Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXI (1987), págs. 243-250

SOBRE UN SISTEMA NO LINEAL DE EPIDEMIAS

por

Luis ORTEGA S.

§0. Introducción. Un modelo sobre epidemias que describe la población infectada y la población susceptible de ser infectada en el cual se toma en consideración el efecto de difusión es el siguiente:

$$\begin{aligned}
&U_t-\nabla(D_1\nabla U) \equiv - a_1U-C_1(G(V))U + q_1 \quad \text{en } \Omega\times[0,s]\\
&V_t-\nabla(D_2\nabla V) \equiv - a_2U+C_2(G(V))U + q_2 \quad \text{en } \Omega\times[0,s]\\
&U(x,0) = U_o(x) \text{ en } \bar\Omega, \quad V(x,0) = V_o(x) \text{ en } \bar\Omega\\
&U(x,t) = h_1(x,t), \; V(x,t) = h_2(x,t) \text{ en } \partial\Omega\times[0,s],
\end{aligned} \tag{0.1}$$

donde U(x,t) representa la población susceptible de ser infectada y V(x,t) la población infectada, D_1 y D_2 son los coeficientes de difusión, a_1,a_2, C_1,C_2 son constantes positivas que representan las tasas de reacción y q_1,q_2 son funciones no negativas definidas en $\bar\Omega$, las cuales representan posibles fuentes externas. La función G(V) es definida en la siguiente forma:

$$G(V)(x,t) = \int_\Omega g(x,y)V(y,t)\,dy,$$

para toda función $V \in C[\Omega\times[0,s]]$, donde g es una función continua y positiva definida en $\bar\Omega\times\bar\Omega$. Recientes estudios sobre este modelo los podemos encontrar en ([2],[3],[4]). En el sistema (0.1) se suponen conocidos el comportamiento de U y V en $(\bar{\Omega}\times\{0\}) \cup \partial\Omega\times[0,s]$.

En este artículo estudiaremos el modelo (0.1) cuando U y V son independientes de t y solo se conoce sus comportamientos en $\partial\Omega$. El modelo que nos proponemos estudiar es el siguiente:

$$\begin{aligned} L_1[U] &\equiv -a_1U - C_1G(V)U + q_1 \quad \text{en } \Omega \\ L_2[V] &\equiv -a_2V + C_2G(V)U + q_2 \quad \text{en } \Omega \\ U_{|\partial\Omega} &\equiv 0, \quad V_{|\partial\Omega} \equiv 0, \end{aligned} \tag{0.2}$$

donde L_1 y L_2 son operadores uniformemente elípticos en $\bar{\Omega}$ y la función G(V) es definida así:

$$G(V)(x) = \int_\Omega g(x,y)V(y)dy, \quad \text{para todo } x \in \Omega,$$

g es una función continua y positiva en $\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}$.

En este artículo se demuestra la existencia de soluciones positivas del sistema (0.2).

DEFINICIONES PRELIMINARES. Denotaremos con Ω un conjunto abierto conexo y acotado en $\mathbb{R}^N$ y $\alpha \in (0,1)$, $(N \geq 1)$. Para cada función U definida en Ω, definimos

$$\|U\|_\infty^\Omega = \sup_\Omega |U(x)|, \qquad \|U\|_\alpha^\Omega = \|U\|_\infty^\Omega + \sup_{\substack{x,x\in\Omega \\ x\neq x}} \frac{|U(x)-U(x)|}{|x-x'|^\alpha}$$

$$\|U\|_{1+\alpha}^\Omega = \|U\|_\infty + \sum_{i=1}^N \|U_{x_i}\|_\alpha^\Omega \quad ,$$

$$\|U\|_{2+\alpha}^\Omega = \|U\|_\infty^\Omega + \sum_{i=1}^N \|U_{x_i}\|_\infty^\Omega + \sum_{i,j=1} \|U_{x_i x_i}\|_\alpha \ .$$

Decimos que $u \in C^m(\Omega)$ si $\|U\|_m < \infty$ $(m = \infty, \alpha, 1+\alpha, 2+\alpha)$.

Los operadores L_1 y L_2 tendrán la siguiente forma:

$$L_1[U] \equiv -\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1} a_{ij}(\cdot)\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(\cdot)\frac{\partial U}{\partial x_i}\right),$$

$$L_2[V] \equiv -\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1} \bar{a}_{ij}(\cdot)\frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1}^{N} \bar{b}_i(\cdot)\frac{\partial U}{\partial x_i}\right),$$

para todo $U,V \in C^2(\Omega)$. Supondremos que los coeficientes de L_1 y L_2 pertenecen a $C^\alpha(\Omega)$, $a_{ij} \equiv a_{ji}$, $\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ji}$ para todo $i,j = 1,\dots,N$, L_i es uniformemente elíptico en $\bar{\Omega}$, $\partial\Omega$ es una variedad de clase $C^{2+\alpha}$, $\sup_{y\in\bar{\Omega}} \|g(\cdot,y)\|_\alpha < \infty$ y finalmente $q_i \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, para $i = 1,2$.

