Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXI (1987), págs. 213-230

LA FORMULA DE SIMPSON TRIDIMENSIONAL

by

Gabriel POVEDA RAMOS

0. En todos los textos de Cálculo elemental se presenta la fórmula llamada de Simpson, que sirve para establecer en forma siquiera aproximada, el valor numérico del integral definido de una función, $f(x)$, de una variable x, de clase C^3 en un intervalo (a,b) perteneciente al dominio de definición, D_1, de la función. Según dicha fórmula, si se trata de calcular numéricamente el integral

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

basta dividir el intervalo (a,b) en un número *par* n, de subintervalos de igual longitud $(x_0,x_1),\ldots,(x_{n-1},x_n)$, poniendo $x_0 = a$, $x_n = b$, y valorar los valores aritméticos de $y_0 = f(x_0),\ldots,y_n = f(x_n)$. Entonces, se tiene la fórmula de Simpson:

$$\int_b^a f(x)\,dx = \frac{b-a}{3n}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\ldots+4y_{n-1}+y_n) \tag{01}$$

en donde la igualdad aproximada admite un error del orden de k^4 siendo $k = (b-a)/n = (x_n-x_0)/n$. Por lo tanto, cuanto mayor sea el número de subintervalos n en que se divide el segmento desde $a = x_0$ hasta $b = x_n$, tanto menor será el valor k de su amplitud, y, en consecuencia, tanto más exacta es la fŕomula (01). La deducción de esta fórmula la Simpson es un ejercicio sencillo, muy conocido en Análisis Numérico.

Pero los textos de Cálculo elemental caso no mencionan el hecho de que las ideas que están implícitas en la fórmula de Simpson, permiten también obtener fórmulas para valores numéricamente, al menos de manera aproximada, los integrales dobles

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy$$

definidos en un recinto R de forma caprichosa, simplemente conexo, pertenecientes al dominio de definición D_2 de la función f(x,y) que es al menos, de clase $C^3(R)$. El autor de esta nota ha deducido la fórmula correspondiente. Para aplicarla, se ciñe el recinto plano R con una cuadrícula o red isométrica, de calibre k, y se valoran numéricamente los valores z(x,y) = f(x,y) en todos los nodos o esquinas de la cuadrícula poligonal, así como en los centros de los n_0 cuadrados iguales que la forman. Luego se buscan aritméticamente las cinco sumas:

S_0 = suma de las cotas z(x,y) en los centros de los cuadrados.

S_1 = suma de las cotas z(x,y) en los nodos convexos exteriores de la red.

S_2 = suma de las cotas z(x,y) en los nodos planos exteriores de la red.

S_3 = suma de las cotas z(x,y) en los nodos cóncavos exteriores de la red.

S_4 = suma de las cotas z(x,y) en los nodos interiores de la red.

En esta forma se tiene

$$\iint_R f(x,y) = (k^2/12)(8S_0+S_1+2S_2+3S_3+4S_4) \qquad (02)$$

con un error que es del orden de k^5, de modo que al hacer la cuadrícula más fina, o sea la hacer tender k hacia cero, la fórmula (02) es cada vez más exacta. La deducción de esta fórmula (02) de cubicación sobre el plano se puede ver en la referencia bibliográfica |03|.

1. Hay numerosas situaciones en Física o en Ingeniería en que es necesario calcular integrales triples de la forma

$$\iiint_K u(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

sobre un cuerpo sólido tridimensional K, limitado por una superficie orientable Σ en el espacio euclidiano E^3, y en donde u(x,y,z) es una función que no tiene antiderivadas en términos de un número finito de funciones elementales, o donde u solo se conoce por información tabulada, o solamente puede ser medida punto por punto; o también, donde K es un sólido de forma muy irregular, o cuya superficie Σ no puede representarse por funciones elementales de las tres variables x,y,z. Tal es el caso cuando se trata, por ejemplo, de medir o de calcular lo siguiente:

- La masa total de un sólido hecho de material inhomogéneo y de forma muy irregular.
- El volumen de una cavidad o de un sólido de forma complicada, como es el cuerpo humano.
- El contenido de calor de un sólido hecho de material térmicamente inhomogéneo, y de forma complicada.
- El tiempo de evacuación del agua por un orificio en el fondo de una cavidad de forma caprichosa.
- La carga eléctrica total contenida en un cuerpo sólido de forma muy arbitraria e inducida por un campo eléctrico inhomogéneo.
- La energía contenida en un campo magnético de forma complicada, y/o donde la permeabilidad magnética varía irregularmente de punto a punto.

