SOLUCION DE PROBLEMAS

6. La sucesión 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... es tal que cada término es la suma de los dos precedentes. Los términos de esta sucesión se llaman números de FIBONACCI. Demostrar que hay siempre por lo menos cuatro y a lo más cinco entre ellos que tienen el mismo número de cifras.

Solución. Sea a_k el primer número de FIBONACCI que está entre 10^n y 10^{n+1}. Obviamente $a_k \geqslant 10^n$ y es claro que $a_{k+1} \geqslant \frac{1}{2} 10^n$.

Por consiguiente

$$a_{k+1} \geqslant \frac{3}{2} . 10^n, \qquad a_{k+2} \geqslant \frac{5}{2} . 10^n,$$

$$a_{k+3} \geqslant 4 . 10^n, \qquad a_{k+4} \geqslant \frac{13}{2} . 10^n,$$

y ya

$$a_{k+5} \geqslant \frac{21}{2} . 10^n > 10^{n+1}.$$

Entonces hay a lo más 5 números de FIBONACCI entre 10^n y 10^{n+1}.

Por otro lado $a_{k-1} < 10^n$ y $a_k \quad < 2 . 10^n$. Entonces

$$a_{k+1} < 3 . 10^n, \qquad a_{k+2} < 5 . 10^n, \qquad a_{k+3} < 8 . 10^n$$

luego hay por lo menos 4 números de FIBONACCI entre 10^n y 10^{n+1}.

Soluciones de: Joaquín Alvarez Arango, Ernesto Gutiérrez Bodmín.

8. Demostrar que entre n números enteros positivos siempre se pueden escoger algunos, de tal manera que su suma sea divisible por n.

Solución. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ los n números y consideremos las n sumas $b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, b_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, b_n = = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Si entre los números $b_1, b_2, \ldots, b_n$ uno es divisible por n, queda demostrada la proposición. Si ninguno es divisible por n, entonces existen dos, sean b_k y b_l $(k < l)$, que dan el mismo residuo para la división por n. Luego $b_l - b_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_l$ es divisible por n.

Juan Gómez Mora.

10. Demostrar que en una reunión de seis miembros o bien hay tres que no se conocen mutuamente, o bien hay tres que se conocen mutuamente.

Solución. Preguntemos a un miembro de la reunión, cuántas personas conoce en la reunión. Hay dos casos posibles: o bien conoce por lo menos tres, o bien hay por lo menos tres que no conoce. Como los dos casos se tratan de manera igual, basta considerar el primero. Si las tres personas que conoce el miembro preguntado, no se conocen mutuamente, estamos listos. Si entre las tres personas que conoce el miembro preguntado, dos se conocen, entonces estas dos y el miembro preguntado forman una terna de personas que se conocen mutuamente y estamos listos otra vez.

Juan Azuero Rojas.

Solución parcial de: Iván Restrepo Lince (Colegio San Ignacio, Medellín).

11. Teniendo en cuenta que hay moneda de 1, 2, 5, 10, 20, 50 centavos, ¿de cuántas maneras se puede cambiar un peso por monedas fraccionarias?

Solución. Se trata de encontrar el número N de soluciones en números enteros, no negativos de la ecuación diofántica:

$$x + 2y + 5z + 10u + 20v + 50w = 100.$$

Este número N se puede determinar de la manera siguiente: para $0 \leqslant n \leqslant 10$ hay que contar el número de las soluciones de la ecuación

$$\text{(A)} \qquad u + 2v + 5w = n$$

(que es muy fácil) y mutiplicarlo por el número de soluciones de la ecuación

$$(B) \qquad x + 2y + 5z = 100 - 10n = 10(10-n) = 10m,$$

donde $m = 10-n$. N será la suma de todos estos productos para $n = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

El método de calcular el número de soluciones de la ecuación (B) es el siguiente. Supongamos que conocemos el número $M(m)$ de las soluciones para un cierto valor $10m$. Entonces el número $M(m+1)$ de soluciones de la ecuación (B) con $m+1$ será $M(m)$, más el número de soluciones de las ecuaciones $x + 2y = 10m + 5$ y $x + 2y = 10(m+1)$ que es igual a

$$\left(\frac{10m+6}{2}\right) + \left(\frac{10m+10}{2} + 1\right) = 10m + 9.$$

Entonces $M(m+1) = M(m) + 10m + 9$. Puesto que $M(0) = 1$, podemos formar la tabla siguiente:

n	m	número de soluciones de (A)	número de soluciones de (B)	producto
0	10	1	541	541
1	9	1	442	442
2	8	2	353	706
3	7	2	274	548
4	6	3	205	615
5	5	4	146	584
6	4	5	97	485
7	3	6	58	348
8	2	7	29	203
9	1	8	10	80
10	0	10	1	10
			$N =$	4562

Entonces un peso se puede cambiar de 4562 maneras.

Joaquín Alvarez Arango.

Otra solución de Guillermo Tello Y.

12. Los puntos (x, y) del plano con coordenadas x e y enteras se llaman "puntos de reja". Demostrar que no existe triángulo equilátero en el plano cuyos tres vértices son puntos de reja.

