Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXI (1987), págs. 167-186

ESPACES DE FONCTIONS LOCALEMENT INTEGRABLES ET DE FONCTIONS INTEGRABLES A SUPPORT COMPACT

par

Jean HORVATH

Dans ce travail, je me propose de faire une étude systématique des espaces mentionnés dans le titre. Une bonne partie des résultats ci-dessous sont "bien connus" (voir p.ex. [5], 33-34) mais, autant que je sache, il n'existe aucune référence facilement accessible pour leurs démonstrations.

§1. *Les* espaces $\mathcal{L}^p_{loc}$ et $\mathcal{L}^p_c$. Nous nous plaçons, une fois pour toutes, sur un espace localement compact T que nous supposerons dénombrable à l'infini pour simplifier. Nous désignons par μ une mesure positive sur T. Nous utilisons en général la terminologie et les notations du traité de N. Bourbaki [1,2]. Cependant, lorsque p est un nombre réel tel que $1 \leqslant p < \infty$, et F est un espace de Banach, nous désignons par $\mathcal{L}^p(T,\mu;F)$, et non pas par $\mathcal{L}^p_F(T,\mu)$, l'espace des fonctions $\mathbf{f}$ définies sur T, à valeurs dans F, de puissance p-ième μ-intégrable ([2], Chap.IV, §3,Nº 4, Définition 2), c.-à-d. μ-mesurables et telles que

$$N_p(\mathbf{f}) = \left(\int^* |\mathbf{f}|^p d\mu\right)^{1/p} < \infty$$

([2], Chap.IV,§5, Nº6, Théorème 5). Muni de la semi-norme N_p, l'espace $\mathcal{L}^p(T,m;F)$ est en général non-séparé, mais complet ([2], Chap.IV,§3, N°4, Théorème 2).

PROPOSITION 1. *Soit* F *un espace de Banach,* p *un nombre réel tel que* $1 \leqslant p\ \infty$, *et* **f** *une fonction définie sur* T *à valeurs dans* F. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

a) *Pour tout point* $t \in T$ *il existe un voisinage ouvert* V *de* t *tel que* $\phi_V \mathbf{f}$ *appartient a* $\mathcal{L}^p(T,\mu;F)$ *(ici* ϕ_V *est la fonction caractéristique de* V*).*

b) *La fonction* **f** *est* μ*-mesurable et, pour tout sous-ensemble compact* K *de* T, *on a*

$$\int_K |\mathbf{f}|^p d\mu = \int \phi_K |\mathbf{f}|^p d\mu < \infty$$

(pour la notation voir [2], Chap.V,§5, N°3, Exemple).

c) *Pour toute fonction numérique continue à support compact* $h \in \mathcal{K}(T)$, *la fonction* **hf** *appartient a* $L^p(T,\mu;F)$. (Pour p = 1 comparer avec [2], Chap.V,§5, N°1, Proposition 1).

Démonstration. a)⇒ b): Si la fonction $\phi_V \mathbf{f}$ appartient a $\mathcal{L}^p(T,\mu;F)$, alors elle est μ-mesurable, donc **f** est μ-mesurable en vertu du principe de localisation ([2], Chap.IV, §5, N°2, Proposition 4). D'autre part, pour tour $t \in K$ il existe un voisinage ouvert V_t de t tel que $\phi_{V_t}\mathbf{f}$ est de puissance p-ième intégrable. L'ensemble K peut être couvert par une sous-famille finie V_j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ de ces voisinages et, comme

$$\phi_K |\mathbf{f}|^p \leqslant \sum_{j=1}^{k} \phi_{V_j} |\mathbf{f}|^p ,$$

on a $\int^* \phi_K |\mathbf{f}|^p d\mu < \infty$.

b)⇒ c): Si f est mesurable, alors **hf** l'est aussi d'après le Corollaire 5 du Théorème 1 de [2], Chap.IV,§5, N°3. D'autre part, posons K = Supp h. Alors $|\mathbf{hf}| \leqslant M\phi_K|\mathbf{f}|$, où $M = \max|h(t)|$, donc $\int^* |\mathbf{hf}|^p d\mu < \infty$. Par conséquent **hf** appartient a $\mathcal{L}^p(T,\mu;F)$.

c)$\Rightarrow$a): Soit $t \in T$ et soit V un voisinage ouvert, relativement compact de t. Il existe une fonction $h \in \mathcal{K}(T)$ telle que $0 \leqslant h(t) \leqslant 1$ et $h(t) = 1$ pour $t \in V$ ([2], Chap. III, 2^e éd.§1,N°2, Lemme 1). La fonction $h\mathbf{f}$ est de puissance p-ième intégrable par hypothèse, donc $\phi_V\mathbf{f} = \phi_V h\mathbf{f}$ est mesurable et $N_p(\phi_V\mathbf{f}) \leqslant N_p(h\mathbf{f}) < \infty$, d'où $\phi_V\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p(T,\mu;F)$. ▲

DÉFINITION 1. *On dit qu'une fonction* $\mathbf{f}:T \to F$, *qui satisfait au trois conditions équivalentes de la Proposition 1, est de puissance* p*-ième localement intégrable. Quand* $p=1$, *on dit aussi que* $\mathbf{f}$ *est localement intégrable.*

L'ensemble des fonctions $\mathbf{f}:T \to F$ de puissance p-ième localement intégrable forme évidemment un espace vectoriel noté $\mathcal{L}^p_{loc}(T,\mu;F)$; lorsque $F = \mathbf{R}$ où $\mathbf{C}$, la mention de F est souvent omise s'il n'y a pas d'ambiguïté (cf. [2], Chap.V, §5,N°1). Nous munissons cet espace de la topologie localement convexe définie par la famille de semi-normes

$$\mathbf{f} \to N_p(\phi_K\mathbf{f}) = \left(\int_K |\mathbf{f}|^p d\mu\right)^{1/p}$$

où K parcout l'ensemble des sous-ensembles compacts de T. On obtient la même topologie si l'on laisse K parcourir seulement une suite (K_j) de sous-ensembles compacts de T telle que $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$ pour tout j et $\bigcup_j K_j = T$. Ainsi la topologie de $\mathcal{L}^p_{loc}(T,\mu;F)$ peut être définie par une famille dénombrable de semi-normes. On a $\mathcal{L}^p(T,\mu;F) \subset \mathcal{L}^p_{loc}(T,\mu;F)$, et l'injection canonique $\mathcal{L}^p(T,\mu;F) \to \mathcal{L}^p_{loc}(T,\mu;F)$ est continue puisque $N_p(\phi_K\mathbf{f}) \leqslant N_p(\mathbf{f})$ pour tout ensemble compact $K \in T$.

Une fonction à valeurs dans F définie presque partout dans T pour la mesure μ (resp. une fonction à valeurs dans $\bar{\mathbf{R}}$) sera dite d'avoir une puissance p-ième localement intégrable si elle est égale μ-presque partout à une fonction qui appartient à $\mathcal{L}^p_{loc}(T,\mu;F)$ (resp. à $\mathcal{L}^p_{loc}(T,\mu;\mathbf{R})$).