§1. Teorema de existencia del sistema (0.2).

TEOREMA 1.1. *Supongamos que* $\bar{U},\underline{U},\bar{V},\underline{V} \in C^\alpha(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ *son tales que* $0 \leqslant U \leqslant \bar{U}$ *en* Ω, $0 \leqslant \underline{V} \leqslant \bar{V}$ *en* Ω, $\underline{U} \equiv 0 \leqslant \bar{U}$ *en* $\partial\Omega$, $\underline{V} \equiv 0 \leqslant \bar{V}$ *en* $\partial\Omega$. *Si estas cuatro funciones satisfacen las siguientes desigualdades:*

$$\begin{aligned}
L_1[\underline{U}] &\leqslant -a_1\underline{U} - C_1G(\bar{V})\underline{U} + q_1 \quad \text{en } \Omega,\\
L_1[\bar{U}] &\geqslant -a_1\bar{U} - C_1G(\underline{V})\bar{U} + q_1 \quad \text{en } \Omega,\\
L_2[\underline{V}] &\leqslant -a_2\underline{V} + C_2G(\underline{V})\underline{U} + q_2 \quad \text{en } \Omega,\\
L_2[\bar{V}] &\geqslant -a_2\bar{V} + C_2G(\bar{V})\bar{U} + q_2 \quad \text{en } \Omega,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

entonces existe una solución (U,V) *del sistema* (0.2) *tal que* $U,V \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, $\underline{U} \leqslant U \leqslant \bar{U}$ en $\bar{\Omega}$, $\underline{V} \leqslant V \leqslant \bar{V}$ *en* $\bar{\Omega}$.

Demostración. Para $U,V \subset C^\alpha(\bar{\Omega})$ se define

$$(\sigma V)(x) = \begin{cases} V(x) & \text{si } \underline{V}(x) \leqslant V(x) \leqslant \bar{V}(x),\\ \bar{V}(x) & \text{si } V(x) > \bar{V}(x),\\ \underline{V}(x) & \text{si } V(x) < \underline{V}(x), \end{cases}$$

para todo $x \in \bar{\Omega}$;

$$(\rho U)(x) = \begin{cases} U(x) & \text{si} \quad \underline{U}(x) \leq U(x) \leq U(x) \\ \bar{U}(x) & \text{si} \quad U(x) > \bar{U}(x), \\ \underline{U}(x) & \text{si} \quad U(x) < \underline{U}(x), \end{cases}$$

para todo $x \in \bar{\Omega}$. Adoptaremos además las siguientes notaciones:

$$M_i[U] \equiv L_i[U] + a_i U \ , \quad \text{para} \quad i = 1,2,$$

$$\bar{E} = \{U \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}) \mid U_{|\partial\Omega} \equiv 0\},$$

$$\|U\|_{\bar{E}} = \|U\|_{\alpha}^{\Omega}, \quad \hat{E} = \bar{E} \times \bar{E} \ ,$$

$$\|(U,V)\|_{\hat{E}} = \max\{\|U\|_{\bar{E}} \ , \ \|V\|_{\bar{E}}\}.$$

Fácilmente se puede ver que el espacio $\hat{E}$ con la norma $\|\cdot\|_{\hat{E}}$ es un espacio de Banach. Definimos un operador $T:\hat{E} \to \hat{E}$, en la siguiente forma

$$T(U,V) = (i \circ M_1^{-1}[-C_1 G(\sigma V)\rho(U) + q_1], \quad i \circ M_2^{-1}[C_2 G(\sigma V)\rho U + q_2])$$

para todo $(U,V) \in \hat{E}$, donde i representa la inyección canónica $i:C^{2+\alpha}(\Omega) \to E$. Por ser i un operador compacto, T es un operador compacto. Consideremos ahora el siguiente problema:

$$\begin{aligned} M_1[U] &= -C_1 G(\sigma V)\rho U + q_1 \quad \text{en } \Omega, \\ M_2[V] &= C_2 G(\sigma V)\rho U + q_2 \quad \text{en } \Omega, \\ U_{|\partial\Omega} &\equiv 0, \quad V_{|\partial\Omega} \equiv 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