- El calor total desprendido por segundo por efecto de Joule desde un sólido conductor, eléctricamente inhomogéneo, y de forma compleja.

Todas estas magnitudes se expresan por medio de integrales triples de la forma indicada en (02).

2. En el presente artículo se trata de obtener una fórmula numérica para valorar siquiera aproximadamente una integral triple de una función de tres variables, $u(x,y,z)$, que es de clase $C^3(R)$

$$\iiint_R u(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad (03)$$

extendida a una región R de tres dimensiones, perteneciente al dominio D_3 de $u(x,y,z): R \subset D_3 \subset E^3$. La región R está limitada por una superficie orientable en el espacio E^3. Para nuestro propósito, usamos las mismas ideas que están implícitas en la deducción de la fórmula de Simpson, y que conducen a las igualdades aproximadas (01) y (02).

Este artículo está redactado en el estilo que algunos matemáticos actuales denominan, con aire doctoral y peyorativo, el "estilo discursivo", como si el uso correcto del castellano estuviera vedado en la Matemática. Se quiere que este modesto aporte sea comprensible también para los alumnos de pregrado de Ingeniería, Estadística y Matemática, porque para ellos tiene, sin duda, bastante utilidad lo que se desea presentar, y porque los libros y los cursos elementales de Cálculo no lo hacen.

3. Comenzamos por construir un cubo C en el espacio euclidiano tridimensional E^3. El cubo C tiene lado igual a 2; su centro está en el origen (0,0,0) de un sistema de coordenadas OX, OY, OZ, y sus caras son paralelas a los ejes y a los planos de referencia del triedro OXYZ, como se muestra en la Figura 1.

Cada uno de los ocho vértices del cubo C queda a distancia igual a una unidad (1) de cada uno de los tres planos

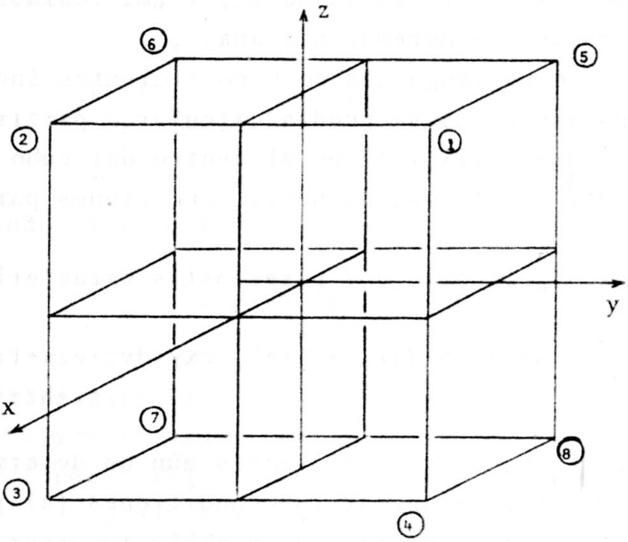

Figura 1

de referencia del sistema de coordenadas, de manera que, usando el signo "×" como producto cartesiano entre conjuntos, este cubo puede indicarse como

$$C = (-1,+1)\times(-1,+1)\times(-1,+1) \subset E^3$$

y podríamos llamarlo "un intervalo elemental tridimensional" de E^3.

4. Tratemos de construir ahora un polinomio $v(x,y,z)$ que tenga las siguientes propiedades:

a) Que sea isotrópico en E^3, es decir que su forma no de ningún privilegio a ninguna de las tres coordenadas. Esto significa que su *forma algebraica* explícita debe ser invariante ante cualquier sustitución mutua entre dos cualesquiera de sus tres variables, para que los resultados no dependan de la orientación de los ejes;

b) que contenga término independiente (o constante), y términos con potencias crecientes de cada una de las tres variables, para cimplificar el trabajo con el polinomio;

c) que los coeficientes de x^2, y^2, z^2 coincidan entre sí, por la razón que daremos más abajo;

d) que no contenga más de 9 coeficientes indeterminados, de modo que ellos se puedan calcular a partir de los valores que adopte $v(x,y,z)$ en el centro del cubo C y en los ocho vértices (lo que da nueve condiciones para determinarlos).