DÉFINITION 2. *Une fonction* $\mathbf{f}:T \to F$ *est localement bor-*

née en mesure si pour tout sous-ensemble compact K *de* T, *le maximum en mesure* $M_\infty(\phi_K|\mathbf{f}|)$ ([2],Chap.IV, §6,N° 2, déf.1) *de la restriction de* $|\mathbf{f}|$ *à* K *est fini*.

On désigne par $\mathcal{L}^\infty_{loc}(T,\mu;F)$ l'espace des fonctions μ-mesurables, localement bornées en mesure. Une fonction μ-mesurable $f:T \to F$ appartient à $\mathcal{L}^\infty_{loc}(T,\mu;F)$ si et seulement si tout point de T a un voisinage mesurable où $|\mathbf{f}|$ est bornée en mesure. Nous munissons $\mathcal{L}^\infty_{loc}(T,\mu;F)$ de la topologie localement convexe définie par la famille de semi-normes $\mathbf{f} \to N_\infty(\phi_K\mathbf{f}) = M_\infty(\phi_K|\mathbf{f}|)$, où K parcourt les sous-ensembles compacts de T, ou seulement une suite (K_j) de sous-ensembles compacts telle que $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$ et $\bigcup_j K_j = T$. Par conséquent la topologie de $\mathcal{L}^\infty_{loc}(T,\mu;F)$ peut être définie par une famille dénombrable de semi-normes. On a encore $\mathcal{L}^\infty(T,\mu;F) \subset \mathcal{L}^\infty_{loc}(T,\mu;F)$, et l'injection canonique est continue puisque $N_\infty(\phi_K\mathbf{f}) \leqslant N_\infty(\mathbf{f})$ pour tout ensemble compact $K \subset T$. Il résulte du Corollaire de la Proposition 5 de [2], Chap.IV,§6, N°5 que, si $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, alors $\mathcal{L}^\infty_{loc}(T,\mu;F) \subset \mathcal{L}^q_{loc}(T,\mu;F) \subset \mathcal{L}^p_{loc}(T,\mu;F) \subset \mathcal{L}^1_{loc}(T,\mu;F)$, et les injections canoniques sont continues.

Une fonction à valeurs dans F, définie presque partout par rapport à μ dans T, est localement bornée en measure si elle est égale presque partout à une fonction partout définie localement bornée en mesure. Une fonction $\mathbf{f}$ à valeurs dans $\bar{R}$ est localement bornée en mesure si $M_\infty(\phi_K|\mathbf{f}|)$ est fini pour tout ensemble compact $K \subset T$.

Soit maintenant p un nombre réel tel que $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et K un sous-ensemble compact de T. Nous désignons par $\mathcal{L}^p_K(T,\mu;F)$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p(T,\mu;F)$ dont le support est contenu dans K. Nous munissons $\mathcal{L}^p_K(T,\mu;F)$ de la topologie induite par $L^p(T,\mu;F)$; c.-à.d. définie par la seule semi-norme $f \mapsto N_p(\mathbf{f})$. Si K et L sont deux sous-ensembles compacts de T tels que $K \subset L$, alors l'injection canonique $\mathcal{L}^p_K(T,\mu;F) \subset \mathcal{L}^p_L(T,\mu;F)$ est un isomorphisme du premier espace sur un sous-espace vectoriel du second; ce sous-espace est complet, comme nous le verrons au cours de la démonstration du Théorème 1, mais il n'est pas nécessairement fermé, puisqu'une suite dans $\mathcal{L}_K^p(T,\mu;F)$ qui converge vers une fonction **f** converge aussi vers toute fonction égale à **f** presque partout.

On note $\mathcal{L}_c^p(T,\mu;F)$ le sous-espace de $\mathcal{L}^p(T,\mu;F)$ qui consiste de toutes les fonctions à support compact de cet espace, c.-à-d.

$$\mathcal{L}_c^p(T,\mu;F) = \bigcup_K \mathcal{L}_K^p(T,\mu;F),$$

où K parcourt les sous-ensembles compacts de T. Npus munissons $\mathcal{L}_c^p(T,\mu;F)$ de la topologie localement convexe la plus fine rendant continues les injections canoniques $\mathcal{L}_K^p(T,\mu;F) \to \mathcal{L}_c^p(T,\mu;F)$. Si (K_j) est une suite de sous-ensembles compacts de T tels que $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$ et $\bigcup_j K_j = T$, alors on a aussi

$$\mathcal{L}_c^p(T,\mu;F) = \bigcup_j \mathcal{L}_{K_j}^p(T,\mu;F)$$

et la topologie de $\mathcal{L}_c^p(T,\mu;F)$ est aussi la topologie localement convexe la plus fine qui rend continues les injections canoniques

$$\mathcal{L}_{K_j}^p(T,\mu;F) \to \mathcal{L}_c^p(T,\mu;F),$$

donc $\mathcal{L}_c^p(T,\mu;F)$ est la limite inductive stricte ([1], II,p. 36) de la suite $(\mathcal{L}_{K_j}^p(T,\mu;F))_{j\in\mathbf{N}}$.

On a $\mathcal{L}_c^p(T,\mu;F) \subset \mathcal{L}^p(T,\mu;F)$, et l'injection canonique est continue d'après la Proposition 5 (ii) de [1], II, p.29. Si $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, alors le Corollaire de la Proposition 5 de [2], Chap.IV,§6, Nº 5, entraîne que

$$\mathcal{L}_K^\infty(T,\mu;F) \subset \mathcal{L}_K^q(T,\mu;F) \subset \mathcal{L}_K^p(T,\mu;F) \subset \mathcal{L}_K^1(T,\mu;F)$$

pour tout compact $K \subset T$, donc aussi

$$\mathcal{L}_c^\infty(T,\mu;F) \subset \mathcal{L}_c^q(T,\mu;F) \subset \mathcal{L}_c^p(T,\mu;F) \subset \mathcal{L}_c^1(T,\mu;F),$$

et les injections canoniques sont continues.

PROPOSITION 2. *Soit* $p \in \bar{R}$ *tel que* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *et soit* q *l'exposant conjugué, c.-à-d.* $1/p+1/q = 1$ *avec* $q = 1$ *lorsque* $p = \infty$. *Soit* F *un espace de Banach,* F' *son dual fort, et* $(\mathbf{z},\mathbf{z}') \mapsto \langle\mathbf{z},\mathbf{z}'\rangle$ *la forme bilinéaire canonique sur* $F\times F'$. *Si* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_{loc}(T,\mu;F)$ *et* $\mathbf{g} \in \mathcal{L}^q_c(T,\mu;F')$, *où si* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_{loc}(T,\mu;F')$ *et* $\mathbf{g} \in \mathcal{L}^q_c(T,\mu;F)$, *la fonction à valeurs scalaires*

$$\langle\mathbf{f},\mathbf{g}\rangle : t \mapsto \langle\mathbf{f}(t),\mathbf{g}(t)\rangle$$

est intégrable.