Por el teorema de existencia y unicidad de Schauder (ver [1]) existen dos constantes $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ tales que

$$\begin{aligned} \|M_1^{-1}(-C_1 G(\sigma V)\rho U + q_1)\|_{\alpha} &\leq k_1 \|-C_1 G(\sigma V)\rho U + q_1\|_{\infty} \leq r \ , \\ \|M_2^{-1}(C_2 G(\sigma V)\rho U + q_2)\|_{\alpha} &\leq k_2 \|C_1 G(\sigma V)\rho U + q_2\|_{\infty} \leq r, \end{aligned} \tag{1.4}$$

para todo $(U,V) \in \hat{E}$, existe $r > 0$. Denotemos con $\bar{B}_r(0)$ la bola cerrada en $\hat{E}$ de centro 0 y radio r. Por las desigualdades (1.4) tenemos que $T(\bar{B}_r(0) \subset \bar{B}_r(0)$. Por esta última relación y el teorema de punto fijo de Schauder existe $(U,V) \in \bar{B}_r(0)$ tal que $T(U,V) = (U,V)$, esto es:

$$\begin{aligned} M_1[U] &\equiv -C_1G(\sigma V)\rho U + q_1 \text{ en } \Omega, \\ M_2[V] &\equiv C_2G(\sigma V)\rho U + q_2 \text{ en } \Omega. \end{aligned} \tag{1.5}$$

De (1.2) y (1.5) obtenemos:

$$M_2[\bar{V}-V] \geqslant C_2[G(\bar{V})\bar{U} - G(\sigma V)\rho U] \geqslant 0 \quad \text{en } \Omega,$$

$$M_2[V-\underline{V}] \geqslant C_2[G(\sigma V)\rho U-G(\underline{V})\underline{U}] \geqslant 0 \quad \text{en } \Omega,$$

$$(\bar{V}-V)_{|\partial\Omega} \geqslant 0 \quad \text{y} \quad (V-\underline{V})_{|\partial\Omega} \geqslant 0.$$

Estas cuatro últimas desigualdades y el principio de máximo para ecuaciones diferenciales de tipo elíptico implican que $\bar{V} \geqslant V \geqslant \underline{V}$ en $\bar{\Omega}$. Este último hecho y (1.5) implican que

$$M_1[U] \equiv -C_1G(V)\rho(U) + q_1 \text{ en } \Omega,$$

$$M_2[V] \equiv C_2G(V)\rho U + q_2 \text{ en } \Omega.$$

A continuación demostraremos que $\underline{U} \leqslant U \leqslant \bar{U}$ en $\bar{\Omega}$. Para demostrar que $U \leqslant \bar{U}$ en $\bar{\Omega}$, supongamos lo contrario, en este caso existe $x_1 \in \Omega$ tal que $U(x_1) > \bar{U}(x_1)$. Denotemos con

$$\Omega^* = \{x \in \Omega \,|\, (U-\bar{U})(x) > 0\}.$$

El conjunto Ω^* es abierto en $\mathbb{R}^N$ y diferente de vacios, además $(U-\bar{U})|\partial\Omega^* \equiv 0$. Denotemos con A una componente conexa no vacía de Ω^*, en este caso A es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$ y además $(U-\bar{U})(x) = 0$, para todo $x \in \partial A$. Por (1.2) y (1.6), obtenemos la siguiente desigualdad:

$$M_1[\bar{U}-U] \geqslant C_1[G(V)\rho U-G(\underline{V})\bar{U}] = C_1(G(V)\bar{U}-G(\underline{V})\bar{U}) \geqslant 0 \quad \text{en A}.$$

Esta última desigualdad y el principio del máximo para ecuaciones de tipo elíptico implican que $\bar{U} \geqslant U$ en A. Esta contradicción demuestra que $U \leqslant \bar{U}$ en Ω. Usando el argumento anterior se demuestra también que $\underline{U} \leqslant U$ en Ω, esto es, $\underline{U} \leqslant U \leqslant \bar{U}$ en $\bar{\Omega}$ y $\rho U \equiv U$ en Ω. De este último hecho y (1.6) obtenemos que:

$$M_1[U] \equiv -C_1 G(V)U + q_1 \text{ en } \Omega,$$

$$M_2[V] \equiv C_2 G(V)U + q_2 \text{ en } \Omega,$$

$\underline{U} \leqslant U \leqslant \bar{U}$ en $\bar{\Omega}$, $\underline{V} \leqslant V \leqslant \bar{V}$ en $\bar{\Omega}$. Esto completa la demostración del teorema.

En el siguiente teorema supondremos que $q_i > 0$, para $i = 1,2$.