El único polinomio que posee estas características es

$$v(x,y,z) = axyz+(b/3)(x^2+y^2+z^2)+cxy+dyz+ezx+fx \\ gy+hz+i \tag{04}$$

donde a,b,c,...,h,i son coeficientes aún no determinados. Obsérvese que, para respetar las condiciones (a) y (d) estipuladas más arriba, no ha sido posible incorporarle términos en x^2y, y^2z, z^2x. Más abajo veremos, además, que tampoco son necesarios. Lo mismo puede decirse de términos de la forma x^2y^2, y^2z^2, z^2x^2, y otros de grado igual o mayor que tres.

5. Calculemos ahora el integral triple de $v(x,y,z)$ extendido al cubo C descrito.

$$I = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} v(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \tag{05}$$

Al ejecutar este cálculo, notamos que

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} xyz.dx.dy.dz = 0$$

y que

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} x.dx.dy.dz = 0$$

así como se anulan los integrales triples de y y de z extendidos al cubo C, lo mismo que los de los productos xy, yz, zx. En general, puede comprobarse que el integral triple definido sobre C para cualquier término que contenga siquiera alguna potencia impar de x, de y ó de z, se hace cero. Por lo tanto

$$I = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} |(b/3)(x^2+y^2+z^2)+i|\,dx.dy.dz \qquad (06)$$

Y efectuando el cálculo indicado se encuentra lo que se busca;

$$I = 8b/3 + 8i \qquad (07)$$

6. Para calcular los 9 coeficientes a,b,c,...,h,i del polinomio v(x,y,z), admitimos que conocemos los valores numéricos del polinomio, v_1, v_2,...,v_8, en los ocho vértices del cubo C, y su valor v_o en el centro (0,0,0). En estas condiciones, resulta de inmediato

$$v(0,0,0) = v_o = i \qquad (08)$$

En cuanto a los ocho vértices, se puede escribir las igualdades:

$$\begin{aligned}
a+b+c+d+e+f+g+h &= v_1-i, && \text{en el vértice } (1,1,1)\\
-a+b+c-d-e+f+g-h &= v_2-i, && \text{en el vértice } (1,1,-1)\\
-a+b-c-d+e+f-g+h &= v_3-i, && \text{en el vértice } (1,-1,1)\\
a+b-c+d-e+f-g-h &= v_4-i, && \text{en el vértice } (1,-1,1)\\
-a+b-c+d-e-f+g+h &= v_5-i, && \text{en el vértice } (-1,1,1)\\
a+b-c-d+e-f+g-h &= v_6-i, && \text{en el vértice } (-1,1,-1)\\
a+b+c-d-e-f-g+h &= v_7-i, && \text{en el vértice } (-1,-1,1)\\
-a+b+c+d+e-f-g-h &= v_8-i, && \text{en el vértice } (-1,-1,-1)
\end{aligned} \qquad (09)$$

Sumando estas ocho ecuaciones se encuentra:

$$8b = v_1+\ldots+v_8 - 8i$$

que nos interesa para sustituírla en la ecuación (07), de lo cual obtenemos

$$I = (1/3)(v_1+v_2+\ldots+v_8)+(16/3)v_o \tag{10}$$

teniendo en cuenta la igualdad (08).

Si en el polinomio $v(x,y,z)$ de la expresión (04), hubieramos puesto a los términos en x^2, y^2, z^2, coeficientes distintos, al construir las ecuaciones (09) nos hubiera resultado un sistema lineal con determinante general igual a cero, es decir un sistema no independiente (incompleto) o no compatible (salvo condiciones infundadas sobre $v_1,\ldots,v_8$).

7. Para nuestro objeto, basta encontrar explícitamente ab y ai, entre todos los coeficientes de $v(x,y,z)$. Pero puede resultar interesante que el lector busque los demás coeficientes a partir del sistema de ecuaciones (09), usando por ejemplo, el método de eliminación de Gauss. Los resultados son:

$$\begin{aligned}
a &= (1/8)(v_1-v_2-v_3+v_4-v_5+v_6+v_7-v_8)\\
b &= (1/8)(v_1+v_2+v_3+v_4+v_5+v_6+v_7+v_8)-v_o\\
c &= (1/8)(v_1+v_2-v_3-v_4-v_5-v_6+v_7+v_8)\\
d &= (1/8)(v_1-v_2-v_3+v_4+v_5-v_6-v_7+v_8)\\
e &= (1/8)(v_1-v_2+v_3-v_4-v_5+v_6-v_7+v_8)\\
f &= (1/8)(v_1+v_2+v_3+v_4-v_5-v_6-v_7-v_8)\\
g &= (1/8)(v_1+v_2-v_3-v_4+v_5+v_6-v_7-v_8)\\
h &= (1/8)(v_1-v_2+v_3-v_4+v_5-v_6+v_7-v_8)\\
i &= v_o.
\end{aligned} \tag{11}$$