Solución. Supongamos que existe un triángulo equilátero cuyos tres vértices son puntos de reja. Podemos suponer que uno de los vértices está en el punto $(0, 0)$ y que los otros dos vértices (x, y) y (ξ, η) son tales que el máximo común divisor de los números x, y, ξ, η es 1. Luego de

$$(*) \qquad x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

sigue

$$x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2 = 2(x\xi + y\eta),$$

$$x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2 = 4(x\xi + y\eta).$$

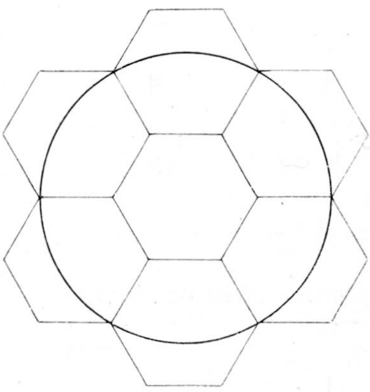
Como el residuo de la división por 4 de una suma de cuatro cuadrados es igual al número de impares entre ellos, y como por hipótesis x, y, ξ, η no pueden ser todos pares, entonces deben ser todos impares.

Pero ahora $x^2 + y^2$ da el residuo 2 en la división por 4, mientras que, siendo $x - \xi$ e $y - \eta$ pares, $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$ es divisible por 4. Esta contradicción con la fórmula (*) demuestra la proposición.

Juan Gómez Mora.

13. ¿Cuál es el número mínimo de círculos de radio ½ que cubren el círculo de radio 1, y en qué posición?

Solución. Dibujemos la reja de hexágonos regulares con lados ½. Pongamos el círculo de radio 1 en esta reja, de tal manera que su centro coincida con el centro de un hexágono.



Entonces los 7 círculos de radio ½ circunscritos al hexágono concéntrico y a los seis hexágonos contiguos cubren el círculo de radio 1.

Por otro lado para cubrir la circunferencia del círculo de radio 1 ya se necesitan 6 círculos de radio $\frac{1}{2}$ en la posición indicada. Para cubrir todo el círculo el séptimo debe ser concéntrico. [Entonces el número mínimo de círculos de radio $\frac{1}{2}$, que cubren el círculo de radio 1, es 7 y deben estar en la posición indicada].

Joaquín Alvarez Arango.

14. En un triángulo a lo más una altura es más larga que el lado correspondiente.

Solución. Sean los lados del triángulo $a, b, c,$ las alturas correspondientes h, k, l (es decir h es perpendicular a a, etc.). Es claro que cada altura es menor que los dos lados a los cuales no corresponde. Supongamos entonces que $a < h$, $b < k$. Luego

$$a < h < b < k < a,$$

que es absurdo.

Juan Gómez Mora.

Otra solución de Iván Restrepo Lince (Colegio San Ignacio, Medellín).

16. Sea un tetraedro $ABCD$: $AC = AD = BC = BD = a\sqrt{3}$, $AB = CD = 2a$, J e I denotan los medios respectivos de CD y de AB.

a) Demostrar que las aristas AB y CD son perpendiculares y que IJ es una perpendicular a las dos.

b) Calcular el segmento IJ. Demostrar que los diedros con aristas AB y CD son rectos.

c) Por el punto O de IJ definido por $IO = x$ hacemos pasar el plano perpendicular a IJ; este plano corta las aristas AC, AD, BD, BC respectivamente en M, N, P, Q. Demostrar que el cuadrilátero $MNPQ$ es un rectángulo. Calcular su área S en función de a y x.

d) Sea S' el área de un rectángulo cuyos lados son respectivamente iguales a MN y a AB, sea $y = S' - S$. Estudiar la variación de y cuando el punto O se desplaza entre I y J. Hacer la gráfica.

(Bachillerato, 1ª parte, Aix-Marseille, Francia, 1948).

Solución. a) Puesto que los triángulos ABC y ABD son isósceles (con base AB), IC e ID son perpendiculares a AB, entonces CD también es perpendicular a AB . IJ siendo en el plano ICD es perpendicular a AB. De la misma manera el plano JAB es perpendicular a CD, entonces IJ lo es, con más razón.

b) $IC = ID = JA = JB = a\sqrt{2}$. Entonces del triángulo ICJ, rectángulo en J, $IJ^2 = IC^2 - CJ^2 = a^2$, $IJ = a$. Además $CI^2 + DI^2 = 4a^2 = CD^2$, entonces por el inverso del teorema de Pitágoras, el ángulo CID es recto, es decir el diedro con arista AB es recto. De la misma manera se ve que el triángulo AJB es recto en J, es decir el diedro con arista CD es recto.

c) MN y PQ son paralelos a CD, entonces perpendiculares a MQ y NP, que son paralelos a AB : $MNPQ$ es un rectángulo. Además:

$$MQ : AB = OJ : IJ, \; MN : DC = IO : IJ,$$

entonces $MQ = 2(a - x)$, $MN = 2x$, $S = 4x(a - x)$.

d) $S' = 4ax$, $y = 4x^2$. Cuando x crece de 0 a a, y crece de 0 a $4a^2$.