Démonstration. La fonction $\langle\mathbf{f},\mathbf{g}\rangle$ est mesurable ([2], Chap. IV, §5, N° 3, Corollaire 5 du Théorème 1). D'autre part, soit K un sous-ensemble compact de T tel que Supp $g \subset K$. L'inégalité de Hölder ([2], Chap. IV, §6, N°4, Corollaire 2 du Théorème 2) donne

$$N_1(\langle\mathbf{f},\mathbf{g}\rangle) = N_1(\langle\phi_K\mathbf{f},\mathbf{g}\rangle) \leqslant N_p(\phi_K\mathbf{f})N_q(\mathbf{g}), \tag{1}$$

donc $\langle\mathbf{f},\mathbf{g}\rangle \in \mathcal{L}^1(T,\mu)$. ▲

COROLLAIRE. *La forme bilinéaire*

$$(\mathbf{f},\mathbf{g}) \mapsto \int_T \langle\mathbf{f}(t),\mathbf{g}(t)\rangle d\mu(t) \tag{2}$$

est séparément continue sur

$$\mathcal{L}^p_{loc}(T,\mu;F)\times\mathcal{L}^q_c(T,\mu;F')$$

et sur

$$\mathcal{L}^p_{loc}(T,\mu;F')\times\mathcal{L}^q_c(T,\mu;F)$$

Démonstration. Puisque

$$\left|\int_T \langle\mathbf{f}(t),\mathbf{g}(t)\rangle d\mu(t)\right| \leqslant N_1(\langle\mathbf{f},\mathbf{g}\rangle),$$

l'inégalité (1) montre que (2) est une forme bilinéaire séparément continue sur

$$\mathcal{L}^p_{loc}(T,\mu;F)\times\mathcal{L}^q_K(T,\mu;F')$$

resp. sur

$$\mathcal{L}^p_{loc}(T,\mu;F')\times\mathcal{L}^q_K(T,\mu;F).$$

L'énoncé résulte alors de la Proposition 5 (ii) de [1], II, p.29. ▲

L'espace $\mathcal{C}(T;F)$ des applications continues de T dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^\infty_{loc}(T,\mu;F)$. Lorsqu'on munit $\mathcal{C}(T;F)$ de la topologie de la convergence compacte, l'injection canonique $\mathcal{C}(T;F)\to\mathcal{L}^\infty_{loc}(T,\mu;F)$ est continue puisque pour tout sous-ensemble compact K de T on a

$$N_\infty(\phi_K\mathbf{f}) \leqslant \max_{t\in K}|\mathbf{f}(t)|,$$

quel que soit $\mathbf{f}\in\mathcal{C}(T;F)$.

L'espace $\mathcal{H}(T;F)$ des applications continues à support compact de T dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^\infty_c(T,\mu;F)$. Si l'on munit $\mathcal{H}(T;F)$ de sa topologie de limite inductive ([2],Chap.III, 2e éd.,§1, N°1), alors l'injection canonique $\mathcal{H}(T;F)\to\mathcal{L}^\infty_c(T,\mu;F)$ est continue. En effet, si pour un sous-ensemble compact K de T on note $\mathcal{H}(T,K;F)$ le sous-espace formé des $\mathbf{f}\in\mathcal{H}(T;F)$ tels que Supp $\mathbf{f}\subset K$, alors l'injection canonique $\mathcal{H}(T,K;F)\to\mathcal{L}^\infty_K(T,\mu;F)$ est continue puisque

$$N_\infty(\mathbf{f}) \leqslant \max_t|\mathbf{f}(t)|$$

pour tout $\mathbf{f}\in\mathcal{H}(T,K;F)$.

Rappelons que l'espace $\mathcal{C}^b(T;F)$ des applications continues bornées de T dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^\infty(T,\mu;F)$, et que si l'on munit $\mathcal{C}^b(T;F)$ de la norme $\|\mathbf{f}\| = \sup_{t\in T}|\mathbf{f}(t)|$, alors l'injection canonique $\mathcal{C}^b(T;F)\to\mathcal{L}^\infty(T,\mu;F)$ est continue. De plus, cette application est une isométrie si et seulement si le support de μ est égal a T ([2],Chap.IV, §6,N° 3,Remarque 1). On a un résultat analogue pour les espaces considérés ici:

PROPOSITION 3. *Si le support de* μ *est égal à* T, *les injections canoniques* $\mathcal{C}(T;F) \to \mathcal{L}^{\infty}_{loc}(T,\mu;F)$ *et* $\mathcal{H}(T;F) \to \mathcal{L}^{\infty}_{c}(T,\mu;F)$ *sont des morphismes stricts.*

Démonstration. **(a)** Soit K un sous-ensemble compact de T et L un voisinage compact de K. Soit $\mathbf{f} \in \mathcal{C}(T;F)$ une fonction telle que $q_K(\mathbf{f}) = \max_{t \in T} |\mathbf{f}(t)|$ est > 0 et choisissons un nombre réel β tel que $0 < \beta < q_K(\mathbf{f})$. Il existe un point $t_o \in K$ tel que $|\mathbf{f}(t_o)| > \beta$, et puisque $\mathbf{f}$ est continu, il existe un voisinage ouvert U de t_o contenu dans L tel que $|\mathbf{f}(t)| > \beta$ pour tout $t \in U$. L'hypothèse $\mathrm{Supp}\mu = T$ entraine que $\mu^*(U) > 0$, donc $N_\infty(\phi_L \mathbf{f}) > \beta$. Par conséquent $q_K(\mathbf{f}) \leqslant N_\infty(\phi_L \mathbf{f})$, ce qui prouve que la première injection est en effect un morphisme strict.

(b) Soit V un voisinage de 0 dans $\mathcal{H}(T;F)$. Soit (K_j) une suite de sous-ensembles compacts de T telle que $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$ et $\bigcup_j K_j = T$. Il existe une suite décroissante (m_j) de nombres strictement positifs telle que $\mathbf{f} \in \mathcal{H}(T;F)$, $\mathrm{Supp}\,\mathbf{f} \in K_j$ et $\|\mathbf{f}\|_\infty \leqslant m_j$ entraînent $\mathbf{f} \in V$. Soit W_j le voisinage de 0 dans $\mathcal{L}^{\infty}_{K_j}(T,\mu;F)$ formé de toutes les fonctions $\mathbf{f}$ telles que $N_\infty(\mathbf{f}) \leqslant m_j$. L'ensemble $W = \bigcup_j W_j$ est un voisinage de 0 dans $\mathcal{L}^{\infty}_{c}(T,\mu;F)$. Nous affirmons que $W \cap \mathcal{H}(T;F) \subset V$, ce qui prouve qu'aussi la seconde injection est un morphisme strict. Soit $\mathbf{f} \in W \cap \mathcal{H}(T;F)$. Il existe un indice j tel que $\mathrm{Supp}\, f \in K_j$ et que $N_\infty(f) \leqslant m_j$. Il faut voir qu'on a aussi $\|f\| \leqslant m_j$. Si l'on avait $|f(t_o)| > m_j$ en un point $t_o \in K_j$, on aurait $|f(t)| > m_j$ pour tout point t d'un voisinage ouvert U de t_o. On a $\mu^*(U) > 0$ par hypothèse, ce qui contredit $N_\infty(|\mathbf{f}|) \leqslant m_j$. ▲

