Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXI (1987), págs. 135-140

OPERADORES PARANORMALES

por

Duggirala RAO

§1. Introducción. Un operador Y en B(H) se llama *paranormal* (abreviadamente p.n.) si

$$\|Tx\|^2 \leqslant \|T^2x\|\,\|x\|$$

para todo $x \in H$, donde H es un espacio de Hilbert.

Los operadores paranormales fueron introducidos, con el nombre de "operadores de clase [N]", por Istratescu, Saito y Yoshino [5]. Los operadores *quasihiponormales* fueron introducidos por Devi [2]. Un operador T se llama quasihiponormal (abreviadamente q.h.n.) si

$$\|T^*Tx\| \leqslant \|T^2x\|$$

para todo $x \in H$. Ambas clases son generalizaciones de los operadores *hiponormales* (abreviadamente h.n.), caracterizados por la desiguadad:

$$\|T^*x\| \leqslant \|Tx\|$$

para todo $x \in H$.

Se sigue de las definiciones que

$$T \text{ es h.n.} \Rightarrow T \text{ es q.h.n.} \Rightarrow T \text{ es p.n.}$$

Los operadores quasihiponormales pueden ser caracterizados en términos de formas quadráticas: T es q.h.n. sí y solamente si

$$T^{*2}T^2 - (T^*T)^2 \geqslant 0\cdot$$

Los operadores paranormales no cumplen la desigualdad anterior. Sin embargo, Ando demostró [1]: T es p.n. si y solamente si para cada número real

$$(T^*)^2T^2 - 2\lambda T^*T + \lambda^2 \geqslant 0.$$

En este artículo contestaremos las siguientes preguntas:

1) Si T es p.n. ¿es necesario que $T - \alpha$ sea p.n. para cada número complejo α? (Stampfli [6]).
2) ¿Los operadores p.n. son convexoides? (Furuta [3]).
3) ¿Los puntos extremos de la clausura del rango numérico de un operador p.n. pertenecen al espectro puntual?

Anotamos que en el caso de un operador h.n. la respuesta para todas estas preguntas es afirmativa.

§2. Proposiciones útiles.

En esta sección presentaremos dos resultados que facilitan la construcción de ejemplos concretos de operadores. La proposición 2.1 exhibe una caracterización útil de los operadores q.h.n. y la proposición 2.2. localiza el espectro de un operador en términos de la restricción del operador a su rango.

PROPOSICION 2.1. *Sea* $T \in B(H)$, $M = \overline{R(T)}$, $N = N(T^*)$, $A = T/M$ *y* $B = T/N$. *Entonces* T *es* q.h.n. *si y solamente si* A *es* h.n. $(B(M))$ *y* B^* *(en* $B(M,N)$*) cumple la desigualdad*

$$\|B^*x\|^2 \leqslant \|Ax\|^2 - \|A^*x\|^2 \tag{2.1}$$

para todo $x \in M$.

Demostración. T q.h.n. $\Leftrightarrow \|T^*TZ\| \leqslant \|T^2Z\|$ para todo $Z \in H \Leftrightarrow \|T^*x\| \leqslant \|Tx\|$ para todo $x \in M \Leftrightarrow A$ es h.n. Observemos que $H = M \oplus N$, y $T^*(Z \oplus 0) = A^*Z + B^*Z$ para $Z \in M$.

Si T es q.h.n. entonces $\|T^*(Z \oplus 0)\|^2 \leqslant \|T(Z \oplus 0)\|^2$, para todo $Z \in M$, por tanto $\|A^*Z\|^2 + \|B^*Z\|^2 \leqslant \|T(Z \oplus 0)\|^2 = \|AZ\|^2$.

PROPOSICION 2.2. *Sea* $T \in B(H)$ *y* $S = T \mid \overline{R(T)}$. *Entonces*

$$\mathrm{Co}\ \sigma(T) \subset \mathrm{Co}\ \{\sigma(S) \cup \{0\}\} \tag{2.2}$$

donde $\sigma(T)$ *es el espectro de* T *y* $\mathrm{Co}(L)$ *es la envolvente convexa del conjunto* L.

Demostración. Es suficiente demostrar que el espectro aproximado de T, $\sigma_{ap}(T)$, es un subconjunto de $\sigma(S) \cup \{0\}$. Sea $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$. Entonces existe una sucesión $\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$ tal que $\|Tx_n - \lambda x\| \to 0$. Sea $x_n = y_n + z_n$, $y_n \in M$, $z_n \in N$. Se tiene:

$$\|Tx_n - \lambda x_n\|^2 = \|\{T(y_n + z_n) - \lambda y_n\} - \lambda z_n\|^2$$

$$= \|T(y_n + z_n) - \lambda y_n\|^2 + |\lambda|^2 \|z_n\|^2,$$

pues $y_n \in M$. Entonces $\lambda \neq 0$ implica $\|z_n\| \to 0$. Como $T \in B(H)$ se sigue que $\|Tz_n\| \to 0$. Así, tenemos que

$$\|Ty_n - \lambda y_n\| \to 0.$$

Ahora, $\|x_n\| = 1$, $\|z_n\| \to 0$ implica $\|y_n\| \to 1$.

