Summe endlich vieler kompakter Mengen ist wieder kompakt.[2]

Wir schließen hieran zwei sehr wichtige Sätze, die sich auf kompakte abgeschlossene Mengen beziehen.[3]

I. (Durchschnittssatz von Cantor). Eine absteigende Folge $A_1 \geqq A_2 \geqq \ldots$ kompakter, abgeschlossener, von Null verschiedener Mengen hat einen von Null verschiedenen Durchschnitt.

[2] Im euklidischen Raume, der selbst nicht kompakt ist, wird sich zeigen, daß kompakte und beschränkte Mengen identisch sind (Kap. VIII, § 10).

[3] Diese Mengen nennt M. Fréchet extremal, weil jede in ihnen definierte stetige reelle Funktion beschränkt ist und Extrema (Maximum und Minimum) hat (Kap. IX, § 1).

II. (Satz von Borel). Ist eine kompakte abgeschlossene Menge in der Summe einer Folge von Gebieten enthalten, so ist sie bereits in einer Summe von endlich vielen Gebieten dieser Folge enthalten.

Von diesem Satze gilt eine Art Umkehrung, bei der wir aber statt von einer Folge zunächst von einem beliebigen System oder Komplex von Gebieten sprechen müssen; beide Sätze werden im nächsten Kapitel eine Verschärfung erfahren.

III. (Umkehrung des Borelschen Satzes). Wenn für jedes System von Gebieten, in deren Summe die Menge A enthalten ist, A bereits in einer Summe von endlich vielen Gebieten dieses Systems enthalten ist, so ist A kompakt und abgeschlossen.

Kapitel VIII: Punktmengen in speziellen Raumen.

§3 das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Erfülle E das zweite Abzählbarkeitsaxiom; aus p. 272-273:

Der Borelsche Satz und seine Umkehrung (Kap. VII, § 4, II III) können hiernach dahin verschärft werden, daß im ersten die Folge von Gebieten durch ein beliebiges System von Gebieten, im zweiten umgekehrt das System durch eine Folge ersetzt werden darf. Sie lauten also dann:

VI (Satz von Borel). Ist eine kompakte abgeschlossene Menge in der Summe eines beliebigen Systems von Gebieten enthalten, so ist sie bereits in einer Summe von endlich vielen Gebieten dieses Systems enthalten.

VII (Umkehrung des Borelschen Satzes). Wenn für jede Folge von Gebieten, in deren Summe die Menge A enthalten ist, A bereits in einer Summe von endlich vielen Gebieten dieser Folge enthalten ist, so ist A kompakt und abgeschlossen.

§8. Metrische Raüme: Bedingungen für kompakte Mengen.

aus p. 311 ff:

Jedenfalls aber ist, wie wir gleich sehen werden, für eine kompakte Menge die Bedingung der Beschränktheit und sogar eine noch schärfere notwendig. Wir wollen eine Menge total beschränkt nennen, wenn sie für jedes positive ϱ in einer Summe endlich vieler Kugeln vom Radius ϱ enthalten ist.

II. Jede kompakte Menge ist total beschränkt.

Wir nennen $(a_1, a_2, \ldots)$ eine Fundamentalfolge, wenn für jedes positive ϱ fast alle Punkte in einer Kugel vom Radius ϱ liegen, wenn also für jedes ϱ ein Punkt x und eine Zahl n existiert derart, daß $a_n, a_{n+1}, \ldots$ von x eine Entfernung $< \varrho$ haben. Alle diese Punkte haben dann voneinander eine Entfernung $< 2\varrho$, und wir können eine Fundamentalfolge also auch durch die zweite Bedingung definieren[1]: für jedes positive ϱ soll eine Zahl n existieren so, daß $\overline{a_p a_q} < \varrho$ für $p \geqq n$, $q \geqq n$. Wie oben sieht man, daß eine konvergente Folge eine Fundamentalfolge ist, und umgekehrt eine Fundamentalfolge nur konvergent oder divergent sein kann. Eine leichte Überlegung formt IV in den Satz um:

V. Damit jede total beschränkte Menge kompakt sei, ist die Konvergenz jeder Fundamentalfolge notwendig und hinreichend.

16 Zur Aufklärung des Zusammenhangs zwischen Auswahlsatz und Überdeckungssatz:

Aus: P. Alexandroff und Paul Urysohn, *Zur Theorie der topologischen Raüme*. Math. Ann 92 (1924), 258-266.

