Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXI (1987), págs. 251-256

UN TEOREMA DE PUNTOS FIJOS

por

Luis R. JIMENEZ B.

Resumen. En este artículo mostramos la existencia de puntos fijos para operadores $T:K \to K$ no necesariamente continuos definidos sobre un subconjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach uniformemente convexo; que satisfacen

$$\|T(x)-T(y)\| \leq a\|x-y\| + b[\|x-T(x)\| + \|y-T(y)\|] + c[\|x-T(y)\| + \|y-T(x)\|]$$

donde a,b,c son números no negativos tales que $a+2b+2c = 1$.

§1. Introducción. K. Goebel, W.A. Kirk y T.N. Shimi demostraron en [2] que todo operador continuo $T:K \to K$ definido sobre un subconjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach uniformemente convexo que satisface la condición

$$\|T(x)-T(y)\| \leq a\|x-y\| + b[\|x-T(x)\| + \|y-T(y)\|] + c[\|x-T(y)\| + \|y-T(x)\|] \tag{1}$$

con $a,b,c \geq 0$ y $a+2b+2c = 1$, tiene un punto fijo en K.

En este artículo extendemos los resultados de [2] para operadores arbitrarios, es decir no necesariamente continuos que satisfacen la condición (1).

De otra parte L. Nova en [3] introdujo la clase $D(a,b)$ sobre un subconjunto K de un espacio de Banach, formada por todos los operadores $T:K \to K$ que satisfacen la condición

$$\|T(x)-T(y)\| \leqslant a\|x-y\| + b[\|x-T(x)\| + \|y-T(y)\|] \tag{2}$$

con $0 \leqslant a,b \leqslant 1$, y demostró que si $T \in D(a,b)$ con $a+2b < 1$ sobre un subconjunto cerrado K de un espacio de Banach, entonces T tiene un punto fijo. Si observamos que $D(a,b)$ con $a+2b = 1$ esta formada por los operadores T que satisfacen la condición (1) con $c = 0$ y que para $a+2b < 1$, $D(a,b) \subset D(1-2b,b)$, el artículo generaliza también los resultados de [3] para espacios de Banach uniformemente convexos.

§2. **Sección principal**. En nuestra prueba haremos uso del siguiente resultado cuya demostración es similar a la dada en [2] y no requiere la continuidad del operador T.

LEMA 1. *Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo, K un subconjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo de X, y sea $T:K \to K$ un operador que satisface la condición (1). Si $x,y \in K$ son tales que $\|x-T(x)\| \leqslant \varepsilon$, $\|y-T(y)\| < \varepsilon$ y $z = (x+y)/2$, entonces*

$$\|z-T(z)\| \leqslant \max[2\alpha\sqrt{\varepsilon},\quad (\alpha\varepsilon+d(K)/2)(\eta\sqrt{\varepsilon})] \tag{3}$$

donde $\alpha = (1+b+c)/(1-b-c)$ y η es la función inversa del módulo de convexidad de X.

El siguiente lema es fundamental.

LEMA 2. *Sea X un espacio de Banach, K un subconjunto de X y $T \in D(a,b)$. Entonces para todo $z,x \in K$ tenemos*

$$\|x-T(z)\| \leqslant [(1+b)/(1-b)]\|x-T(x)\| + [(a+b)/(1-b)]\|z-x\| \tag{4}$$

Demostración. tenemos

$$\|z-T(z)\| \leqslant \|z-x\| + \|x-T(x)\| + \|T(x)-T(z)\|$$
$$\leqslant \|z-x\| + \|x-T(x)\| + a\|x-z\| + b[\|x-T(x)\| + \|z-T(z)\|].$$

Por lo tanto,

$$\|z-T(z)\| \leqslant [(1+a)/(1-b)]\|z-x\| + [(1+b)/(1-b)]\|x-T(x)\| \tag{*}$$

De otra parte

$$\|x-T(z)\| \leqslant \|x-T(x)\| + \|T(x)-T(z)\|$$
$$\leqslant \|x-T(x)\| + a\|x-z\| + b[\|x-T(x)\| + \|z-T(z)\|]$$

y usando (*) tenemos

$$\|x-T(z)\| \leqslant [(1+b)+b(1+b)/(1-b)]\|x-T(x)\|$$
$$+ [a+b(1+a)/(1-b)]\|z-x\|.$$

Puesto que $[(1+b)+b(1+b)/(1-b)] = (1+b)/(1-b)$ y $a+b(1+a)/(1-b) = (a+b)/(1-b)$, obtenemos la desigualdad deseada. ▲

Observando que los operadores T que satisfacen la condición (1), pertenecen a la clase $D(A,B)$ con $A = a+2c$ y $B = b+c$, que $(1+B)/(1-B) \leqslant 3$ y $(A+B)/(1-B) \leqslant 3$, del lema anterior deducimos

LEMA 3. *Sea* X *un espacio de Banach,* K *un subconjunto de* X, *y* $T: K \to K$ *un operador que satisface la condición* (1). *Entonces para todo* $x, z \in K$ *tenemos*

$$\|x-T(z)\| \leqslant 3(\|x-T(x)\| + \|z-x\|). \tag{5}$$

El resultado principal es el siguiente

TEOREMA. *Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo, K un subconjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo de X, y T:K → K un operador que satisface la condición (1). Entonces T tiene un punto fijo y este punto es único si* $b > 0$.