§3. Contraejemplos.

La desigualdad (2.1) nos dá una respuesta inmediata a la pregunta 1). Sea α un número complejo, $x \in M$. Para que $T-\alpha$ sea q.h.n. necesitaremos

$$\|(B^* - \alpha I)x\|^2 \leqslant \|(A - \alpha I)x\|^2 - \|(A^* - \alpha I)x\|^2$$

Nótese que

$$\|(A-\alpha I)x\|^2 - \|(A^*-\alpha I)x\|^2 = \|Ax\|^2 - \|A^*x\|^2.$$

Entonces la desigualdad (2.1) no se cumple para α arbitrario.

Consideremos el siguiente ejemplo para contestar negativamente a la pregunta 2).

Sea $M = \ell^2$, $N = \mathbb{R}^2$. Sea $A = S+I$, donde $S:M \to M$ está definida por

$$S(f_1,f_2,\ldots) = (0,\frac{f_1}{2},f_2,f_3,\ldots)$$

y $B:N \to M$ esta definida por

$$B(f_1,f_2) = (\alpha f_2,\beta f_1,0,0,\ldots).$$

Sea $f \in M$, $f = (f_1,f_2,f_3,\ldots)$. Entonces tenemos que

$$\|Af\|^2 - \|A^*f\|^2 = \frac{1}{4}|f_1|^2 + \frac{3}{4}|f_2|^2.$$

También podemos ver que $\|B^*f\|^2 = |\beta|^2|f_1|^2 + |\alpha|^2|f_2|^2$.

Tomando $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, tenemos

$$\|B^*f\|^2 = \|Af\|^2 - \|A^*f\|^2$$

y consecuentemente T es q.h.n. por la proposición 2.1.

Se sabe que $\sigma(S) = \{Z \in \mathbb{C}, |Z| \leqslant 1\}$. Así, $(A) = \{Z \in \mathbb{C}, |Z-1| \leqslant 1\}$. Podemos concluir que

$$\mathrm{Co}\,\sigma(T) \subset \{Z \in \mathbb{C}, \|Z-1\| \leqslant 1\}.$$

Entonces Co $\sigma(T)$ no contiene ningún número complejo Z con $\mathrm{Re}(Z) < 0$. Ahora demostraremos que el rango numérico de T, W(T) contiene un número complejo Z con $\mathrm{Re}(Z) < 0$. Así, queda demostrado que T no es convexoide.

Sea

$$x = \left(\tfrac{1}{2},0,0,0,\dots\right) \oplus \left(0,\ -\tfrac{3}{2}\right),$$

entonces

$$Tx = \left(-\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},0,\dots \quad + (0,0),\ \|x\| = 1$$

$(Tx,x) = -\frac{1}{8} \in W(T)$.

Podemos contestar negativamente la pregunta 3) fácilmente con el ejemplo anterior. Sea $Z \in \overline{W(T)}$, $\mathrm{Re}Z \leqslant \mathrm{Re}Z'$ para todo $Z' \in W(T)$. Es evidente que Z es un punto extremo de $\overline{W(T)}$, y $Z \notin \sigma(T)$.

Concluimos esta sección con la siguiente pregunta: ¿Existe un operador p.n.T, con $\overline{R(T)} = H$, y T no es inyectiva (es decir, en el estado espectral II_3, ver [4])?

REFERENCIAS

[1] Ando, T., *Operators with a norm condition*. Acta Sci. Math. (Szeged) **33** (1972) 169-178.

[2] Devi, S., *A new class of operators*. Indian Math. Soc. Conference (1972) Abstract Nº 166.

[3] Furuta, T., *On the class of paranormal operators*. Proc. Jap. Acad. **43** (1967) 594-598.

[4] Gustafson, K. and Rao, D., *Spectral of equasihyponormal and paranormal operators*. (no publicado).

[5] Istratescu, V., Saito, T. and Yoshino, T., *On a class of operators*. Tohoku Math. J. (18) (1966) 410-413.

[6] Stampfli, J.G., *On hyponormal and Toeplitz operators*. Math. Ann. **183** (1969) 328-336.

*

Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle
Apartado Aéreo 2188
Cali, Colombia.

(Recibido en septiembre de 1986).