SOBRE GEOMETRIA ANALITICA DE "LUGARES COMPUESTOS" II.

Por Carlos Federici Casa.

En el artículo precedente [Vol. I., pp. 55-69] hemos comenzado a ver cómo la aplicación de la función "valor absoluto de" nos permite la representación analítica de lugares geométricos muy sencillos pero que no pueden ser representados sencillamente sino con el uso de dicha función.

En esta segunda parte queremos tratar de una manera un poco más general que en la precedente, esta función y precisamente queremos estudiar en primer lugar los "lugares compuestos" (abreviado por l. c.) representados por ecuaciones del tipo tales que

$$y = \sum_{k=1}^{n} a_k \left| x - b_k \right| + ax + b =$$

$$= a_1 \left| x - b_1 \right| + \ldots + a_n \left| x - b_n \right| + ax + b,$$

con las condiciones de que

$$- \infty < b_1 < \ldots . < b_n < + \infty .$$

Cuando $- \infty < x < b_1$, entonces $x < b_1, \ldots, x < b_n$, es decir que $x - b_1 < 0, \ldots, x - b_n < 0$ y por lo tanto que

$$\left| x - b_1 \right| = b_1 - x, \ldots, \left| x - b_n \right| = b_n - x,$$

así que

$$y = a_1 \left| x - b_1 \right| + \ldots + a_n \left| x - b_n \right| + ax + b =$$

$$= a_1 (b_1 - x) + \ldots + a_n (b_n - x) + ax + b =$$

$$= - (a_1 + \ldots + a_n - a) x + (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n + b) = y,$$

o sea que, cuando $- \infty < x < b_1$, entonces

$$y = -(a_1 + \ldots + a_n - a)x + (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n + b)$$

y por lo tanto el punto P de imagen analítica (x, y) y que pertenece al l. c., describe la semirrecta de ecuación

$$y = -(a_1 + \ldots + a_n - a)\, x + (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n + b)$$

con punto de detención tal que

$$x = b_1,\ y = \sum_{k=1}^{n} a_k \, |b_1 - b_k| + ab_1 + b = c_1.$$

Cuando $b_h < x < b_{h+1}$, y $1 \leqslant h \leqslant n-1$, entonces

$$x - b_1 > 0, \ldots, x - b_h > 0,\ x - b_{h+1} < 0, \ldots, x - b_n < 0$$

y por lo tanto

$$|x - b_1| = x - b_1, \ldots, |x - b_h| = x - b_h,\ |x - b_{h+1}| =$$
$$= b_{h+1} - x, \ldots, |x - b_n| = b_n - x,$$

así que

$$y = a_1 |x - b_1| + \ldots + a_n |x - b_n| + ax + b =$$
$$= a_1 (x - b_1) + \ldots + a_h (x - b_h) + a_{h+1}(b_{h+1} - x) +$$
$$+ \ldots + a_n (b_n - x) + ax + b =$$
$$= (a_1 + \ldots + a_h - a_{h+1} - \ldots - a_n + a)\, x -$$
$$- (a_1 b_1 + \ldots + a_h b_h - a_{h+1} b_{h+1} - \ldots - a_n b_n - b)$$

o sea que, cuando $b_h < x < b_{h+1}$, entonces

$$y = (a_1 + \ldots + a_h - a_{h+1} - \ldots - a_n + a)\, x -$$
$$- (a_1 b_1 + \ldots + a_h b_h - a_{h+1} b_{h+1} - \ldots$$
$$- a_n b_n - b)$$

y por lo tanto el punto P de imagen analítica (x, y) y que pertenece al l. c., describe el segmento de ecuación

$$y = (a_1 + \ldots + a_h - a_{h+1} - \ldots - a_n + a)\, x - (a_1 b_1 + \ldots$$
$$+ a_h b_h - a_{h+1} b_{h+1} - \ldots - a_n b_n - b)$$

con los puntos de detención (extremos) tales que

$$x = b_h \ , \ y = \sum_{k=1}^{n} a_k \ |b_h - b_k| + ab_h + b = c_h \ ;$$

$$x = b_{h+1}, \ y = \sum_{k=1}^{n} a_k \ |b_{h+1} - b_k| + ab_{h+1} + b = c_{h+1} .$$

Cuando $b_n < x < +\infty$, entonces $b_1 < x, \ldots, b_n < x$, es decir que

$$0 < x - b_1, \ldots, 0 < x - b_n$$

y por lo tanto que

$$|x - b_1| = x - b_1, \ldots, |x - b_n| = x - b_n \ ,$$

así que

$$y = a_1 |x - b_1| + \ldots + a_n \ |x - b_n| + ax + b =$$
$$= a_1 (x - b_1) + \ldots + a_n \ (x - b_n) + ax + b =$$
$$= (a_1 + \ldots + a_n + a) x - (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n - b) = y$$

o sea que, cuando $b_n < x < +\infty$, entonces

$$y = (a_1 + \ldots + a_n + a) x - (a_1 b_1 + \ldots + a_n \ b_n - b)$$

y por lo tanto el punto P de imagen analítica (x, y) y que pertenece al 1. c., describe la semirrecta de ecuación

$$y = (a_1 + \ldots + a_n + a) x - (a_1 b_1 + \ldots + a_n \ b_n - b)$$

con punto de detención (extremo) tal que

$$x = b_n \ , \ y = \sum_{k=1}^{n} a_k \ |b_n - b_k| + ab_n + b = c_n \ .$$

De lo anterior podemos concluir que *el lugar geométrico cuya imagen analítica es la ecuación (en forma explícita)*

$$y = \sum_{k=1}^{n} a_k \ |x - b_k| + ax + b =$$
$$= a_1 |x - b_1| + \ldots + a_n \ |x - b_n| + ax + b$$

con las condiciones $-\infty < b_1 < \ldots < b_n < +\infty$ *es un lugar compuesto por la semirrecta de ecuación*