8. La integral triple de $v(x,y,z)$ extendido al cubo C, que tiene lado igual a dos unidades es el indicado en la fórmula (10). Si se calculara sobre un cubo C_* de lado igual a k, el resultado sería, como es casi obvio:

$$\begin{aligned}
I_8 &= (k^3/8)I\\
&= (k^3/24)(v_1+v_2+\ldots+v_8)+(2k^3/3)v_o
\end{aligned} \tag{12}$$

En esta fórmula puede observarse que la suma de los coeficientes de $v_o, v_1, \ldots, v_8$ es

$$2k^3/3 + 8xk^3/24 = k^3 \tag{13}$$

es igual a k^3, o sea al volumen de C_*, lo cual debe esperarse del integral triple sobre C_* de un polinomio del grado de $v(x,y,z)$.

9. Construyamos ahora, en el espacio E^3, un sólido formado por la yuxtaposición de cubos con un mismo lado (igual a k), agregados haciendo contacto por sus caras, o por sus aristas, o aún solo por sus vértices, con sus caras paralelas a algunos de los planos OXY, OYZ, OZX, como el que se muestra en la Figura 2. A un cuerpo como este lo llamaremos un sólido policúbico P y estará formado por N cubos de lado igual a k. Diremos que las aristas de este sólido forman una malla tridimensional de calibre k; y a los vértices de los cubos que lo constituyen los llamaremos nodos de la red.

En la Figura 2 puede observarse que hay vértices (nodos) del sólido P que pertencen a uno solo de los cubos. Tal es el caso de los nodos (01) y (20) en la figura. Se les puede llamar vértices convexos simples o vértices mono-cúbico (o bien nodos 1-cúbico); y al número que haya de ellos lo designaremos N_1. Otros nodos, como los numerados (2), (14) y (15) en la figura pertenecen simultáneamente a dos cubos. Están situados sobre la arista de un ángulo diedro convexo de P. Los llamamos nodos bi-cúbicos (o bien, nodos 2-cúbicos), y su número se indicará con N_2. También hay nodos pertenecientes a tres cubos (o nodos 3-cúbicos), tales como los nodos (6), (11), (8) y (16) en la figura, y su número se indicará como N_3. Así sucesivamente, puede observarse que hay nodos 4-cúbicos, nodos 5-cúbicos, etc.; hasta los nodos 8-cúbicos, que son los nodos de la red que son puntos interiores del sólido P.

Si los N cubos que forman a P estuvieran separados totalmente, el número de todos sus vértices sería 8N. Al estar

