EL PRODUCTO ESCALAR EN LA MULTIPLICACION DE POLINOMIOS Y DE SERIES

POR LUIS DE GREIFF BRAVO.

Un polinomio entero de grado l puede expresarse como sigue

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{i=0}^{l} a_{l-i}\, x^{i},$$

que corresponde a la forma explícita

$$f(x) = a_l + a_{l-1}\, x + \cdots + a_0 x^l,$$

obtenida al reemplazar i por los enteros $0, 1, 2, \ldots, l$. Puede ocurrir que varios coeficientes sean nulos.

Sea, por otra parte, el polinomio de grado k,

$$(2) \qquad \varphi(x) = \sum_{j=0}^{k} b_{k-j}\, x^{j}.$$

El producto de (1) por (2) vale

$$f(x)\varphi(x) = \Big(\sum_{i=0}^{l} a_{l-i}\, x^{i}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{k} b_{k-j}\, x^{j}\Big),$$

o sea,

$$(3) \qquad f(x)\varphi(x) = \sum_{i=0}^{l} \sum_{j=0}^{k} a_{l-i}\, b_{k-j}\, x^{i+j}$$

Pasamos a calcular el coeficiente que contiene x^h en el producto. Para ello se escribe

$$(4) \qquad i + j = h.$$

Entonces la sumatoria doble que aparece en (3), se reduce a una sumatoria simple, con i como variable. Puesto que $j = h - i$, podremos expresar el coeficiente de x^h a la derecha de (3) así:

(5) $$c_{k+l-h} = \sum_{i=0}^{h} a_{l-i}\, b_{k-h+i}$$

y la (3) misma quedará expresada como sigue,

(6) $$f(x)\varphi(x) = \sum_{h=0}^{k+l} c_{k+l-h}\, x^h.$$

Ejemplo. Valorar el coeficiente de x^3 en el producto de los dos siguientes polinomios,

$$f(x) = a_7 + a_6 x + \ldots + a_0 x^7,$$
$$\phi(x) = b_5 + b_4 x + \ldots + b_0 x^5.$$

En este caso tenemos $l = 7$, $k = 5$, $h = 3$. Con lo cual

$$c_9 = \sum_{i=0}^{3} a_{7-i} b_{2+i} = a_7 b_2 + a_6 b_3 + a_5 b_4 + a_4 b_5.$$

Aplicación. Desarrollo binómico con exponente entero positivo.

Sea el desarrollo binómico para exponente entero

(7) $$(x+a)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} x^{p-i} a^i.$$

Sea también

(8) $$(x+a)^l = \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} x^{l-j} a^j.$$

El producto de las (7) y (8) es

(9) $$(x+a)^{p+l} = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{l} \binom{p}{i}\binom{l}{j} x^{p+l-i-j} a^{i+j}.$$

En este producto tenemos que el coeficiente de $x^{p+l-h}\,a^h$, obtenido al hacer $i + j = h$, vale

$$(10) \qquad \sum_{i=0}^{h} \binom{p}{i}\binom{l}{h-i}.$$

Mas, como por otra parte, es

$$(11) \qquad (x+a)^{p+l} = \sum_{h=0}^{p+l} \binom{p+l}{h} x^{p+l-h} a^h,$$

se deduce, al igualar coeficientes en (9) y (11)

$$(12) \qquad \binom{p+l}{h} = \sum_{i=0}^{h} \binom{p}{i}\binom{l}{h-i}.$$

Aplicación. Calcularemos la (12) para $p = 5$, $l = 8$, $h = 3$.

$$\binom{13}{3} = \sum_{i=0}^{3} \binom{5}{i}\binom{8}{3-i} = \binom{5}{0}\binom{8}{3} + \binom{5}{1}\binom{8}{2} + \binom{5}{2}\binom{8}{1} + \binom{5}{3}\binom{8}{0},$$

$$\frac{13.12.11}{1.2.3} = \frac{8!}{5!\,3!} + \frac{5.8.7}{2!} + \frac{5.4.8}{2!} + \frac{5.4.3}{3!} =$$

$$= 56 + 140 + 80 + 10 = 286.$$

División de polinomios. Se consideran ordenados según las potencias crecientes de la variable x. La división en cuanto se refiere al algoritmo, consiste en la determinación de c_h en la siguiente relación:

$$(13) \qquad \frac{\sum_{j=0}^{m} a_j x^j}{\sum_{i=0}^{p} b_i x^i} = \sum_{h=0}^{\infty} c_h x^h.$$

De la cual se deduce,

$$\sum_{j=0}^{m} a_j x^j = \left(\sum_{i=0}^{p} b_i x^i\right)\left(\sum_{h=0}^{\infty} c_h x^h\right) = \sum_{i=0}^{p} \sum_{h=0}^{\infty} b_i c_h x^{i+h}.$$

Procedemos a calcular el coeficiente correspondiente a $i + h = k$. Distinguiremos dos casos.