Zur Theorie der topologischen Räume.

Von

Paul Alexandroff und Paul Urysohn † in Moskau.

Ein topologischer Raum $\mathfrak{R}$ entsteht, wenn wir in einer Menge E (die ganz abstrakt gegeben sein kann) gewisse Teilmengen, die *Umgebungen* ihrer sämtlichen Punkte, derart definieren, daß die bekannten vier Hausdorffschen Umgebungsaxiome[1]) damit zur Geltung gebracht werden. Ein topologischer Raum kann gleichzeitig durch verschiedene Umgebungssysteme definiert werden, die dann aber notwendig *gleichwertig*[2]) sind. Auch umgekehrt definieren, unserer Fassung nach, gleichwertige Umgebungssysteme stets einen einzigen topologischen Raum. Dieser Punkt scheint uns methodologisch von großer Wichtigkeit zu sein, wir dürfen aber hier nicht weiter auf ihn eingehen — wir wollen hier nur eine kurze Übersicht der Hauptergebnisse unserer Untersuchungen im Gebiete der allgemeinen Topologie angeben; für eine genaue Durchführung der Beweise sowie auch für die Konstruktion der zahlreichen Beispiele verweisen wir deshalb auf eine Arbeit, die bald in der Zeitschrift „Fundamenta Mathematicae" erscheinen soll.

1. Unter allen topologischen Räumen spielen, wie bekannt, die kompakten[3]) Räume eine besonders wichtige Rolle. Falls wir einen jeden der Relation[4])

$$|U(\xi)\cdot\mathfrak{M}| = |\mathfrak{M}|$$

genügenden Punkt ξ des Raumes $\mathfrak{R}$ als *vollständigen Häufungspunkt* der im Raume $\mathfrak{R}$ gelegenen Menge $\mathfrak{M}$ bezeichnen, besteht ersichtlich folgender

[1]) Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Kap. VII, S. 213.

[2]) Hausdorff, loc. cit., S. 260.

[3]) Hausdorff, loc. cit., S. 230; ein kompakter Raum ist natürlich in sich kompakt.

[4]) Wir bezeichnen durch $U(\xi)$ eine jede willkürlich gegebene Umgebung des Punktes ξ im Raume $\mathfrak{R}$, durch $A\cdot B\cdot C\ldots$ bzw. ΠA_n den Durchschnitt der Mengen $A, B, C, \ldots$ bzw. der Mengen A_n, durch $A+B+C\ldots$ bzw. ΣA_n die Vereinigungsmenge der (nicht notwendig elementefremden) Mengen $A, B, C, \ldots$ bzw. A_n; die Mächtigkeit der Menge $\mathfrak{M}$ soll stets mit $|\mathfrak{M}|$ bezeichnet werden.

Satz I_0. — *Damit der topologische Raum $\mathfrak{R}$ kompakt sei, ist eine jede (und folglich alle drei) der folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:*

A_0. Eine jede abzählbare im Raume $\mathfrak{R}$ gelegene Menge $\mathfrak{M}$ besitzt daselbst einen vollständigen Häufungspunkt.

B_0. Eine abzählbare absteigende Folge (in $\mathfrak{R}$) abgeschlossener von Null verschiedener Mengen hat einen von Null verschiedenen Durchschnitt.

C_0. Ist der Raum $\mathfrak{R}$ in der Summe einer abzählbaren Menge von Gebieten enthalten, so ist er bereits in einer Summe von endlich vielen Gebieten dieser selben Menge enthalten.

Nun läßt sich folgender Satz beweisen:

Satz I. *Folgende drei Eigenschaften A, B, C sind untereinander äquivalent (d. h. ein jeder topologischer Raum $\mathfrak{R}$, der irgendeine von diesen Eigenschaften hat, besitzt auch die beiden anderen):*

A. Eine jede im Raume $\mathfrak{R}$ gelegene unendliche Menge $\mathfrak{M}$ besitzt einen vollständigen Häufungspunkt.

B. Eine jede wohlgeordnete absteigende Menge[5]) abgeschlossener von Null verschiedener Mengen hat einen von Null verschiedenen Durchschnitt.