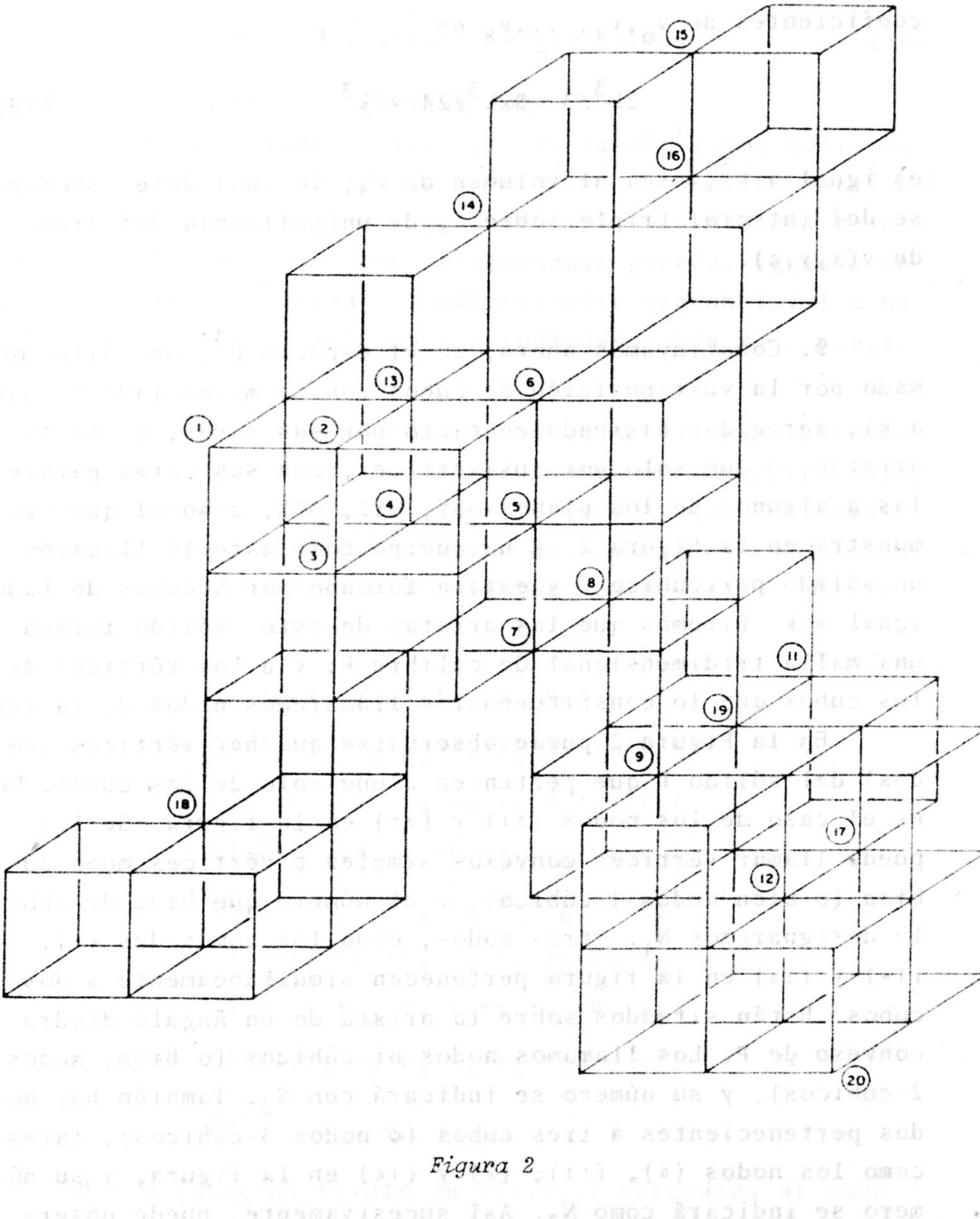

Figura 2

yuxtapuestos en P, cada vértice 1-cúbico pertenece a 1 cubo, cada vértice 2-cúbico pertenece a 2 cubos, y así sucesivamente. Por lo tanto, los números de los distintos tipos de vértices cumplen la identidad

$$N_1 + 2N_2 + 2N_3 + \ldots + 8N_8 = 8N \qquad (14)$$

es decir, que el número

$$N_1 + 2N_2 + \ldots + 8N_8 \tag{15}$$

debe ser divisible por 8.

La operación de identificar los nodos 1-cúbicos, 2-cúbicos, etc., y de contar su número (N_1, N_2, etc. respectivamente) exige mucho cuidado y atención, en general.

10. Volvamos a considerar el cubo C_* con arista igual a k, que hemos descrito en el párrafo 8, y supongamos que hay una función $u(x,y,z)$, que está definida en C_*. Admitamos que la función $u(x,y,z)$ es de clase C^3 (C_*), de manera que ella admite todas las terceras derivadas parciales respecto a sus tres argumentos, x.y.z, en el cubo. El valor de $u(x,y,z)$ en el centro del cubo será designado como u_o, y sus valores en los ocho vértices del cubo se indican como u_1, $u_2, \ldots, u_8$.