$$y = -(a_1 + \ldots + a_n - a)\, x + (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n + b)$$

con punto de detención (o desviador) D_1 *tal que*

$$x = b_1,\ y = \sum_{k=1}^{n} a_k\, |b_1 - b_k| + ab_1 + b = c_1,$$

los n — 1 *segmentos* D_h, D_{h+1} $(1 \leqslant h \leqslant n-1)$ *de ecuación*

$$\begin{gathered} y = (a_1 + \ldots + a_h - a_{h+1} - \ldots \\ - a_n + a)\, x - (a_1 b_1 + \ldots + a_h b_h - \\ - a_{h+1} b_{h+1} - \ldots - a_n b_n - b) \end{gathered}$$

y con puntos de detención (extremos o desviadores) D_h, D_{h+1} *tales que*

$$x = b_h,\ y = \sum_{k=1}^{n} a_k\, |b_h - b_k| + ab_h + b = c_h,$$

$$x = b_{h+1},\ y = \sum_{k=1}^{n} a_k\, |b_{h+1} - b_k| + ab_{h+1} + b = c_{h+1},$$

y finalmente la semirrecta de ecuación

$$y = (a_1 + \ldots + a_n + a)\, x - (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n - b)$$

con punto de detención (extremo o desviador) D_n *tal que*

$$x = b_n,\ y = \sum_{k=1}^{n} a_k\, |b_n - b_k| + ab_n + b = c_n.$$

Como aplicación directa de lo visto vamos a estudiar el l. c. representado por la ecuación

$$y = -(1/2)\, |x+1| - |x| + (1/2)\, |x-1| + |x-2| + 2x + 1.$$

Las abscisas de los puntos de desviación son respectivamente $b_1 = -1$, $b_2 = 0$, $b_3 = 1$, $b_4 = 2$ y las ordenadas respectivas son

$$c_1 = -(1/2)\ |-1+1| - |-1| + (1/2)\ |-1-1| + \\ + |-1-2| + 2(-1) + 1 = 2,$$

$$c_2 = -(1/2)\ |0+1| - |0| + (1/2)\ |0-1| + |0-2| + \\ + 2.0 + 1 = 3,$$

$$c_3 = -(1/2)\ |1+1| - |1| + (1/2)\ |1-1| + |1-2| + \\ + 2.1 + 1 = 2,$$

$$c_4 = -(1/2)\ |2+1| - |2| + (1/2)\ |2-1| + |2-2| + \\ + 2.2 + 1 = 2.$$

Cuando $-\infty < x < -1$, entonces

$$|x+1| = -1-x,\ |x| = -x,\ |x-1| = 1-x,\ |x-2| = 2-x,$$

de manera que

$$y = (-1/2)\ |x+1| - |x| + (1/2)\ |x-1| + |x-2| + 2x + 1 = \\ = (-1/2)\ (-1-x) - (-x) + (1/2)\ (1-x) + (2-x) + \\ + 2x + 1 = (1 + x + 2x + 1 - x + 4 - 2x + 4x + 2)/2 = \\ = 2x - 4 = y.$$

Cuando $+2 < x < \infty$, entonces

$$|x+1| = x+1,\quad |x| = x,\quad |x-1| = x-1,\quad |x-2| = x-2,$$

de manera que

$$y = (-1/2)\ |x+1| - |x| + (1/2)\ |x-1| + |x-2| + \\ + 2x + 1 = (-1/2)\ (x+1) - x + (1/2)\ (x-1) + \\ + (x-2) + 2x + 1 = (-x - 1 - 2x + x - 1 + 2x - 4 + \\ + 4x + 2)/2 = 2x - 2 = y.$$

Entonces podemos concluir que *el lugar compuesto de ecuación*

$$y = -(1/2)\ |x+1| - |x| + (1/2)\ |x-1| + |x-2| + 2x + 1$$

tiene como imagen geométrica el polígono abierto e infinito cuyos lados son: la semirrecta de ecuación $y = 2x - 4$ *con punto de detención (o extremo desviador)* D_1 *de imagen* $(-1, 2)$, *el segmento de extremos* D_1 $(-1, 2)$, D_2 $(0, 3)$, *el segmento de extremos*

D_2 (0, 3), D_3 (1, 2), el segmento de extremos D_3 (1, 2), D_4 (2, 2) y la semirrecta de ecuación $y = 2x - 2$ con punto de detención (o extremo desviador) D_4 de imagen (2, 2) (véase figura 1).

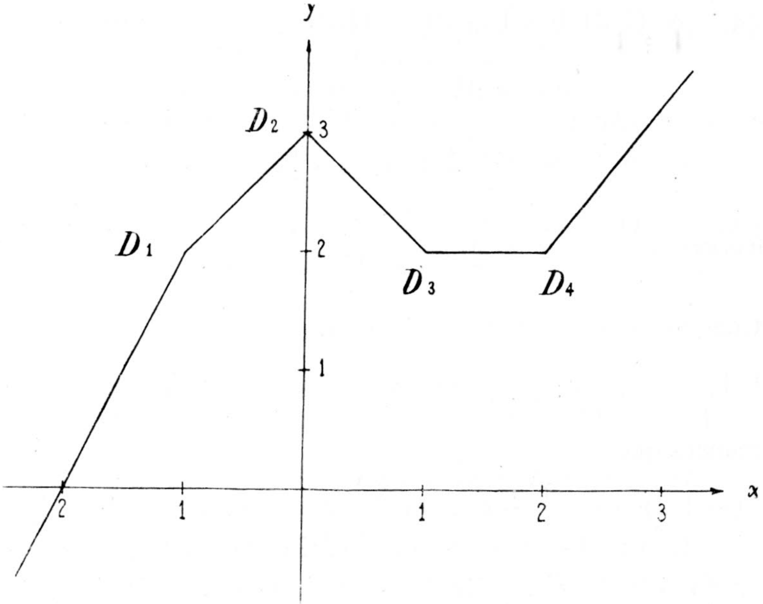

Figura 1

Como aplicación inversa de lo visto vamos a buscar la ecuación del lugar compuesto constituído por (véase figura 2): la semirrecta que pasa por el punto (— 10, 12) y tiene como punto de detención (o extremo desviador) a D_1 (—7, 5), el segmento que tiene como extremos (desviadores) a