Demostración. No se pierde generalidad si suponemos que $0 \in K$. Usando la misma prueba dada en [2] tenemos que $\inf_{x \in K} \|x-T(x)\| = 0$. Para $\varepsilon \in (0,1/3)$, sea $C_\varepsilon = \{x \in K : \|x-T(x)\| \leq \varepsilon\}$, luego cada $C_\varepsilon \neq \emptyset$. Supongamos que $x \in \bar{C}_\varepsilon$ y sea (x_n) una sucesión en C_ε tal que $x_n \to x$. Por (5) tenemos

$$\|x_n - T(x)\| \leq 3\varepsilon + 3\|x_n - x\|, \qquad \text{para } n = 1,2,\ldots$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$, obtenmos $\|x-T(x)\| \leq 3\varepsilon$. Por lo tanto $\bar{C}_\varepsilon \in C_{3\varepsilon}$. Sea

$$A_\varepsilon = \bar{C}_\varepsilon \cap \bar{B}(0,\bar{a}+\varepsilon)$$

donde $\bar{a} = \lim_{\varepsilon \to 0} a(\bar{C}_\varepsilon)$ y $a(\bar{C}_\varepsilon) = \inf\{\|x\| : x \in \bar{C}_\varepsilon\}$. El teorema queda demostrado si probamos que $\bigcap_{\varepsilon > 0} \bar{C}_\varepsilon \neq \emptyset$. Podemos suponer que $a > 0$, pues si $a = 0$ entonces $0 \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \bar{C}_\varepsilon$

Asumamos que $x,y \in \bar{C}_\varepsilon$, $x \neq y$, entonces $\|x-T(x)\| \leq 3\varepsilon$, $\|y-T(y)\| \leq 3\varepsilon$ y por el Lema 1

$$\|(x+y)/2 - T[(x+y)/2]\| \leq \max[2\alpha\sqrt{3\varepsilon}, (3\alpha\varepsilon + d(K)/2)\eta(\sqrt{3\varepsilon})].$$

Si representamos el último término por $\emptyset(\varepsilon)$, hemos probado que si $x,y \in \bar{C}_\varepsilon$, entonces $(x+y)/2 \in \bar{C}_{\emptyset(\varepsilon)}$. Además, $\emptyset(\varepsilon) \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Supongamos ahora que $x,y \in A_\varepsilon$. Luego $\|x\| < \bar{a}+\varepsilon$ y $\|y\| < \bar{a}+\varepsilon$ y puesto que $(x+y)/2 \in \bar{C}_{\emptyset(\varepsilon)}$, entonces $\|(x+y)/2\| \geq a(\bar{C}_{\emptyset(\varepsilon)})$. Por un lema de Göebel, ver [1],

$$\|x-y\| \leq (\bar{a}+\varepsilon)\eta((\bar{a}+\varepsilon - a(\bar{C}_{\emptyset(\varepsilon)}))/(\bar{a}+\varepsilon))$$

y en consecuencia, $d(A_\varepsilon) \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$. Como K es completo y los conjuntos A_ε son cerrados por el teorema de la intersección de Cantor $\bigcap_{\varepsilon>0} A_\varepsilon \neq \emptyset$ y por lo tanto $\bigcap_{\varepsilon>0} \bar{C}_\varepsilon \neq \emptyset$, como queríamo probar.

Finalmente como $T \in D(A,B)$ con $A = a+2c$ por el Lema 1 de [3], el punto fijo de T es único si $A < 1$, es decir si $b > 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Göebel, K., *An elementary proof of the fixed point theorem of Browder and Kirk.* Michigan Math. J., **16** (1969) 381-383.

[2] Göebel, K., Kirk, W.A., Shimi, T.N., *A fixed point theorem in uniformly convex spaces.* Boll. U. Mat. Ital., (4) **7** (1973) 63-75.

[3] Nova, L., *Fixed point theorem for some discontinuous operators.* Pacif. J. Math., **123** (1) (1986) 189-195.

*

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E. Colombia.

(Recibido en enero de 1987).