TEOREMA 1.7. *Si* $a_1^2 \geqslant q_1$ *en* $\bar{\Omega}$ *y* $\frac{a_2}{2} \geqslant C_2 a_1 \sup_{x\in\Omega} \int_\Omega g(x,y)dy$ *en* Ω, *existe una solución* U, V *del problema* (0.2), $U,V \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ *tal que* $u > 0$ *en* Ω *y* $V > 0$ *en* Ω.

Demostración. Denotaremos con λ_{1i} al primer valor propio y con ϕ_i la función propia correspondiente a λ_{1i} del problema de valor propio siguiente:

$$\{\bar{M}_i(\phi_i) \equiv \lambda_{1i}\phi_i \text{ en } \Omega, \quad \phi_i|_{\partial\Omega} \equiv 0, \quad \phi_i > 0 \text{ en } \Omega\},$$

para cada $i = 1,2$, donde

$$\bar{M}_1[U] \equiv L_1[U] + a_1 U + C_1 G(k)U, \quad M_2[U] \equiv L_2 U + a_2 U,$$

y $k > 0$, es una constante suficientemente grande tal que $\frac{a_2}{2} k \geqslant q_2$ en $\bar{\Omega}$. Denotemos con

$$\bar{V} \equiv k, \quad \bar{U} \equiv a_1, \quad \underline{U} \equiv \rho_1\phi_1, \quad \underline{V} \equiv \rho_2\phi_2,$$

donde ρ_1 y ρ_2 son constantes positivas suficientemente pequeñas para que:

$$\rho_1\lambda_{11}\phi_1 \leqslant q_1 \text{ en } \bar{\Omega}, \quad \rho_1\phi_1 \leqslant a_1 \text{ en } \bar{\Omega}.$$

$$\rho_2\lambda_{12}\phi_2 \leqslant q_2 \text{ en } \bar{\Omega}, \quad \rho_2\phi_2 \leqslant k \text{ en } \bar{\Omega}.$$

Por hipótesis y estas últimas desigualdades obtenemos

$$L_1[\bar{U}] = 0 \geqslant -a_1^2 + q_1 = -a_1\bar{U} + q_1 \geqslant -a_1\bar{U} - C_1G(\underline{V})\bar{U} + q_1 \text{ en } \Omega \tag{1.9}$$

$$L_2[\bar{V}] = 0 \geqslant -\frac{ka_2}{2} + q_2 \geqslant -\frac{ka_2}{2} + q_2$$

$$+ (C_2G(\bar{V})a_1 - \frac{k}{2}a_2) \equiv -a_2\bar{V} + C_2G(\bar{V})\bar{U} + q_2 \text{ en } \Omega. \tag{1.10}$$

Por definición de $\underline{U}$, $\bar{M}_1(\underline{U}) \equiv \rho_1\phi_1\lambda_{11}$ en Ω, esto es

$$L_1[\underline{U}] \leqslant -a_1\underline{U} - C_1G(\bar{V})\underline{U} + q_1 \text{ en } \bar{\Omega}. \tag{1.11}$$

Por ser $\bar{M}_2[\underline{V}] \equiv \lambda_{12}\rho_2\phi_2 \leqslant q_2$ en $\bar{\Omega}$, tenemos que

$$L_2[\underline{V}] \leqslant -a_2\underline{V} + q_2 \leqslant -a_2\underline{V} + C_2G(\underline{V})\underline{U} + q_2 \text{ en } \Omega \tag{1.12}$$

y

$$\underline{U} \equiv \rho_1\phi_1 \leqslant a_1 \equiv \bar{U} \text{ en } \Omega$$

$$\underline{V} \equiv \rho_2\phi_2 \leqslant k \equiv \bar{V} \text{ en } \Omega.$$

Por las desigualdades (1.9)-(1.12) y el Teorema 1.1, existe una solución (U,V) de (0.2) tal que $\underline{U} \leqslant U \leqslant \bar{U}$ en Ω, $\underline{V} \leqslant V \leqslant \bar{V}$ en $\bar{\Omega}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Gilbarg, R. and Trudinger, N., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, 1983.

[2] Pao, C.V., *On Nonlinear Reaction-Diffusion System*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. **87**, (1982), 165-198.

[3] Mottoni, P. De, Orlandi, E. and Tesei, A., *Asymptotic behavior for a system describing epidemics with migration and spatial spread of infection*. Nonlinear Anal. TMA **3** (1979), 663-675.

[4] Waltman, P., *Deterministic Threshold Models in the Theory of Epidemics*, Lecture Notes in Biomathematic, Vol. 1, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1974.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia.

(Recibido en diciembre de 1986, versión revisada en mayo de 1987).

* *