Avant de démontrer le résultat suivant, il nous faut faire une remarque, qui est bien connue dans le cas d'un espace séparé: Si E est un espace localement convexe dont la topologie est définie par une famille dénombrable (q_n) de semi-normes et si toute suite de Cauchy dans E converge, alors E est complet. Soit N l'adhérence de {0} dans E, soit F = E/N l'espace séparé associé à E, et soit ϕ la surjection canonique de E sur F. On a $q_n(x) = q_n(y)$ chaque fois que $x-y \in N$, donc si l'on définit $\dot{q}_n(\dot{x}) = q_n(x)$ pour $\dot{x} \in F$ et pour n'importe quel élément x de E tel que $\phi(x) = \dot{x}$, la famille (q_n) de semi-normes définit la topologie quotient de F ([1],II,p.5). Soit alors $(\dot{x}_m)$ une suite de Cauchy dans l'espace localement convexe métrisable F et pour tout m choisissons un $x_m \in E$ tel que $\phi(x_m) = \dot{x}_m$. Alors (x_m) est une suite de Cauchy dans E qui converge par hypothèse vers un élément $x \in E$. Puisque ϕ est continu, $(\dot{x}_m)$ converge vers $\dot{x} = \phi(x)$, donc F est complet. Si maintenant $\mathcal{F}$ est un filtre de Cauchy sur E, alors $\phi(\mathcal{F})$ est un filtre de Cauchy sur F, donc converge vers un point $\dot{x} \in F$ d'après ce qu'on vient de voir. Donc $\mathcal{F}$ converge vers n'importe quel point $x \in E$ tel que $\phi(\dot{x}) = x$.

THÉORÈME 1. *Pour* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *les espaces* $\mathcal{L}^p_{loc}(T,\mu;F)$ $\mathcal{L}^p_c(T,\mu;F)$ *sont complets.*

Démonstration. **(a)** Pour montrer que $\mathcal{L}^p_{loc}(T,\mu;F)$ est complet, il suffit, d'après la remarque juste faite, montrer que toute suite de Cauchy $(\mathbf{f}_n)$ converge. Soit K un sous-ensemble compact de T, alors $(\phi_K\mathbf{f}_n)$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^p(T,\mu;F)$, donc converge dans $\mathcal{L}^p(T,\mu;F)$ vers une fonction $\mathbf{f}_K$ ([2],Chap.IV,§3, N° 4, Théorème 2 et §6, N°3, Proposition 2). Comme $(\phi_K\mathbf{f}_n)$ a une sous-suite qui converge vers $\mathbf{f}_K$ presque partout par rapport à μ ([2],Chap.IV,§3, N°4, Théorème 3), si K et L sont deux sous-ensembles compacts de T, les fonctions $\mathbf{f}_K$ et $\mathbf{f}_L$ sont égales presque partout sur $K \cap L$. Or T est la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles compacts, donc il existe une fonction $\mathbf{f}:T \to F$ qui pour tout K est égale à f_K presque partout sur K. Il est clair que $\mathbf{f}$ appartient a $\mathcal{L}^p_{loc}(T,\mu;F)$ et que $(\mathbf{f}_n)$ converge vers $\mathbf{f}$ dans $\mathcal{L}^p_{loc}(T,\mu;F)$.

(b) Puisque $\mathcal{L}^p_c(T,\mu;F)$ est la limite inductive stricte d'une suite d'espaces $\mathcal{L}^p_K(T,\mu;F)$, il suffit de démontrer que ces derniers sont complets ([1],II,p.35,Proposition 9,(iii)). Soit donc $(\mathbf{f}_n)$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^p_K(T,\mu;F)$. Elle est aussi une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^p(T,\mu;F)$, donc converge vers une fonction $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p(T,\mu;F)$. Une sous-suite de $(\mathbf{f}_n)$ converge presque partout vers **f**, donc **f** est égale a zéro presque partout dans le complémentaire de K. Par conséquent, en modifiant **f** sur un ensemble négligeable on obtient une fonction dont le support est contenu dans K et vers laquelle $(\mathbf{f}_n)$ converge. ▲

§2. Les espaces L^p_{loc} et L^p_c.

DEFINITION 2. *Étant donnée une mesure positive* μ *sur un espace localemenet compact dénombrable a l'infini* T, *un nombre* $p \in \bar{\mathbb{R}}$ *tel que* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *et un espace de Banach* F, *on désigne par* $L^p_{loc}(T,\mu;F)$ *l'espace séparé associé à* $\mathcal{L}^p_{loc}(T,\mu;F)$ *et par* $L^p_c(T,\mu;F)$ *l'espace séparé associé à* $\mathcal{L}^p_c(T,\mu;F)$.

Une fonction $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_{loc}(T,\mu;F)$ appartient à l'adhérence de $\{0\}$ si et seulement si $N_p(\phi_K\mathbf{f}) = 0$ pour tout sous-ensemble compact K de T, ce qui veut dire que **f** est μ-négligeable, puisque T est l'union d'une suite d'ensembles compacts. Si **f** et **g** définissent le même élément $\tilde{\mathbf{f}}$ de $L^p_{loc}(T,\mu;F)$, alors pour tout compact $K \subset T$ on a $N_p(\phi_K\mathbf{f}) = N_p(\phi_K\mathbf{g})$ et l'on dénote leur valeur commune par $\|\tilde{\mathbf{f}}\|_{p,K}$. La topologie quotient sur $L^p_{loc}(T,\mu;F)$ est définie par les semi-normes $\tilde{\mathbf{f}} \to \|\tilde{\mathbf{f}}\|_{p,K}$, où K parcourt les sous-ensembles compacts de T, où seulement une suite (K_j) de sous-ensembles compacts tels que $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$ et $\bigcup K_j = T$. Du Théorème 1 il résulte immédiatement le

THÉORÈME 2. *L'espace localement convexe métrizable* $L^p_{loc}(T,\mu;F)$ *est complet, c.-à-d. un espace de Fréchet.*

Pour un sous-ensemble compact arbitraire K de T on note $L^p_K(T,\mu;F)$ l'espace séparé associé à $\mathcal{L}^p_K(T,\mu;F)$. La topologie quotient sur $L^p_K(T,\mu;F)$ est définie par la norme $\|\tilde{\mathbf{f}}\|_p = N_p(\mathbf{f})$, où $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_K(T,\mu;F)$ et $\tilde{\mathbf{f}}$ est sa classe d'équivalence. Il s'ensuit que l'injection canonique $\mathcal{L}^p_K(T,\mu;F) \to \mathcal{L}^p(T,\mu;F)$ définit une injection $L^p_K(T,\mu;F) \to L^p(T,\mu;F)$ qui est un morphisme strict: elle est une isométrie de $L_K^p(T,\mu;F)$ sur son image dans $L^p(T,\mu;F)$.