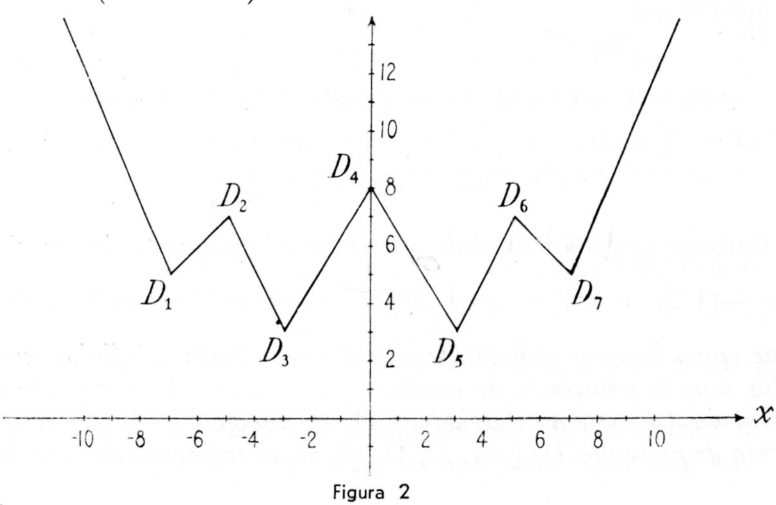

Figura 2

D_1 (—7, 5), D_2 (—5, 7), el segmento que tiene como extremos (desviadores) a D_2 (—5, 7), D_3 (—3, 3), el segmento que tiene como extremos (desviadores) a D_3 (—3, 3), D_4 (0, 8), el segmento que tiene como extremos (desviadores) a D_4 (0, 8), D_5 (3, 3), el segmento que tiene como extremos (desviadores) a D_5 (3, 3), D_6 (5, 7), el segmento que tiene como extremos (desviadores) a D_6 (5, 7), D_7 (7, 5) y la semirrecta que pasa por el punto (10, 12) y tiene como punto de detención (o extremo desviador) a D_7 (7, 5).

Como la ecuación general de un polígono abierto infinito es del tipo

$$y = \sum_{k=1}^{n} a_k \, |x - b_k| + ax + b$$

en donde b_k ($k = 1, \ldots, n$) son las abscisas de los puntos de desviación (con la condición $-\infty < b_1 < \ldots < b_n < +\infty$), puntos que en el caso nuestro son

$$(-7, 5), (-5, 7), (-3, 3), (0, 8), (3, 3), (5, 7), (7, 5),$$

entonces la ecuación que estamos buscando tiene que ser del tipo

$$y = a_1 |x + 7| + a_2 |x + 5| + a_3 |x + 3| + a_4 |x| + \\ + a_5 |x - 3| + a_6 |x - 5| + a_7 |x - 7| + ax + b$$

y para encontrar los valores de a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a, b, es suficiente imponer las condiciones de que dicho polígono pase por los puntos

$$(-10, 12), (-7, 5), (-5, 7), (-3, 3), (0, 8), \\ (3, 3), (5, 7), (7, 5), (10, 12),$$

lo que nos da el siguiente sistema lineal de 9 ecuaciones con 9 incógnitas (nótese que la ecuación en la cual x e y se sustituyen por las coordenadas de los 9 puntos citados, es

$$0 = a_1 |x + 7| + a_2 |x + 5| + a_3 |x + 3| + a_4 |x| + \\ + a_5 |x - 3| + a_6 |x - 5| + a_7 |x - 7| + ax + b).$$

$$\text{(I) } 0 = 3a_1 + 5a_2 + 7a_3 + 10a_4 + 13a_5 + 15a_6 + 17a_7 - 10a + \\ + b - 12,$$

$$(\text{II})\ 0 = 2a_2 + 4a_3 + 7a_4 + 10a_5 + 12a_6 + 14a_7 - 7a + b - 5,$$

$$(\text{III})\ 0 = 2a_1 + 2a_3 + 5a_4 + 8a_5 + 10a_6 + 12a_7 - 5a + b - 7,$$

$$(\text{IV})\ 0 = 4a_1 + 2a_2 + 3a_4 + 6a_5 + 8a_6 + 12a_7 - 3a + b - 3,$$

$$(\text{V})\ 0 = 7a_1 + 5a_2 + 3a_3 + \qquad 3a_5 + 5a_6 + 7a_7 + \qquad b - 8,$$

$$(\text{VI})\ 0 = 10a_1 + 8a_2 + 6a_3 + 3a_4 + \qquad 2a_6 + 4a_7 + 3a + \\ + b - 3,$$

$$(\text{VII})\ 0 = 12a_1 + 10a_2 + 8a_3 + 5a_4 + 2a_5 + \qquad 2a_7 + 5a + \\ + b - 7,$$

$$(\text{VIII})\ 0 = 14a_1 + 12a_2 + 10a_3 + 7a_4 + 4a_5 + 2a_6 + \qquad 7a + \\ + b - 5,$$

$$(\text{IX})\ 0 = 17a_1 + 15a_2 + 13a_3 + 10a_4 + 7a_5 + 5a_6 + 3a_7 + 10a + \\ + b - 12.$$