Es claro que si en las ecuaciones (11) ponemos $v_o = u_o$, $v_1 = u_1, \ldots, v_8 = u_8$, podemos construir un polinomio de la forma (04), $v(x,y,z)$, de tercer grado en x,y,z, y que coincide en sus valores con los de la función propuesta $u(x,y,z)$ en el centro y en las ocho esquinas de C_*. En los textos avanzados de Análisis Numérico se muestra que es posible poner

$$u(x,y,z) = v(x,y,z) + \varepsilon(k;x,y,z) \tag{16}$$

donde $\varepsilon(k;x,y,z)$ es el error de aproximación de u con respecto a v, y es una función infinitesimal del orden de $k^4/4!$ Otra manera de expresar esto mismo es escribiendo:

$$u(x,y,z) \doteq v(x,y,z) \tag{16A}$$

con error del orden de $k^4/4!$. Si se necesita calcular el integral triple de $u(x,y,z)$ sobre C_*, teniendo en cuenta lo anterior y la fórmula (12) podemos poner

$$\iiint_{C_*} u(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \doteq (k^3/24)(u_1+u_2+\ldots+u_8+16u_o) \tag{17}$$

con un error infinitesimal del orden de $k^4/4!$(*)

11. Si la función $u(x,y,z)$ está definida en un poliedro policúbico P como el que describimos en la Figura 2, formado por N cubos yuxtapuestos $C_1,\ldots,C_N$, podemos aplicar la fórmula aproximada (17) a cada cubo C_i y sumar para todos ellos. Así se obtiene

$$J = \iiint_P u(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \tag{18}$$
$$\doteq \sum_{i=1}^{N} |16u_o(i)+u_1(i)+u_2(i)+\ldots+u_8(i)|\,(k^3/24)$$

en donde $u_o(i)$ es el valor que se mida o que se calcule para la función u en el centro del cubo C_i; y $u_1(i),\ldots,u_8(i)$ son los valores que tenga u en los 8 respectivos vértices. Identificando los vértices no por su pertenencia a los N cubos C_i sino por su posición en la red del poliedro policúbico P, podemos escribir

$$\iiint_K u(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \doteq \Big(16\sum_{i=1}^{N} u_i + \sum_{i_1=1}^{N_1} u_{i1} + 2\sum_{i_2=1}^{N_2} u_{i2} + \ldots$$
$$+\,8\sum_{i_s=1}^{N_s} u_{i8}\Big)(k^3/24) \tag{19}$$

en donde

u_i: valor de u en el centro del cubo i-ésimo, C_i, siendo $i = 1,2,\ldots,N$.

u_{i1}: valor de u en el vértice 1-cúbico i_1-ésimo, siendo $i_1 = 1,2,\ldots,N_1$.

u_{i2}: valor de u en el vértice 2-cúbico i_2-ésimo, siendo $i_2 =$

(*) Esto se demuestra usando el teorema de Taylor para varias variables. Ver por ejemplo: R. Lauffer, *Praktischen Analysis in mehrere Veranderlichen*, Walter de Gruyter Co., Berlin, 1965.

$1,2,...,N_2$.

....

u_{i8}: valor de u en el vértice 8-cúbico i_8-ésimo, siendo $i_8 = 1,2,...,N_8$.

y en donde las fórmulas (18) y (19) admiten un error infinitesimal del orden de $k^7/4!$. Este calos del error se deduce de la fórmula (16) y observando que se trata de una integral triple. La fórmula (19) puede ser llamada *Fórmula de Simpson tridimensional* en un poliedro policúbico de calibre k.

12. Diremos que un poliedro policúbico P ciñe un sólido K con ajuste k cuando se dan las siguientes condiciones:

a) En los espacios vacíos que haya en el interior de K no se puede construir ningún cubo adicional a los de P y que siga interior a K.

b) Ningún cubo de P es exterior del todo a K.

c) Si hay algún cubo que pertenece tanto al interior como al exterior de K, ningún punto interior a ese cubo y exterior a K debe distar de la superficie S más de $\sqrt{3}\ k/2$.

d) Si hay partes de K exteriores a P que pudieran quedar incluidas con exceso por un nuevo cubo yuxtapuesto a P, ningún punto de S debe distar de P más que $\sqrt{3}\ k/2$.