Soint K et L deux sous-ensembles compacts de T tels que $K \subset L$. L'injection canonique $\mathcal{L}_K^p(T,\mu;F) \to \mathcal{L}_L^p(T,\mu;F)$ définit une injection $L_K^p(T,\mu;F) \to L_L^p(T,\mu;F)$, qui est, comme avant, une isométrie de $L_K^p(T,\mu;F)$ sur son image dans $L_L^p(T,\mu;F)$, car les normes sur les deux espaces sont les restrictions de la norme sur $L^p(T,\mu;F)$.

L'image de $L_K^p(T,\mu;F)$ dans $L^p(T,\mu;F)$ est fermée. En effet, identifions $L_K^p(T,\mu;F)$ avec son image $L^p(T,\mu;F)$ et soit $(\tilde{\mathbf{f}}_n)$ une suite d'éléments de $L_K^p(T,\mu;F)$ qui converge vers $\tilde{\mathbf{f}} \subset L^p(T,\mu;F)$. Si l'on choisit des représentants $\mathbf{f}_j \in \tilde{\mathbf{f}}_j$ et $\mathbf{f} \in \tilde{\mathbf{f}}$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} N_p(\mathbf{f}-\mathbf{f}_n) = 0$. Il existe une suite $(\mathbf{f}_{n_k})$ extraite de $(\mathbf{f}_n)$ qui converge presque partout vers $\mathbf{f}$ ([2], Chap. IV, §3, Nº 4, Théorème 3). Par conséquent $\mathbf{f}$ est égal à zéro presque partout dans le complémentaire de K, donc $\mathbf{f} \in L_K(T,\mu;F)$.

On voit de même que l'image de $L_K^p(T,\mu;F)$ est fermée dans $L_L^p(T,\mu;F)$.

L'injection canonique $\mathcal{L}_K^p(T,\mu;F) \to \mathcal{L}_c^p(T,\mu;F)$ définit une injection $L_K^p(T,\mu;F) \to L_c^p(T,\mu;F)$. Si l'on identifie $L_K^p(T,\mu;F)$ avec son image dans $L_c^p(T,\mu;F)$, on peut dire que $L_c^p(T,\mu;F)$ est la réunion des espaces normés $L_K^p(T,\mu;F)$. Montrons que la topologie localement convexe la plus fine sur $L_c^p(T,\mu;F)$ qui rend continues les injections $L_K^p(T,\mu;F) \to L_c^p(T,\mu;F)$ coincide ave la topologie quotient sur $L_c^p(T,\mu;F)$. En effet un sous-ensemble absorbant, convexe, équilibré V de $L_c^p(T,\mu;F)$ est un voisinage de 0 pour la topologie localement convexe finale si et seulement si pour tout ensemble compact $K \subset T$ il existe un $m_K > 0$ tel que tout élément $\tilde{\mathbf{f}}$ de $L_K^p(T,\mu;F)$ qui vérifie $\|\tilde{\mathbf{f}}\|_p \leqslant m_K$ appartient à V. Soit γ la surjection canonique de $\mathcal{L}_c^p(T,\mu;F)$ sur $L_c^p(T,\mu;F)$. La condition que V doit satisfaire est équivalente à ce que $\gamma^{-1}(V)$ contienne toutes les fonctions $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_K^p(T,\mu;F)$ telles que $N_p(\mathbf{f}) \leqslant m_K$, c.-à-d. que $\gamma^{-1}(V)$ soit un voisinage de 0 pour la topologie localement convexe finale sur $\mathcal{L}_c^p(T,\mu;F)$, donc que V soit un voisinage de 0 pour la topologie quotient.

Si (K_j) est une suite d'ensembles compacts tels que $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$ et $\bigcup K_j = T$, alors $L^p_c(T,\mu;F)$ est aussi limite inductive stricte de la suite $(L^p_{K_j}(T,\mu;F))$. Or l'espace normé $L^p_K(T,\mu;F)$ est évidemment isomorphe a $L^p(K,\mu;F)$ ([2],Chap. V,§7,N°1, Scholie) qui est complet. On a donc ([1],II,p.35, Proposition 9):

THÉORÈME 3. *L'espace localement convexe* $L^p_c(T,\mu;F)$ *est complet et* $L^p_K(T,\mu;F)$ *est fermé dans* $L^p_c(T,\mu;F)$.

De plus, $L^p_c(T,\mu;F)$ est ultra-bornologique, donc aussi tonnelé et bornologique.

Les injections canoniques du numéro précédent impliquent les applications linéaires continues injectives

$$L^p_c(T,\mu;F) \to L^p(T,\mu;F) \to L^p_{loc}(T,\mu;F) \tag{3}$$

et pour $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ aussi

$$L^q_{loc}(T,\mu;F) \to L^p_{loc}(T,\mu;F), \tag{4}$$

$$L^q_c(T,\mu;F) \to L^p_c(T,\mu;F). \tag{5}$$

Un élément $\tilde{f}$ de $L^p(T,\mu)$ appartient a l'image de $L^p_K(T,\mu)$ si et seulement si $\mathrm{Supp}(\tilde{f}\mu) \subset K$. En effet, le Corollaire 2 à la Proposition 3 de [2], Chap.V, 2^e éd.,§5, N° 3 montre que $\tilde{f}\mu = 0$ dans un ouvert $U \subset T$ si et seulement si pour tout $f \in \hat{f}$ on a $f(t) = 0$ presque partout par rapport à μ dans U. Le même raisonnement montre la validité de la formule

$$\mathrm{supp}(\tilde{f}\mu) = \bigcap_{f \in \tilde{f}} \mathrm{Supp}(f),$$

il est donc raisonnable de considérer $\mathrm{Supp}(\tilde{f}\mu)$ comme le support de l'élément $\tilde{f}$ de $L^p_{loc}(T,\mu)$.

Les injections canoniques $\mathcal{H}(T;F) \to \mathcal{L}^\infty_c(T,\mu;F)$ et $\mathcal{C}(T;F)$ $\to \mathcal{L}^\infty_{loc}(T,\mu;F)$ étudiées au numéro précédent, composées respectivement avec les surjections canoniques $\mathcal{L}_c(T,\mu;F) \to L_c(T,\mu;F)$ et $\mathcal{L}_{loc}(T,\mu;F) \to L_{loc}(T,\mu;F)$, donnent des aplications linéaires continues

$$\mathcal{H}(T;F) \to L_c^{\infty}(T,\mu;F), \tag{6}$$

$$\mathcal{C}(T;F) \to L_{loc}^{\infty}(T,\mu;F). \tag{7}$$

L'exemple de la mesure de Dirac montre que ces applications ne sont pas toujours injectives. On a cependant:

PROPOSITION 4. *Si le support de* μ *est égal à* T, *les applications* (6) *et* (7) *sont des morphismes stricts injectifs.*

Démonstration. Soit $\mathbf{f}:T \to F$ une fonction continue et supposons que $\mathbf{f}(t) = 0$ pour presque tout $t \in T$ par rapport à μ. Si l'on avait $\mathbf{f}(t_o) \neq 0$ en un point $t_o \in T$, on aurait $\mathbf{f}(t) \neq 0$ dans un voisinage ouvert U de t_o. Comme $\mu^*(U) > 0$, ceci contredit l'hypothèse que $\mathbf{f}$ est μ-négligeable. Donc $\mathbf{f} = 0$ et les deux applications sont injectives.