Una guía de la manera de resolver rápidamente este sistema es la siguiente (en donde los números romanos indican las ecuaciones respectivas):

$$(\text{II} + \text{VIII})/14 - (\text{I} + \text{IX})/20 \rightarrow \\ 0 = (3b + 34)/70 \rightarrow b = -34/3$$

$$(\text{VIII} - \text{II})/14 - (\text{IX} - \text{I})/14 \rightarrow 0 = 17a/7 \rightarrow a = 0$$

$$(\text{VI} - \text{IV})/6 - (\text{VII} - \text{III})/10 \rightarrow \\ 0 = 2(a_3 - a_5)/5 \rightarrow a_5 = a_3$$

$$(\text{VII} - \text{III})/10 - (\text{VIII} - \text{II})/14 \rightarrow 0 = 2(a_2 - a_6)/7 + \\ + 6(a_3 - a_5)/35 \rightarrow a_6 = a_2$$

$$(\text{VI} - \text{IV})/6 \rightarrow 0 = (a_1 - a_7) + (a_2 - a_6) + (a_3 - a_5) + \\ + a \rightarrow a_7 = a_1$$

e introduciendo estas condiciones

$$b = -34/3,\ a = 0,\ a_5 = a_3,\ a_6 = a_2,\ a_7 = a_1$$

en el sistema, éste se reduce a

$$\text{(I}'\text{)} \qquad 0 = 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4 - 7/3,$$

$$\text{(II}'\text{)} \qquad 0 = 14a_1 + 10a_2 + 10a_3 + 5a_4 - 55/3,$$

$$\text{(III}'\text{)} \qquad 0 = 14a_1 + 10a_2 + 6a_3 + 3a_4 - 43/3,$$

$$\text{(IV}'\text{)} \qquad 0 = 14a_1 + 10a_2 + 6a_3 - 58/3,$$

donde (I′) es la reducción de (I), (II), (VIII), (IX); (II′) la reducción de (III), (VII); (III′) la reducción de (IV), (VI); (IV′) es la reducción de (V). Siempre usando el mismo simbolismo, se deduce fácilmente que

$$\text{III}' - \text{IV}' \longrightarrow 0 = 3a_4 + 15/3 = 3a_4 + 5 \longrightarrow a_4 = -5/3,$$

$$\text{II}' - \text{III}' \longrightarrow 0 = 4a_3 + 2a_4 - 4 = 4a_3 - 22/3 \longrightarrow a_3 = 11/6,$$

$$\text{II}' - 5\,.\,\text{I}' \longrightarrow 0 = 4a_1 - 20/3 \longrightarrow a_1 = 5/3,$$

$$\text{I}' \longrightarrow a_2 = 7/6 - a_4/2 - a_3 - a_1 \longrightarrow a_2 = -3/2,$$

es decir, el sistema inicial tiene la solución

$$a_1 = 5/3,\ a_2 = -3/2,\ a_3 = 11/6,\ a_4 = -5/3,\ a_5 = 11/6,$$

$$a_6 = -3/2,\ a_7 = 5/3,\ a = 0,\ b = -34/3,$$

de manera que la ecuación del lugar compuesto es la siguiente

$$y = (5/3)\,|x+7| - (3/2)\,|x+5| + (11/6)\,|x+3| -$$

$$- (5/3)\,|x| + (11/6)\,|x-3| - (3/2)\,|x-5| +$$

$$+ (5/3)\,|x-7| - 34/3 = (10\,|x+7| - 9\,|x+5| +$$

$$+ 11\,|x+3| - 10\,|x| + 11\,|x-3| - 9\,|x-5| +$$

$$+ 10\,|x-7| - 68)\,/\,6 = y,$$

o sea, concluyendo, *el lugar compuesto por:*

(1) *la semirrecta que pasa por el punto* (—10, 12) *y que tiene como punto de detención (o extremo desviador) a* D_1 (—7, 5),

(2) *el segmento que tiene como extremos (desviadores) a* D_1 (—7, 5), D_2 (—5, 7),

(3) *el segmento que tiene como extremos (desviadores) a* D_2 (—5, 7), D_3 (—3, 3),

(4) *el segmento que tiene como extremos (desviadores) a* D_3 (—3, 3), D_4 (0, 8),

(5) *el segmento que tiene como extremos (desviadores) a* D_4 (0, 8), D_5 (3, 3),

(6) *el segmento que tiene como extremos (desviadores) a* D_5 (3, 3), D_6 (5, 7),

(7) *el segmento que tiene como extremos (desviadores) a* D_6 (5, 7), D_7 (7, 5),

(8) *la semirrecta que pasa por el punto* (10, 12) *y que tiene como punto de detención (o extremo desviador) a* D_7 (7, 5), *tiene como imagen analítica la siguiente ecuación (en forma explícita)*

$$y = (10\,|x + 7| - 9\,|x + 5| + 11\,|x + 3| - 10\,|x| +$$

$$+ 11\,|x - 3| - 9\,|x - 5| + 10\,|x - 7| - 68)\,/\,6.$$

El otro problema que queremos resolver en este artículo es el siguiente: ¿Cuál es la imagen geométrica del l. c. representado por la ecuación (esencialmente) implícita

$$0 = \sum_{k=1}^{n} d_k\,|a_k\,x + b_k\,y + c_k| + f\;?$$

Para estudiar el lugar geométrico representado por la ecuación dada, vamos a cortar éste con la recta de ecuación $y = ax + b$ y a determinar en qué consiste la intersección misma, que sabemos debe ser el lugar de los puntos (x, y) que satisfacen al sistema

$$0 = \sum_{k=1}^{n} d_k \left| a_k x + b_k y + c_k \right| + f,$$
$$y = ax + b,$$

es decir a la ecuación

$$0 = \sum_{k=1}^{n} d_k \left| a_k x + b_k y + c_k \right| + f =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} d_k \left| a_k x + b_k (ax + b) + c_k \right| + f =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} d_k \left| (a_k + ab_k) x + (c_k + bb_k) \right| + f =$$

(si para todo $1 \leqslant k \leqslant n$, $a_k + ab_k \neq 0$, considere el lector mismo el caso en que para algún $1 \leqslant k \leqslant n$, $a_k + ab_k = 0$)

$$= \sum_{k=1}^{n} d_k \left| a_k + ab_k \right| . \left| x + \right.$$
$$\left. + (c_k + bb_k) / (a_k + ab_k) \right| + f =$$