13. Según lo anterior, podemos construir el siguiente algoritmo para calcular el valor numérico, siquiera aproximado, de un integral triple como el de la expresión (19):

a) Examinar y describir detalladamente el sólido K.

b) Medir o estimar la distancia mas corta entre dos puntos cualesquiera de su superficie S. Sea m esta distancia mínima.

c) Adoptar la unidad de longitud L para medir las coordenadas. La unidad puede ser 1 angstrom, 1 milímetro, 1 centímetro, 1 pulgada, etc., hasta 1 unidad astronómica o 1 parsec. Es conveniente elegir L, ojalá, de manera que 0.2m $< L <$ 5m.

d) Adoptar para k un valor k_1. Como norma práctica es conveniente tomar $k_1 = 0.8L$.

e) Construir una red policúbica P de calibre k_1, que ciña a K. En el caso de formas muy arbitrarias e irregulares de K, esta construcción geométrica puede ser laboriosa, pero es siempre posible.

f) Contar el número N de cubos en la red P. En aplicaciones prácticas, es deseable que N sea, a lo sumo, del orden de algunas decenas y no más de una centena.

g) Recorrer sistemáticamente todos los nodos de la red y anotar en cada nodo el número de cubos de P a que pertenece. Dicho número puede ser de uno (1) a ocho (8).

h1) Contar el número N_1 de nodos 1-cúbicos.

h2) Contar el número N_2 de nodos 2-cúbicos.

....

h8) Contar el número N_8 de nodos 8-cúbicos.

i) Verificar que $N_1+2N_2+...+8N_8 = 8N$.

j1) En los centros de cada uno de los N cubos de P, calcular numéricamente o medir experimentalmente el valor de la función u que le corresponde. Cada uno de esos valores se denota u_i, con $i = 1,2,...,N$.

j2) Hacer lo mismo en cada uno de los N_1 nodos 1-cúbicos. Los valores de u se denotan u_{i1}, con $i_1 = 1,2,...,N_1$.

j3) Hacer lo mismo para los nodos 2-cúbicos de P.

....

j9) Hacer lo mismo para los nodos 8-cúbicos de P.

k1) Formar la suma $S_o = \sum_{i=1}^{N} u_i$.

k2) Formar la suma $S_1 = \sum_{i_1=1}^{N_1} u_{i1}$.

....

k9) Formar la sima $S_8 = \sum_{i_s=1}^{N_S} u_{i8}$.

l) Calcular la expresión:

$$(k_1^3/24)(16S_o+S_1+2S_2+...+8S_8) = J_1.$$

m) J_1 es un primer estimativo aproximado de

$$\iiint u(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

en el sólido K, con un error del orden de $k^7/4!$.

n) Si desea mejorar la exactitud lograda, continúe con los pasos siguientes. Si nó, termine aquí.

ñ) Si quiere mejorar la exactitud, adopte un nuevo valor de k. Es muy recomendable que ese nuevo valor sea $k_2 = k_1/2 = 0.4L$, este método de bisección da lugar, frecuentemente a una convergencia rápida del algoritmo.

o) Reíta con k_2 todos los pasos desde (e) hasta (l).

p) Calcule J_2. Este es un mejor estimativo para el integral triple.

q) Compare J_1 y J_2. Si la mejora en exactitud es suficiente, pare aquí. De lo contrario tome otro valor k_3, que ojalá sea $k_3 = k_2/2 = k_1/4 = 0.2L$.

r) Repita todos los pasos desde (e) hasta (l).

s) Continue reiterativamente.

t) Forme la sucesión convergente $J_1, J_2, J_3, \ldots\ldots$

u) Señale el error porcentual ε que está dispuesto a admitir en el cálculo del integral triple. En las aplicaciones es corriente adoptar $\varepsilon = 5\%$, o bien $\varepsilon = 1\%$, o bien $\varepsilon = 1$ por mil, por convenciones prácticas.

v) Suspenda el cálculo en el ciclo n-ésimo tal que $|J_{n+1} - J_n| < \varepsilon J_n$ donde ε es el error numérico porcentual admisible para su cálculo.

w) Concluya que la integral que busca, vale

$$\iiint_K u(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = J_n.$$

x) El valor exacto del integral triple es el límite de la sucesión $J_1, J_2, \ldots, J_n, J_{n+1}, \ldots$

14. La fórmula que hemos encontrado sirve también para calcular integrales de superficie para campos vectoriales, como los que se usan en Física para representar caudales o flujos, usando el teorema de Gauss-Ostrogradski sobre la divergencia, y según el cual el integral de un campo H(x,y,z)

$$\iint H(x,y,z).dS$$

sobre una superficie S orientable y cerrada en E^3 es equivalente al integral

$$\iiint \operatorname{div} H.dx.dy.dz$$

tomado sobre el volumen que está encerrado por S.