Que (6) et (7) sont des morphismes stricts résulte de la Proposition 3, du fait que la surjection canonique d'un espace sur un quotient est toujours un morphisme strict et du fait que la composée de deux morphismes stricts est un morphisme strict. ▲

En composant l'application (6) avec l'application (5) pour $q = \infty$ et ensuite avec l'application (3), on obtient les applications linéaires continues

$$\mathcal{H}(T;F) \to L_c^p(T,\mu;F),$$

$$\mathcal{H}(T;F) \to L_{loc}^p(T,\mu;F).$$

PROPOSITION 5. *Si* p *est fini, l'image de* $\mathcal{H}(T;F)$ *est dense dans* $L_c^p(T,\mu;F)$ *et dans* $L_{loc}^p(T,\mu;F)$.

Démonstration. Si $\tilde{\mathbf{f}} \in L_{loc}^p(T,\mu;F)$ et K est un sous-ensemble compact de T, alors $\phi_K\mathbf{f}$ est, d'après la Proposition 1, un élément bien défini de $L^p(T,\mu;F)$ et $\|\tilde{\mathbf{f}}-\phi_K\tilde{\mathbf{f}}\|_{p,K} = 0$. Ceci prouve que $L^p(T,\mu;F)$ est dense dans $L_{loc}^p(T,\mu;F)$. Comme l'image de $\mathcal{H}(T;F)$ est dense dans $L^p(T,\mu;F)$ par définition, et comme l'injection $L^p(T,\mu;F) \to L^p_{loc}(T,\mu;F)$ est continue, l'image de $\mathcal{H}(T;F)$ est dense aussi dans $L^p_{loc}(T,\mu;F)$.

Soit maintenant $\tilde{\mathbf{f}}$ un élément de $L^p_c(T,\mu;F)$ et soit $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^p_c(T,\mu;F)$ un représentant de la classe d'équivalence $\tilde{\mathbf{f}}$ qui a son support dans l'ensemble compact $K \subset T$. Comme par définition $\mathcal{H}(T;F)$ est dense dans $\mathcal{L}^p(T,\mu;F)$, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact $L \supset K$ et une fonction $\mathbf{h} \in \mathcal{H}(T;F)$ ayant son support dans L telle que $N_p(\mathbf{f}-\mathbf{h}) \leqslant \varepsilon$. Mais alors $\tilde{\mathbf{h}}$ appartient à l'image de $\mathcal{H}(T;F)$ dans $L^p_L(T,\mu;F)$ et $\|\tilde{\mathbf{f}}-\tilde{\mathbf{h}}\|_p \leqslant \varepsilon$. ▲

Notons par u l'application injective linéaire de $L^1_{loc}(T,\mu)$ dans l'espace $M(T)$ des mesures sur T qui à un élément $\tilde{f}$ fait correspondre la mesure $\tilde{f}\mu$ (bien définie d'après le Corollaire 2 à la Proposition 3 de [2], Chap.V, 2e éd., §5, N°3).

Je rappelle que $\mathcal{C}^0(T)$ dénote l'espace des fonctions continues sur T qui tendent vers 0 a l'infini. On munit $\mathcal{C}^0(T)$ de la norme $\|h\| = \max_{t\in T}|h(t)|$ pour laquelle il est un espace de Banach. L'espace $M^1(T)$ des mesures intégrables (ou "bornées": [2], Chap.III, 2e éd., §1, N° 8) s'identifie au dual de $\mathcal{C}^0(T)$ ([2], Chap.IV,§4, N° 7).

PROPOSITION 6. (a) *L'application* u *est continue si l'on munit* $M(T)$ *de la topologie forte* $\beta(M(T),\mathcal{H}(T))$.

(b) u *envoie* $L^1(T,\mu)$ *dans l'espace* $M^1(T)$ *des mesures intégrables et la restriction de* u *à* $L^1(T,\mu)$ *est une application continue de cet espace dans* $M^1(T)$ *muni de la topologie forte* $\beta(M^1(T),\mathcal{C}^0(T))$.

(c) u *envoie* $L^1_c(T,\mu)$ *dans l'espace* $\mathcal{E}'(T)$ *des mesures à support compact* ([2],Chap.IV,§4,N°8) *et la restriction de* u *a* $L^1_c(T,\mu)$ *est une application continue de cet espace dans* $\mathcal{E}'(T)$ *muni de la topologie forte* $\beta(\mathcal{E}'(T),\mathcal{E}(T))$.

Démonstration. (a) Soit B un sous-ensemble borné de $\mathcal{H}(T)$. Il existe un sous-ensemble compact K de T et un nombre $M > 0$ tels que $\operatorname{Supp} h \subset K$ et $|h(t)| \leqslant M$ quels que soient $h \in B$ et $t \in T$ ([1],III,p.5,Proposition 6). Si f dénote un représentant de $\tilde{f}$ on a

$$|<\tilde{f}\mu,h>| = |\int h(t)f(t)d\mu(t)|$$

$$\leqslant \max_t |h(t)| \int_K |f(t)|d\mu(t) < M\|\tilde{f}\|_{1,K}$$

pour tout $h \in B$. Par conséquent $\|\tilde{f}\|_{1,K} \leqslant 1/M$ implique que $\tilde{f}\mu$ appartient au polaire B^o de B.

(b) Le Corollaire du Théorème 1 de [2], Chap.V, §5, N°3 prouve que u envoie $L^1(T,\mu)$ dans $M^1(T)$. Soit B une partie bornée de $\mathcal{C}^o(T)$. Il existe un nombre $M > 0$ tel que $|h(t)| \leqslant M$ quels que soient $h \in B$ et $t \in T$. Si f dénote un représentant de $\tilde{f}$ on a

$$|<\tilde{f}\mu,h>| = |\int h(t)f(t)d\mu(t)|$$

$$\leqslant \max_{t\in T} |h(t)| \int |f(t)|d\mu(t) \leqslant M\|\tilde{f}\|_1$$

pour tout $h \in B$. Par conséquent $\|\tilde{f}\|_1 \leqslant 1/M$ implique $\tilde{f}\mu \in B^o$.