C. Ist der Raum $\mathfrak{R}$ in der Summe eines Systems (beliebiger Mächtigkeit) von Gebieten enthalten, so ist er bereits in einer Summe von endlich vielen Gebieten dieses Systems enthalten[5a]).

Die Äquivalenz ($B \sim C$) läßt sich durch formale Betrachtung von Produkt-, Summen- und Differenzbildungen ohne wesentliche Schwierigkeiten beweisen.

Indem wir mit dem Zeichen $\rightarrow$ das Wort „folgt" ersetzen, beweisen wir zunächst, daß $C \rightarrow A$; vorausgesetzt, es sei nicht der Fall, es existiere also eine unendliche Menge $\mathfrak{M}$ und eine gewisse Umgebung $U_0(x)$ eines jeden Punktes x des Raumes $\mathfrak{R}$, so daß

$$|\mathfrak{M} \cdot U_0(x)| < |\mathfrak{M}|$$

ist, so gelangen wir sofort zu einem Widerspruch: der ganze Raum ist nämlich zufolge der Eigenschaft C bereits in der Summe einer endlichen Anzahl von Gebieten $U_0(x)$ enthalten, und die Menge $\mathfrak{M}$ erscheint als Vereinigung endlich vieler Mengen $U_0(x) \cdot \mathfrak{M}$ von kleineren Mächtigkeiten, was offenbar unmöglich ist.

---

5) Diese Menge wird nachher mit $\mathfrak{S}$ bezeichnet.

5a) In verschiedenen anderen Voraussetzungen (nicht in topologischen Räumen) sind analoge Sätze von Moore (Proc. Nat. Ac. Sciences 5, 1919), Fréchet (Ann. Ec. Norm, 1921), Sierpiński (Fund. Math. 2) u. A. bewiesen worden.

SEKUNDÄRLITERATUR

[1] Aleksandrov, P.S. and Fedorchuk, V.V., *The main aspects in the development of set-theoretic topology*. Russian Math. Surveys 33:3 (1978), 1-53.

[2] Dugac, P., *Eléments d'analyse de Karl Weierstrass*. Archive Hist. Exact Sci. 10 (1973), 41-176.

[3] Pier, Jean-Paul , *Genèse et évolution de l'idée de compact*. Revue d'Histoire des sciences et de leurs applications **14** (2) (1961), 169-179.
[4] Pier, Jean-Paul , *Historique de la notion de compacticité*. Historia Mathematica 7 (1980), 425-443.
[5] Schoenflies, A., *Mengenlehre*, Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. I.A.5. 1898.
[6] Schoenflies, A., *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*. Bericht erstattet der DMV. Jb. DMV **8** (1900).
[7] Schoenflies, A., *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*. Bericht erstattet der DMV. 2. Teil. Leipzig 1908.
[8] Schoenflies, A., *Sur un théorème de Borel*. Comptes Rendues Acad. Sci. Paris **144** (1907), 22-23.
[9] Schoenflies, A., *Die Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen*. Leipzig und Berlin 1913.
[10] Siegmund-Schultze, R., *Die Anfänge der Funktionalanalysis und ihr Platz im Umwälzungsprozess der Mathematik um 1900*. Archive Hist. Exact. Sci. 26 (1982), 13-71.
[11] Stolz, O., *B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung*. Math. Ann. 18 (1881), 255-279.
[12] Taylor, A.E., *A study of Maurice Fréchet: I. His early work on point set theory and the theory of functionals*. Archive Hist. Exact Sci. 27 (1982), 237-295.
[13] Zoretti, L., und Rosenthal, A., *Die Punktmengen*. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. II.C.9. a. 1923-27.
[14] Hawkins, T., *Lebesgue's theory of integration, its origins and development*, Madison, Milwaukee, and London, 1970.

* *

Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Fachbereich 17, Mathematik
Postfach 3980, Saarstrasse 21
6500 Mainz, ALEMANIA FEDERAL.

(Recibido en Septiembre de 1986).