(si se pone, para simplificar, que para todo $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\overline{d}_k = d_k \left| a_k + ab_k \right|,$$

$$\overline{b}_k = - (c_k + bb_k) / (a_k + ab_k))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \overline{d}_k \left| x - \overline{b}_k \right| + f =$$

(ordenando los términos de $\sum_{k=1}^{n}$ de manera que los $\overline{b}_k$ resulten en orden creciente)

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k{}^* \left| x - b_k{}^* \right| + f = 0,$$

y la ecuación $y = ax + b$, o sea el sistema

$$0 = \sum_{k=1}^{n} a_k{}^* |x - b_k{}^*| + f, \; y = ax + b.$$

La resolución de este sistema se reduce, en total, a la resolución de la ecuación

$$0 = \sum_{k=1}^{n} a_k{}^* |x - b_k{}^*| + f =$$
$$= a_1{}^* |x - b_1{}^*| + \ldots + a_n{}^* |x - b_n{}^*| + f,$$

con $-\infty < b_1{}^* < \ldots < b_n{}^* < +\infty$, resolución bastante sencilla y que dejamos al lector. De la discusión relativa se deduce que
o la recta y el l. c. no tienen ningún punto en común,
o la recta y el l. c. tienen dos puntos comunes coincidentes,
o la recta y el l. c. tienen en común todo un segmento,
y por lo tanto se puede concluir que el l. c. es un polígono simple, convexo o cóncavo, cerrado o abierto.

Como aplicación directa de lo visto vamos a determinar el lugar geométrico l. c., cuya ecuación es:

$$0 = |x - y - 4| + 2|y| + 2|x + y - 2| + 3|x - y + 2| +$$
$$+ 2|2x + y - 11| - 28.$$

Vamos entonces a cortar el l. c. con la recta (desviadora) $0 = x - y - 4$, es decir $y = x - 4$. Las intersecciones son las soluciones del sistema constituído por la ecuación $y = x - 4$ y por la ecuación

$$0 = |x - y - 4| + 2|y| + 2|x + y - 2| + 3|x - y + 2| +$$
$$+ 2|2x + y - 11| - 28 =$$
$$= |x - x + 4 - 4| + 2|x - 4| + 2|x + x - 4 - 2| +$$
$$+ 3|x - x + 4 + 2| + 2|2x + x - 4 - 11| - 28 =$$
$$= 2|x - 4| + 4|x - 3| + 18 + 6|x - 5| - 28 =$$
$$= 4|x - 3| + 2|x - 4| + 6|x - 5| - 10 = 0,$$

es decir por el sistema

$$0 = 2\,|x-3| + |x-4| + 3\,|x-5| - 5, \; y = x - 4.$$

Como x puede variar entre $-\infty$ y ∞ entonces es conveniente dividir dicho intervalo de variación en los 4 subintervalos $(-\infty, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(5, +\infty)$ y estudiar qué sucede en cada uno de ellos. Para $-\infty < x < 3$ entonces $x - 3 < 0$, $x - 4 < 0$, $x - 5 < 0$ y por lo tanto la ecuación en x se transforma como sigue:

$$\begin{aligned} 0 &= 2\,|x-3| + |x-4| + 3\,|x-5| - 5 = \\ &= 2\,(3-x) + (4-x) + 3\,(5-x) - 5 = \\ &= -6x + 20 = 0, \end{aligned}$$

es decir que

$$x = 20/6 = 10/3 = 3 + 1/3 > 3,$$

o sea que la semirrecta de ecuación $y = x - 4$ y punto de detención $x = 3$, $y = 1$ no encuentra al l. c.

Cuando $3 < x < 4$, entonces $0 < x - 3$, $x - 4 < 0$, $x - 5 < 0$ y por lo tanto la ecuación en x se transforma como sigue:

$$\begin{aligned} 0 &= 2\,|x-3| + |x-4| + 3\,|x-5| - 5 = \\ &= 2\,(x-3) + (4-x) + 3\,(5-x) - 5 = \\ &= -2x + 8 = 0, \end{aligned}$$

es decir $x = 8/2 = 4$, o sea que el segmento de ecuación $y = x - 4$ y puntos de detención $x = 3$, $y = -1$ y $x = 4$, $y = 0$ tiene en común con el l. c. únicamente el punto $x = 4$, $y = 0$.

Cuando $4 < x < 5$, entonces $0 < x - 3$, $0 < x - 4$, $x - 5 < 0$ y por lo tanto la ecuación en x se transforma como sigue:

$$\begin{aligned} 0 &= 2\,|x-3| + |x-4| + 3\,|x-5| - 5 = \\ &= 2\,(x-3) + (x-4) + 3\,(5-x) - 5 = \\ &= 0x + 0 = 0, \end{aligned}$$

es decir cualquier x satisface a la ecuación y por lo tanto el segmento de ecuación $y = x - 4$ y puntos de detención $x = 4$, $y = 0$ y $x = 5$, $y = 1$ pertenece como lado al l. c.

Cuando $5 < x < +\infty$, entonces $0 < x - 3$, $0 < x - 4$, $0 < x - 5$ y por lo tanto la ecuación en x se transforma como sigue:

$$0 = 2|x-3| + |x-4| + 3|x-5| - 5 =$$
$$= 2(x-3) + (x-4) + 3(x-5) - 5 =$$
$$= 6x - 30 = 0,$$

es decir $x = 30/6 = 5$, o sea que la semirrecta de ecuación $y = x - 4$ y punto de detención $x = 5$, $y = 1$ tiene en común con el l. c. únicamente el punto $x = 5$, $y = 1$.