(c) Nous avons déja remarqué que u envoie $L^1_c(T,\mu)$ dans $\mathcal{C}'(T)$. Soit $K \subset T$ un ensemble compact et B une partie bornée de $\mathcal{C}(T)$. Il existe un nombre $M > 0$ tel que $|h(t)| \leqslant M$ quels que soient $h \in B$ et $t \in K$. Si $\tilde{f}$ appartient a $L^1_K(T,\mu)$ et f est un représentant de $\tilde{f}$, alors

$$|<\tilde{f}\mu,h>| = |\int h(t)f(t)d\mu(t)|$$

$$\leqslant \max_{t\in K} |h(t)| \int |f(t)|d\mu(t) \leqslant M\|\tilde{f}\|_1$$

pour tout $h \in B$. Par conséquent $\tilde{f} \in L^1_K(T,\mu)$ et $\|\tilde{f}\|_1 \leqslant 1/M$ impliquent $\tilde{f}\mu \in B^o$, donc l'application $\tilde{f} \to \tilde{f}\mu$ est continue de $L^1_K(T,\mu)$ dans $\mathcal{C}'(T)$. Il en résulte qu'elle est aussi continue de $L^1_c(T,\mu)$ dans $\mathcal{C}'(T)$ ([1],II,p.29,Proposition 5 (ii)). ▲

§3. **Dualité.** Soit p un nombre réel tel que $1 \leqslant p < \infty$ et soit q l'exposant conjugué. La Proposition 2 et l'identité

$$<f_1,g_1> - <f_2,g_2> = <f_1-f_2,g_1> + <f_2,g_1-g_2>$$

montrent que si $\tilde{f} \in L_c^p(T,\mu)$ et $\tilde{g} \in L_{loc}^q(T,\mu)$, alors $\tilde{f}\cdot\tilde{g}$ est un élément bien défini de $L^1(T,\mu)$. De plus, si K est un sous-ensemble compact de T, l'inégalité (1) montre que

$$\left|\int \tilde{f}\tilde{g}d\mu\right| \leqslant \|\tilde{f}\|_p \cdot \|\tilde{g}\|_{q,K} \tag{8}$$

pour $\tilde{f} \in L_K^p(T,\mu)$ et $\tilde{g} \in L_{loc}^q(T,\mu)$. Il s'ensuit que si $\tilde{g}$ est un élément donné de $L_{loc}^q(T,\mu)$, alors l'application

$$L_{\tilde{g}} : \tilde{f} \mapsto \int \tilde{f}\tilde{g}d\mu$$

est une forme linéaire continue sur $L_c^p(T,\mu)$. Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant:

THÉORÈME 4. *L'application $\tilde{g} \mapsto L_{\tilde{g}}$ est un isomorphisme de l'espace de Fréchet $L_{loc}^q(T,\mu)$ sur le dual de $L_c^p(T,\mu)$ muni de la topologie forte.*

Démonstration. 1) Montrons d'abord que l'application $\tilde{g} \mapsto L_{\tilde{g}}$ est injective. Supposons que $\tilde{g} \neq 0$ et soit g un représentant de g. L'ensemble A ou $g(t) \neq 0$ est μ-mesurable et $\mu(A) > 0$. Il existe un sous-ensemble compact K de A tel que $\mu(K) > 0$ et que la restriction de g à K soit continue. Par conséquent il existe un nombre $m > 0$ tel que $|g(t)| > m$ pour $t \in K$. Posons $f = \phi_K \tilde{g}/|g|$, alors la classe $\tilde{f}$ de f appartient à $L_K^\infty(T,\mu) \subset L_c^p(T,\mu)$ et l'on a

$$L_{\tilde{g}}(\tilde{f}) = \int_K |g(t)|d\mu(t) \geqslant m\mu(K) > 0,$$

donc $L_{\tilde{g}} \neq 0$.

2) Démontrons maintenant que l'application $\tilde{g} \mapsto L_{\tilde{g}}$ est continue. Soit B une partie bornée de $L_c^p(T,\mu)$. Il existe un ensemble compact $K \subset T$ et un nombre $M > 0$ tels que $B \subset L_K^p(T,\mu)$ et que $\|\tilde{f}\|_p \leqslant M$ pour tout $\tilde{f} \in B$. Soit V le voisinage de 0 dans $L_{loc}^q(T,\mu)$ formé des éléments $\tilde{g}$ tels que $\|\tilde{g}\|_{q,K} \leqslant 1/M$. Il résulte de l'inégalité (8) que $\tilde{g} \in V$ implique $|L_{\tilde{g}}(\tilde{f})| \leqslant 1$ pour tout $\tilde{f} \in B$, c.-à-d. $L_{\tilde{g}} \in B^o$.

3) L'application $\tilde{g} \mapsto L_{\tilde{g}}$ est surjective. En effet,

soit Λ une forme linéaire continue sur $L_c^p(T,\mu)$. Pour tout sous-ensemble compact K de T la restriction de Λ à $L_K^p(T,\mu)$, qu'on identifie à $L^p(K,\mu)$, est continue, donc il existe un élément $\tilde{g}_K \in L^q(K,\mu)$ et un seul tel que $\Lambda(\tilde{f}) = \int \tilde{f}\tilde{g}_K d\mu$ pour tout $\tilde{f} \in L_K^p(T,\mu)$ ([2],Chap.V,§5, N°8). L'unicité montre que si K et L sont deux sous-ensembles compacts de T, alors les restrictions de $\tilde{g}_K$ et de $\tilde{g}_L$ à $K \cap L$ coincident. La famille $(\tilde{g}_K)$ définit donc un élément $\tilde{g} \in L_{loc}^q(T,\mu)$ tel que $\Lambda(f) = \int \tilde{f}\tilde{g}d$ pour tout $\tilde{f} \in L_c^p(T,\mu)$.

4) L'espace $L_c^p(T,\mu)$, étant la limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Banach, est distingué ([3], Théorème 10), donc son dual fort est tonnelé ([4],§23, 7.(1) ou [1],IV,p.52, Exercice 4). Comme $L_{loc}^q(T,\mu)$ est un espace de Fréchet, la bijection linéaire continue $\tilde{g} \mapsto L_{\tilde{g}}$ est un isomorphisme ([4],§34,2.(3)). ▲

Soit $\tilde{g}$ un élément de $L_c^q(T,\mu)$ et soit K un sous-ensemble compact de T tel que $\tilde{g} \in L_K^q(T,\mu)$. De l'inégalité obtenue de (8) en échangeant les rôles de $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ on voit que l'application

$$L_{\tilde{g}} : \tilde{f} \to \int \tilde{f}\tilde{g}d\mu$$

est une forme linéaire continue sur $L_{loc}^p(T,\mu)$.

