PROBLEMAS PROPUESTOS

Los problemas son señalados por cero, uno o dos asteriscos según su grado de dificultad. Las soluciones de los problemas deben ser enviadas a REVISTA DE MATEMÁTICAS ELEMENTALES, Universidad de los Andes, calle 18-A, carrera 1-E, Bogotá, Colombia, antes del 31 de marzo de 1954. La solución a cada problema debe venir en hoja por separado. Los alumnos de bachillerato deben enviar, junto con las soluciones, el nombre del colegio y de su profesor de matemáticas.

50. ¿Cuáles son los números naturales que no se pueden escribir como suma de varios números naturales consecutivos?

51. ¿Cuáles son los números naturales que se pueden escribir como suma de por lo menos tres números naturales consecutivos?

52. Resolver la ecuación

$$16x^4 + 16x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0.$$

*53. Sean a_1 y a_2 dos números reales y para $n \geqslant 3$ sea a_n definida por la fórmula recursiva

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$$

Demostrar que la sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ es convergente.

54. Demostremos que si α es un ángulo entre 0° y 180°, entonces la expresión

$$sen\ \alpha + \frac{sen\ 2\alpha}{2} + \frac{sen\ 3\alpha}{3}$$

es siempre positiva.

55. Sea ABC un triángulo rectángulo y $AB = c$ su hipotenusa. Dividamos AB en tres partes iguales con los puntos C_1 y C_2. Demostrar que

$$\overline{CC_1}^2 + \overline{C_1C_2}^2 + \overline{C_2C}^2 = \frac{2}{3}\ c^2.$$

56. Entre todos los triángulos rectángulos que tienen el mismo perímetro, ¿cuál tiene la hipotenusa más pequeña?

57. Consideremos en el plano cuatro líneas rectas, de las cuales dos siempre se cortan, pero tres no tienen jamás un punto común. Estas cuatro rectas determinan cuatro triángulos. Demostrar que los cuatro círculos circunscritos a estos triángulos tienen un punto en común.

58. Sea $ABCD$ una pirámide regular, cuyas cuatro caras son triángulos equiláteros con lado a.

a) Calcular la superficie S y el volumen V de la pirámide en función de a.

b) El punto medio M de AD y la arista BC determinan un plano. Demostrar que este plano divide la pirámide en dos pirámides iguales.

c) Calcular el área del triángulo MBC en función de a.

(Bachillerato, 1ª parte, Lille, Francia, 1948).