Si se repite la misma discusión en las demás rectas desviadoras $0 = y$, $0 = x + y - 2$, $0 = x - y + 2$, $0 = 2x + y - 11$, se encuentra que cada una de ellas es lado del l. c. entre las parejas de puntos (2, 0), (4, 0); (0, 2), (2, 0); (0, 2), (3, 5); (3, 5), (5, 1), de manera que podemos afirmar que *la ecuación esencialmente implícita*

$$0 = |x - y - 4| + 2|y| + 2|x + y - 2| + 3|x - y + 2| +$$
$$+ 2|2x + y - 11| - 28$$

representa al polígono cerrado y convexo de vértices consecutivos (2, 0), (4, 0), (5, 1), (3, 5), (0, 2) (*véase figura* 3).

Figura 3

Como aplicación inversa de lo visto vamos a deducir la ecuación de la estrella de seis puntas, dodecágono equilátero cóncavo, que todo estudiante de la Universidad Nacional conoce muy bien (véase figura 4). Si para mayor sencillez se supone igual a 1 el radio de la circunferencia circunscrita a la estrella, entonces la figura sugiere de inmediato las coordenadas de los vértices 00, 01, 02, 03 y por razones de simetría las coordenadas de los demás vértices 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11.

Si con *ab P* se indica la abscisa del punto P y con *od P* se indica la ordenada del punto P, entonces

$$ab\ 00 = (1/2)/\ cos\ (\pi/6) = (1/2)\ /\ (\sqrt{3}/2) =$$

$$= 2/2\sqrt{3} = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$$

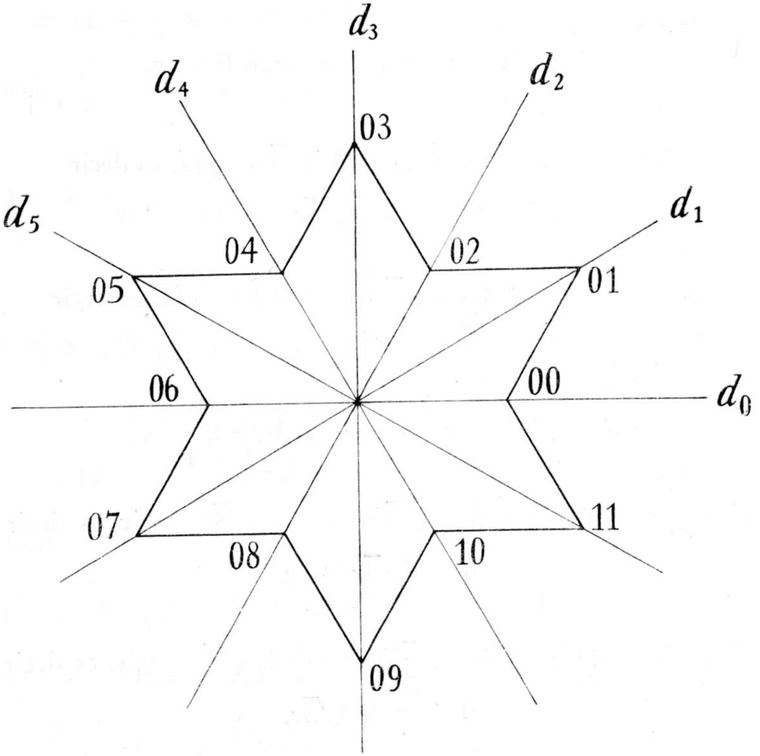

Figura 4

$$od\ 00 = 0$$

$$ab\ 01 = cos\ (\pi/6) = \sqrt{3}/2$$

$$od\ 01 = sen\ (\pi/6) = 1/2$$

$$ab\ 02 = (\sqrt{3}/3)\ .\ cos\ \ (\pi/3) = (\sqrt{3}/3)\ .\ (1/2) = \sqrt{3}/6$$

$$od\ 02 = (\sqrt{3}/3)\ .\ sen\ (\pi/3) = (\sqrt{3}/3)\ .\ (\sqrt{3}/2) = 1/2$$

$$ab\ 03 = 0$$

$$od\ 03 = 1$$

y por lo tanto 00($\sqrt{3}/3$, 0), 01($\sqrt{3}/2$, 1/2), 02($\sqrt{3}/6$, 1/2), 03(0, 1), 04($-\sqrt{3}/6$, 1/2), 05($-\sqrt{3}/2$, 1/2), de manera que las ecuaciones de las rectas desviadoras d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 son tales que

$$d_0 : y/x = 0 = y/x, \text{ es decir } 0 = y,$$

$$d_1 : y/x = (1/2) \ / \ (\sqrt{3}/2) = 1/\sqrt{3} = y/x, \text{ es decir}$$
$$0 = x - \sqrt{3}y,$$

$$d_2 : y/x = (1/2) \ / \ (\sqrt{3}/6) = \sqrt{3} = y/x, \text{ es decir}$$
$$0 = \sqrt{3}x - y,$$

$$d_3 : y/x = \infty = y/x, \text{ es decir } 0 = x,$$

$$d_4 : y/x = (1/2) \ / \ (-\sqrt{3}/6) = -\sqrt{3} = y/x, \text{ es decir}$$
$$0 = \sqrt{3}x + y,$$

$$d_5 : y/x = (1/2) \ / \ (-\sqrt{3}/2) = -1/\sqrt{3} = y/x, \text{ es decir}$$
$$0 = x + \sqrt{3}y.$$