THEOREME 5. *L'application $\tilde{g} \to L_{\tilde{g}}$ est un isomorphisme de $L_c^q(T,\mu)$ sur le dual de $L_{loc}^p(T,\mu)$ muni de la topologie forte.*

Démonstration. 1) Commençons de nouveau par démontrer que l'application $\tilde{g} \to L_{\tilde{g}}$ est injective. Supposons que $L_{\tilde{g}} = 0$. Soit g un représentant de $\tilde{g}$ et posons

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\overline{g(t)}}{|g(t)|} & \text{si } g(t) \neq 0, \\ 0 & \text{si } g(t) = 0. \end{cases}$$

La classe d'équivalence $\tilde{f}$ de f appartient a $L_{loc}^\infty(T,\mu) \subset L_{loc}^p(T,\mu)$ et l'on a

$$L_{\tilde{g}}(\tilde{f}) = \int |g(t)| d\mu(t) = 0,$$

d'où $\tilde{g} = 0$.

2) Montrons ensuite que l'application $\tilde{g} \to L_{\tilde{g}}$ est continue. Soit B une partie bornée de $L^p_{loc}(T,\mu)$ et soit (K_j) une suite de sous-ensembles compacts de T tels que $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$ et $\bigcup_j K_j = T$. Il existe une suite (m_j) de nombres strictement positifs telle que $\|f\|_{p,K_j} \leqslant m_j$ pour tout $f \in B$ et tout j. Soit V_j le voisinage convexe, équilibré de 0 dans $L^q_{K_j}(T,\mu)$ formé des éléments tels que $\|\tilde{g}\|_q \leqslant 1/m_j$. Alors l'enveloppe convexe, équilibré V de $\bigcup_j V_j$ est un voisinage de 0 dans $L^q_c(T,\mu)$. Tout élément $\tilde{g}$ de V est de la forme $\tilde{g} = \sum_j \lambda_j \tilde{g}_j$ avec $\tilde{g}_j \in V_j$, $\sum_j |\lambda_j| \leqslant 1$ et $\lambda_j = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices ([1],II,p.10). Par conséquent $\tilde{g} \in V$ entraîne

$$|L_{\tilde{g}}(\tilde{f})| = |\int \tilde{f}\tilde{g} d\mu| \leqslant \sum_j |\lambda_j| \int_{K_j} |\tilde{f}\tilde{g}_j| d\mu$$

$$\leqslant \sum_j |\lambda_j| \cdot \|\tilde{f}\|_{p,K_j} \|\tilde{g}_j\|_q \leqslant 1$$

pour tout $\tilde{f} \in B$, c.-à-d. $L_{\tilde{g}} \in B^o$.

3) L'application $\tilde{g} \to L_{\tilde{g}}$ est surjective. En effet, soit Λ une forme linéaire continue sur $L^p_{loc}(T,\mu)$. Alors sa restriction à $L^p(T,\mu)$ est continue, il existe donc un $\tilde{g} \in L^q(T,\mu)$ tel que $\Lambda(\tilde{f}) = \int \tilde{f}\tilde{g} d\mu$ pour tout $\tilde{f} \in L^p(T,\mu)$ ([2], Chap.V,§5, N°8). Comme Λ est continu sur l'espace de Fréchet $L^p_{loc}(T,\mu)$, il existe ([1],II,p.6) un sous-ensemble compact K de T et un nombre M > 0 tels que

$$|\Lambda(\tilde{f})| \leqslant M \|\tilde{f}\|_{p,K}$$

pour tout $\tilde{f} \in L^p_{loc}(T,\mu)$. Nous allons montrer que $\tilde{g}$ appartient à $L^q_K(T,\mu)$. Notons U le complémentaire de K dans T. Soit g un représentant de $\tilde{g}$ et définissons un élément $\tilde{f}$ de $L^\infty(T,\mu) \subset L^p(T,\mu)$ par son représentant

$$f(t) = \begin{cases} \phi_U(t) \dfrac{\overline{g(t)}}{|g(t)|} & \text{si } g(t) \neq 0, \\ 0 & \text{si } g(t) = 0. \end{cases}$$

Alors $\|\tilde{f}\|_{p,K} = 0$, donc d'après (9)

$$\Lambda(\tilde{f}) = \int_U |g(t)|d\mu = 0,$$

ce qui montre que g est en effet μ-négligeable dans U.

Or $\Lambda(\tilde{f})$ et $\int \tilde{f}\tilde{g}d\mu$ sont des fonctions continues de $\tilde{f}$ sur $L^p_{loc}(T,\mu)$ et coincident sur $L^p(T,\mu)$, qui est dense dans $L^p_{loc}(T,\mu)$ d'après la Proposition 5. On a donc $\Lambda = L_{\tilde{g}}$.

4) Montrons finalement que l'application $\tilde{g} \to L_{\tilde{g}}$ est ouverte. Soit W un voisinage de 0 dans $L^q_c(T,\mu)$. Étant donnée une suite (K_j) de parties compactes de T comme dans la partie 2) de la démonstration, il existe une suite (m_j) de nombres strictement positifs tels que $\tilde{g} \in L^q_{K_j}(T,\mu)$, $\|\tilde{g}\|_q \leq m_j$ implique $\tilde{g} \in W$. Le sous-ensemble B de $L^p_{loc}(T,\mu)$ formé des éléments $\tilde{f}$ tels que $\|f\|_{p,K_j} \leq 1/m_j$ pour tout j est borné. Soit maintenant $\tilde{g} \in L^q_c(T,\mu)$ tel que $L_{\tilde{g}} \in B^o$. Il existe un indice j tel que $\tilde{g}$ appartient à $L^q_{K_j}(T,\mu)$. Si $\tilde{f} \in L^p(K_j,\mu)$ est tel que $\|\tilde{f}\|_p \leq 1$, c.-à-d. que $\|f/m_j\|_p \leq 1/m_j$, alors il résulte de la Proposition 3 de [2], Chap. IV, §6, Nº 4 que

$$\|\tilde{g}\|_q = \sup_{\|\tilde{f}\|_p \leq 1} \left|\int \tilde{f}\tilde{g}d\mu\right| \leq m_j ,$$

donc que $\tilde{g} \in W$. ▲

COROLLAIRE. *Pour* $1 < p < \infty$ *les espaces* $L^p_c(T,\mu)$ *et* $L^p_{loc}(T,\mu)$ *sont réflexifs.*

Remarque. La généralisation des Théorèmes 4 et 5 aux fonctions à valeurs dans un espace de Banach fait appel à la propriété dite "de Radon-Nikodym".

RÉFÉRENCES

[1] Bourbaki, N., *Éléments de Mathématique, Espaces Vectoriels Topologiques*, Nouvelle Édition, Masson, Paris, 1981.

[2] Bourbaki, N., *Éléments de Mathématique, Intégration*, Chaps. I-V, Hermann, Paris, 1965, 1967.

[3] Grothendieck, A., *Sur les espaces (F) et (DF)*, Summa Brasil, Math. 3 (1954), 57-123.
[4] Köthe, G., *Topological Vector Spaces*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen 159, 237, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1969, 1979.
[5] Trèves, F., *Linear Partial Differential Equations with Constant Coefficients*, Mathematics and its Applications, Vol.6, Gordon and Breach, New York-London-Paris, 1966.

*

Department of Mathematics
University of Maryland
College Park, MD 20742, USA.

(Recibido en octubre de 1986).