1º $k \leqslant m$. Entonces

$$a_k = \sum_{i=0}^{k} b_i c_{k-i}.$$

2º $k > m$. Entonces

$$0 = \sum_{i=0}^{k} b_i c_{k-i}.$$

Se obtienen los c_h por resolución de un sistema triangular. A saber

$$a_0 = b_0 \, c_0,$$

$$a_1 = \sum_{i=0}^{1} b_i c_{1-i} = b_0 \, c_1 + b_1 \, c_0,$$

$$a_2 = \sum_{i=0}^{2} b_i c_{2-i} = b_0 \, c_2 + b_1 \, c_1 + b_2 \, c_0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a_k = \sum_{i=0}^{k} b_i \, c_{k-i} = b_0 c_k + b_1 c_{k-1} + \cdots + b_k c_0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Con $a_k = 0$ para todo $k > m$.

Productos de series potenciales. Una serie de potencias puede ser representada por la siguiente expresión

(14) $$f(x) = \sum_{i=p}^{\infty} a_i x^i \qquad (i \text{ entero}).$$

Consideraremos ahora solamente el caso en que la serie empieza por un término independiente de la variable, a saber, cuando es $p = 0$.

Si por otra parte se tiene la serie

(15) $$f_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \qquad (j \text{ entero}),$$

el producto de las dos funciones definidas por las mismas, supuestas absolutamente convergentes, será

$$(16) \qquad f(x)f_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j x^{i+j}.$$

En el producto (16) interesa saber calcular el coeficiente del término general, a saber el coeficiente de x^k. Si $i + j = k$, en que k es entero, se deduce $j = k - i$, de modo que el coeficiente se puede calcular con una sola sumatoria. Será

$$(17) \qquad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

La serie producto, dado en (16), cabe expresarse así:

$$(18) \qquad f(x)\cdot f_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

Veamos algunas consecuencias de la fórmula (17). Sea el caso del desarrollo de la función exponencial e^x. Puede escribirse

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}, \quad e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}; \quad a_i = \frac{1}{i!}, \quad b_j = \frac{1}{j!}$$

El coeficiente de x^k, en el producto vale

$$\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}\,\frac{1}{(k-i)!}.$$

Pero en el desarrollo de e^{2x}, el coeficiente de x^k será evidentemente

$$\frac{2^k}{k!}.$$

Se concluye la siguiente fórmula del análisis combinatorio

$$(19) \qquad \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}\,\frac{1}{(k-i)!} = \frac{2^k}{k!}$$

y, multiplicando por $k!$,

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} = 2^k.$$

Explícitamente escrita

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \ldots + \binom{k}{k} = 2^k.$$

Otra relación interesante es suministrada por la fórmula duplicatoria de la función *sen x*. Se tiene

$$sen\, x = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\,;\; cos\, x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}\;;$$

por consiguiente

$$sen\, 2x = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{2^{2h+1} x^{2h+1}}{(2h+1)!} =$$

$$= 2\, sen\, x\, cos\, x = 2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \frac{x^{2i+2j+1}}{(2i+1)!\,(2j)!}.$$

Debe tenerse $2i + 2j + 1 = 2h + 1$, es decir $2j = 2h - 2i$. Igualando coeficientes se obtiene

$$(-1)^h \frac{2^{2h+1}}{(2h+1)!} = 2 \sum_{i=0}^{h} \frac{(-1)^h}{(2i+1)!\,(2h-2i)!},$$

pero como $(-1)^h$ cabe simplificarse, se llega al siguiente resultado

$$\frac{2^{2h}}{(2h+1)!} = \sum_{i=0}^{h} \frac{1}{(2i+1)!\,(2h-2i)!}$$

o, finalmente,

$$(20) \qquad 2^{2h} = \sum_{i=0}^{h} \frac{(2h+1)!}{(2i+1)!\,(2h-2i)!} = \sum_{i=0}^{h} \binom{2h+1}{2i+1}.$$

Comprobación. Sea $h = 4$. El segundo miembro vale

$$\sum_{i=0}^{4}\binom{9}{2i+1} = \binom{9}{1}+\binom{9}{3}+\binom{9}{5}+\binom{9}{7}+\binom{9}{9}=$$

$$= 9 + 84 + 126 + 36 + 1 = 256$$

que es efectivamente el valor de 2^8.