Entonces la ecuación de la estrella tiene que ser del tipo

$$(*) \quad 0 = a\,|y| + b\,|x - \sqrt{3}y| + c\,|\sqrt{3}x - y| + d\,|x| +$$
$$+ e\,|\sqrt{3}x + y| + f\,|x + \sqrt{3}y| + g,$$

en donde a, b, c, d, e, f, g son 7 incógnitas cuyos valores se determinan imponiendo las condiciones de que la línea representada por la ecuación (*) pase por los puntos 00, 01, 02, 03, 04, 05, es decir, por las condiciones

$$(00): 0 = a\,|0| + b\,|\sqrt{3}/3 - \sqrt{3}\,.\,0| + c\,|\sqrt{3}\,.\,\sqrt{3}/3 - 0| +$$
$$+ d\,|\sqrt{3}/3| + e\,|\sqrt{3}\,.\,\sqrt{3}/3 + 0| + f\,|\sqrt{3}/3 + \sqrt{3}\,.0| + g =$$

$$= b\sqrt{3}/3 + c + d\sqrt{3}/3 + c + f\sqrt{3}/3 + g =$$

$$= (\sqrt{3}b + 3c + \sqrt{3}d + 3e + \sqrt{3}f + 3g) / 3 =$$

$$= (b + \sqrt{3}c + d + \sqrt{3}e + f + \sqrt{3}g) / \sqrt{3} = 0,$$

es decir

(I) $$0 = b + \sqrt{3}c + d + \sqrt{3}e + f + \sqrt{3}g.$$

(01): $$0 = a\,|1/2| + b\,|\sqrt{3}/2 - \sqrt{3}.1/2| +$$

$$+ c\,|\sqrt{3}\,\sqrt{3}/2 - 1/2| + d\,|\sqrt{3}/2| +$$

$$+ e\,|\sqrt{3}\,\sqrt{3}/2 + 1/2| + f\,|\sqrt{3}/2 + \sqrt{3}.1/2| + g =$$

$$= a/2 + c + d\sqrt{3}/2 + 2e + \sqrt{3}f + g =$$

$$= (a + 2c + \sqrt{3}d + 4e + 2\sqrt{3}f + 2g) / 2 = 0,$$

es decir

(II) $$0 = a + 2c + \sqrt{3}d + 4e + 2\sqrt{3}f + 2g.$$

(02): $$0 = a\,|1/2| + b\,|\sqrt{3}/6 - \sqrt{3}.1/2| +$$

$$+ c\,|\sqrt{3}\,\sqrt{3}/6 - 1/2| + d\,|\sqrt{3}/6| +$$

$$+ e\,|\sqrt{3}.\sqrt{3}/6 + 1/2| + f\,|\sqrt{3}/6 + \sqrt{3}.1/2| + g =$$

$$= a/2 + b\sqrt{3}/3 + d\sqrt{3}/6 + e + f\,2\sqrt{3}/3 + g =$$

$$= (3a + 2\sqrt{3}b + \sqrt{3}d + 6e + 4\sqrt{3}f + 6g) / 6 =$$

$$= (\sqrt{3}a + 2b + d + 2\sqrt{3}e + 4f + 2\sqrt{3}g) / 2\sqrt{3} = 0,$$

es decir

(III) $$0 = \sqrt{3}a + 2b + d + 2\sqrt{3}e + 4f + 2\sqrt{3}g.$$

(03): $$0 = a\,|1| + b\,|0 - \sqrt{3}.1| + c\,|\sqrt{3}.0 - 1| + d\,|0| +$$

$$+ e\,|\sqrt{3}\,.\,0 + 1| + f\,|0 + \sqrt{3}\,.\,1| + g =$$

$$= a + \sqrt{3}\,b + c + e + \sqrt{3}\,f + g = 0,$$

es decir

(IV) $$0 = a + \sqrt{3}\,b + c + e + \sqrt{3}\,f + g.$$

(04): $$0 = a\,|1/2| + b\,|-\sqrt{3}/6 - \sqrt{3}\,.\,1/2| +$$

$$+ c\,|-\sqrt{3}\,.\,\sqrt{3}/6 - 1/2| + d\,|-\sqrt{3}/6| +$$

$$+ e\,|-\sqrt{3}\,.\,\sqrt{3}/6 + 1/2| + f\,|-\sqrt{3}/6 +$$

$$+ \sqrt{3}\,.\,1/2| + g = a/2 + b\,2\sqrt{3}/3 + c + d\,\sqrt{3}/6 +$$

$$+ f\,\sqrt{3}/3 + g = (3a + 4\sqrt{3}\,b + 6c + \sqrt{3}\,d +$$

$$+ 2\sqrt{3}\,f + 6g)\ /\ 6 = (\sqrt{3}a + 4b + 2\sqrt{3}c + d +$$

$$+ 2f + 2\sqrt{3}g)\ /\ 2\sqrt{3} = 0,$$

es decir

(V) $$0 = \sqrt{3}\,a + 4\,b + 2\sqrt{3}\,c + d + 2\,f + 2\sqrt{3}\,g.$$

(05): $$0 = a\,|1/2| + b\,|-\sqrt{3}/2 - \sqrt{3}\,.\,1/2| + c\,|-\sqrt{3}\,.\,3/2 -$$

$$- 1/2| + d\,|-\sqrt{3}/2| + e\,|-\sqrt{3}\,.\,\sqrt{3}/2 + 1/2| +$$

$$+ f\,|-\sqrt{3}/2 + \sqrt{3}\,.\,1/2| + g = a/2 + \sqrt{3}\,b + 2c +$$

$$+ \sqrt{3}d/2 + e + g = (a + 2\sqrt{3}\,b + 4c + \sqrt{3}\,d + 2e +$$

$$+ 2g)\ /\ 2,$$

es decir

(VI) $$0 = a + 2\sqrt{3}\,b + 4c + \sqrt{3}\,d + 2e + 2g;$$

o sea que a, b, c, d, e, f, g tienen que satisfacer al sistema

(I) $$0 = \qquad + b + \sqrt{3}\,c + d + \sqrt{3}\,e + f + \sqrt{3}\,g,$$

(II) $$0 = a + \qquad + 2\,c + \sqrt{3}d + 4e + 2\sqrt{3}\,f + 2\,g,$$

$$(\text{III}) \quad 0 = \sqrt{3}a + 2b + \qquad + d + 2\sqrt{3}e + 4f + 2\sqrt{3}\,g,$$

$$(\text{IV}) \quad 0 = a + \sqrt{3}\,b + c + \qquad + e + \sqrt{3}f + g,$$

$$(\text{V}) \quad 0 = \sqrt{3}a + 4b + 2\sqrt{3}\,c + d + \qquad + 2f + 2\sqrt{3}\,g,$$