15. Se dejan para los lectores curiosos, o para alumnos avanzados de Matemáticas, Ingeniería o Física, algunos ejercicios que surgen de este trabajo, como los siguientes:

a) Elaborar un programa de computador para el algoritmo que describimos en el número 13.

b) Aplicar estas ideas para deducir la fórmula de Simpson en E^4.

c) Deducir la fórmula de Simpson en E^n.

d) Obtener algunas otras relaciones que deben cumplir entre sí $N_1, N_2, \ldots, N_8, N$.

e) Elaborar un esquema tabular para describir numéricamente el cuerpo humano.

Nota. Es bien sabido que existen en la literatura usual otras fórmulas para estimar numéricamente el valor de un integral triple sobre un cubo. Entre ellas están las llamadas fórmulas de Gauss, las cuales pueden obtenerse por dos caminos: **a)** formando el "producto cartesiano" de una fórmula de Gauss en una dimensión, para aplicarla en tres dimensiones; **b)** aplicando sobre tres dimensiones y tres variables el mismo algoritmo que conduce a fórmulas de Gauss en una dimensión.

Para el caso del cubo C que hemos considerado, con sus ocho vértices en los puntos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$, la fórmula que mejor se adapta para estimar el integral triple de la expresión (03), de las que se conocen en la literatura, es la fórmula gaussiana en producto cartesiano sobre 8 puntos:

$$I = u_1 + u_2 + \ldots + u_8 \qquad (20)$$

en donde $u_1, \ldots, u_8$ son los valores de la función $u(x,y,z)$ que se integra, medidos o calculados sobre los 8 puntos $x = \pm\sqrt{3}/3$, $y = \pm\sqrt{3}/3$, $z = \pm\sqrt{3}/3$. En general, las fórmulas gaussianas, así como la que hemos deducido en este artículo son combinaciones lineales de los valores $u(x_i, y_i, z_i)$ de la función que se integra, $u(x,y,z)$, con coeficientes A_i, para N puntos de la región de integración, o sea, que son expresiones de la forma

$$\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot u(x_i, y_i, z_i)$$

en donde los coeficientes A_i y los puntos x_i, y_i, z_i se calculan obligando a la fórmula a ser idéntica al integral triple.

$$\iiint u(x,y,z)\,dx\,.dy.\,dz$$

poniendo en lugar de u las sucesivas funciones x,y,z, xy, zx, x^2, y^2, xy^2, yz^2, zx^2, etc.

La fórmula gaussiana (20) satisface con exactitud las integrales triples de polinomios de x,y,z hasta el tercer grado. Esto mismo ocurre con la fórmula aquí propuesta, como se desprende del procedimiento que hemos usado para construir el polinomio v (x,y,z) dado por la expresión (04). Por lo tanto esa fórmula gaussiana podría "competir" con la nuestra para calcular el integral sobre el cubo C.

Pero al calcular sobre un sólido cualquiera, de forma caprichosa, nuestra fórmula tiene una gran ventaja práctica. En efecto, al inscribir ese sólido en un poliedro policúbico, la estimación de un integral triple con nuestra fórmula exige medir o calcular numéricamente el valor de u(x,y,z) en los nodos de la red y en los centros de sus cubos elementales, esto es, en $N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N = M$ puntos. En cambio, con la fórmula gaussiana sería necesario medir o calcular la función u(x,y,z) en 8N puntos, y para redes policúbicas conexas se puede demostrar fácilmente que

$$8N > M$$

usando el método de inducción completa.

BIBLIOGRARIA

[1] Courant, R. y Fritz, J., *Introduction to Calculus and Analysis. Vol. 1*. New York. Interscience Publishers. 1965. 649 p.

[2] Ralston, A., A *First course in numerical analysis*. New York. McGraw Hill Book Company. 1965. 578 p.

[3] Poveda, G., *Una fórmula de cubicación sobre el plano*. En "Dyna". Nº 90. Medellín. Agosto de 1975.

[4] Hammer, P.C., *Numerical evaluation of multiple integrals*. En: Langer, Rudolph (Ed.) "On numerical aproximation". Madison (Wis.). The University of Wisconsin Press. 1959. 462 p.

*

Apartado Aéreo 53028

Medellín, Colombia

(Recibido en noviembre de 1986, versión revisada en marzo de 1987).