Ernesto Gutiérrez Bodmín.

Otras soluciones de: Joaquín Alvarez Arango, Juan Gómez Mora.

39. Encontrar todas las soluciones en números enteros de la ecuación

$$x + y + z = xyz.$$

Solución. Observemos primero que si $x = a$, $y = b$, $z = c$ es una solución de la ecuación, entonces $x = -a$, $y = -b$, $z = -c$ la es también, y si tomamos los números a, b, c en cualquier orden, todavía darán una solución. Luego se puede suponer $x \leqslant y \leqslant z$ y $z \geqslant 0$.

Si $z = 0$, $x + y = 0$ y como $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$, entonces $x = 0$, $y = 0$.

Si $z > 0$ y $x \leqslant y \leqslant z$, entonces $xyz \leqslant 3z$, es decir $xy < 3$. Si $xy = 0$, uno de los factores es cero, sea $y = 0$, y de $x + y + z = 0$ sigue $x = -z$. La solución es de la forma $(-a, 0, a)$.

Es imposible que sea $x < 0$, $y < 0$, porque esto daría por un lado $x + y + z < z$, por otro lado $x + y + z = xyz \geqslant z$. Tampoco es posible que de los números x, y uno sea positivo y el otro negativo porque en este caso una de las dos soluciones (x, y, z) y $(-x, -y, -z)$ tendría dos valores negativos y uno positivo que, como acabamos de ver, es imposible.

Queda el caso de $x > 0$, $y > 0$. Puesto que $0 < x + y = z(xy - 1)$, tenemos $1 < xy \leqslant 3$. Las únicas posibilidades son $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ y $x = 1$, $y = 3$, $z = 2$.

Entonces las soluciones son $(1, 2, 3)$, $(-a, 0, a)$ (a entero) y todas las ternas que se obtienen de estas cambiando el orden o multiplicando por -1.

Solución de: Juan Gómez Mora.

40. En un salón hay un número impar de personas que bailan entre sí. Demostrar que hay una persona que bailó un número par de veces (cero es un número par!).

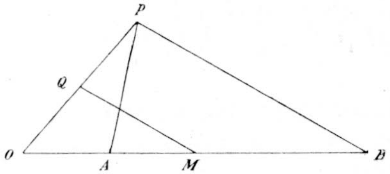
Solución. Sean $P_1, P_2, \ldots, P_{2n+1}$ las personas que han bailado y supongamos que P_i ha bailado p_i veces. Si P_i ha bailado con P_k, entonces P_k ha bailado con P_i, de que sigue que $p_1 + p_2 + \ldots + p_{2n+1}$ es un número par. Entonces todos los p_i no pueden ser números impares.

Juan Gómez Mora.

41. Demostrar que en el plano el lugar geométrico de los puntos, cuyas distancias a dos puntos dados A y B guardan una relación constante, es un círculo.

Ernesto Núñez.

Solución. Sea la relación constante λ. Por continuidad existe entre A y B un punto M tal que $AM : MB = \lambda$. Además sea O el punto sobre la prolongación del segmento AB, que verifica $OA : OM = \lambda$. Este punto O también existe por continuidad. Entonces $OM = OA + AM = \lambda(OM + MB) = \lambda OB$, es decir $OM : OB = \lambda$.



Sea P un punto que verifica $AP : PB = \lambda$. Demostraremos que está situado sobre la circunferencia con centro O y radio OM. Tracemos la paralela a BP que pasa por M y encuentra OP en Q. Los triángulos OAP y OQM son iguales. En efecto el ángulo AOQ es común; por otro lado

$$OQ : OP = OM : OB = \lambda = OA : OM,$$

$$OQ : OA = OP : OM,$$

de donde sigue que los triángulos OAP y OQM son semejantes. Además $AP = \lambda\ PB$, $QM : PB = OM : OB = \lambda$, $QM = \lambda PB$, es decir $AP = QM$, o sea que los triángulos OAP y OQM son iguales y en particular que $OP = OM$, q. e. d.

Sea, inversamente, P sobre la circunferencia con centro O y radio OM. Sean los puntos A y B determinados por $OA : OM = \lambda$, $OM : OB = \lambda$. Tracemos la paralela a BP que pasa por M y encuentra OP en Q. Los triángulos OMQ y OBP son semejantes, en particular $OQ : OP = OM : OB = \lambda$. Entonces los triángulos OMQ y OPA son iguales puesto que el ángulo AOQ es común, $OM = OP$ y $OQ = \lambda OP = \lambda OM = OA$. Por consiguiente los triángulos OBP y OPA son semejantes, de donde $AP : PB = OA : OP = OA : OM = \lambda$. Entonces todos los puntos P de la circunferencia satisfacen a $AP : PB = \lambda$.

Ernesto Gutiérrez Bodmín.

Otras soluciones de: Joaquín Alvarez Arango, Juan Gómez Mora.

Unas soluciones eran incompletas: demostraron que todo punto P de una circunferencia satisface a $AP : PB = \lambda$, pero no que inversamente todo tal punto P debe estar sobre una circunferencia.