$$(\text{VI}) \quad 0 = a + 2\sqrt{3}\,b + 4c + \sqrt{3}d + 2e + \qquad + 2g.$$

Se nota en seguida que $f = b$ y que $e = c$, porque cambiando f por b y e por c, la (I) se transforma en la (I), la (II) en la (VI), la (III) en la (V), la (IV) en la (IV), de manera que si se tienen en cuenta las ecuaciones $f = b$ y $e = c$, entonces el sistema precedente se reduce a

$$(\text{I}') \quad 0 = \qquad + 2b + 2\sqrt{3}\,c + d + \sqrt{3}\,g,$$

$$(\text{II}') \quad 0 = a + 2\sqrt{3}\,b + 6c + \sqrt{3}d + 2g,$$

$$(\text{III}') \quad 0 = \sqrt{3}a + 6b + 2\sqrt{3}\,c + d + 2\sqrt{3}\,g,$$

$$(\text{IV}') \quad 0 = a + 2\sqrt{3}\,b + 2c + \qquad + g,$$

donde (I′) es la transformada de (I), (II′) la de (II) y (VI), (III′) la de (III) y (V), (IV′) la de (IV). De estas ecuaciones se deduce fácilmente que, usando el simbolismo acostumbrado,

$$(\text{III}') - \sqrt{3}\,.\,(\text{IV}') \longrightarrow 0 = d + \sqrt{3}\,g, \text{ es decir } d = -\sqrt{3}\,g,$$

$$(\text{II}') - (\text{IV}') \longrightarrow 0 = 4c + \sqrt{3}\,d + g = 4c - 3g + g = 4c - 2g,$$
$$\text{es decir } e = c = g/2,$$

$$(\text{I}') \longrightarrow 0 = 2b + \sqrt{3}\,g - \sqrt{3}\,g + \sqrt{3}\,g = 2b + \sqrt{3}\,g,$$
$$\text{es decir } f = b = -\sqrt{3}\,g\,/\,2,$$

$$(\text{IV}') \longrightarrow 0 = a - 3g + g + g = a - g, \text{ es decir } a = g,$$

y por lo tanto tenemos que

$$a = g,\ b = -\sqrt{3}\,g\,/\,2,\ c = g/2,\ d = -\sqrt{3}\,g,\ e = g\,/\,2,$$
$$f = -\sqrt{3}\,g\,/2,$$

o también, si se pone $g = 2k$,

$$a = 2k,\ b = -\sqrt{3}\,k,\ c = k,\ d = -2\sqrt{3}\,k,\ e = k,$$
$$f = -\sqrt{3}\,k,\ g = 2\,k,$$

y por lo tanto la ecuación de la estrella es

$$0 = 2k\,|y| - \sqrt{3}\,k\,|x - \sqrt{3}\,y| + k\,|\sqrt{3}\,x - y| -$$
$$- 2\sqrt{3}\,k\,|x| + k\,|\sqrt{3}\,x + y| - \sqrt{3}\,k\,|x + \sqrt{3}\,y| + 2k,$$

o mejor, dividiendo ambos miembros por k,

$$0 = 2\,|y| - \sqrt{3}\,|x - \sqrt{3}y| + |\sqrt{3}\,x - y| -$$
$$- 2\sqrt{3}\,|x| + |\sqrt{3}x + y| - \sqrt{3}\,|x + \sqrt{3}y| + 2.$$

Concluyendo: *la ecuación implícita de la estrella de seis puntas con referencia al sistema* $(0, x, y)$ *de la figura* 4 *es*

$$0 = 2\,|y| - \sqrt{3}\,|x - \sqrt{3}y| + |\sqrt{3}x - y| - 2\sqrt{3}\,|x| +$$
$$+ |\sqrt{3}x + y| - \sqrt{3}\,|x + \sqrt{3}y| + 2.$$

Si ponemos $y = mx$, entonces la ecuación de la estrella se transforma como sigue:

$$0 = 2|mx| - \sqrt{3}\,|x - \sqrt{3}mx| + |\sqrt{3}x - mx| -$$
$$- 2\sqrt{3}\,|mx| + |\sqrt{3}x + mx| - \sqrt{3}\,|x + \sqrt{3}mx| + 2 =$$
$$= |x|\,(2\,|m| - \sqrt{3}\,|1 - \sqrt{3}m| + |\sqrt{3} - m| - 2\sqrt{3} +$$
$$+ |\sqrt{3} + m| - \sqrt{3}\,|1 + \sqrt{3}m|) + 2 =$$
$$= |x|\,(|m + \sqrt{3}| - 3\,|m + \sqrt{3}/3| + 2\,|m| -$$
$$- 3\,|m - \sqrt{3}/3| + |m - \sqrt{3}| - 2\sqrt{3}) + 2 = 0,$$

es decir

$$|x| = -2/(|m + \sqrt{3}| - 3\,|m + \sqrt{3}/3| + 2\,|m| -$$
$$- 3\,|m - \sqrt{3}/3| + |m - \sqrt{3}| - 2\sqrt{3})$$

y por lo tanto, teniendo en cuenta que a cada m corresponden dos y sólo dos valores de x, opuestos entre sí:

$$x = \pm 2/(|m + \sqrt{3}| - 3\,|m + \sqrt{3}/3| + 2\,|m| -$$

$$- 3\,|m - \sqrt{3}/3| + |m - \sqrt{3}| - 2\sqrt{3}),$$

$$y = \pm 2m/(|m + \sqrt{3}| - 3\,|m + \sqrt{3}/3| + 2\,|m| -$$

$$- 3\,|m - \sqrt{3}/3| + |m - \sqrt{3}| - 2\sqrt{3}),$$

que son las ecuaciones paramétricas (con parámetro m) de la estrella.

Universidad Nacional de Colombia.