Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXI (1987), págs. 257-262

APLICACIONES NO CONMUTATIVAS Y PUNTOS FIJOS

por

Jaime RODRIGUEZ MONTES

Abstract. If f, g are continuous maps of a complete metric space X such that fg = gf, $d(g(x),g(y)) \leqslant \alpha d(f(x),f(y))$ for some $0 < \alpha < 1$, and $g(X) \subseteq f(X) \subseteq X$, then f, g have a common fixed point. This is a result of G. Jungck; K.M. Das and K. Viswanatha Naik have generalized this result by deleting the continuity of f but assuming instead that of f^2. A result that generalizes those above, but does not assume the continuity of either f or f^2 or the commutativity of f and g is proposed. The impossed conditions are that for some non empty complete subset K of X, $g(K) \subseteq f(K) \subseteq K$, that $d(g(x), g(y)) \leqslant \alpha d(f(x),f(y))$, $0 < \alpha < 1$, $x,y \in K$, and that if $x \in X$, the existence of a sequence $\{x_n\}$ of K such that $\lim f(x_n) = \lim g(x_n) = x$ ensures that $f(x) = g(x)$.

Introduced. G. Jungck, K.M. Das y K. Viswanatha Naik han dado algunos resultados interesantes sobre puntos fijos comunes de aplicaciones continuas que conmutan. Estos resultados pueden ser generalizados a aplicaciones no necesariamente continuas, que conmutan solo en un punto.

§1. Los teoremas de Jungck, Das y Viswanatha.

TEOREMA 1.1. (G. Jungck, [2]). *Sea X un espacio métrico completo. Sean f, g aplicaciones continuas de X en sí mis-*

mo que conmutan y son tales que $g(X) \subseteq f(X)$. *Supóngase además que existe* $\alpha \in (0,1)$ *tal que, para todo par* x, y *en* X,

$$d(g(x),g(y)) \leqslant \alpha d(f(x),f(y)).$$

Entonces, f *y* g *tienen un único punto fijo común.*

TEOREMA 1.2. (K.M. Das y K. Viswanatha Naik, [1]). *Supóngase que todas las hipótesis del Teorema 1.1, excepto la continuidad de* f*, se cumplen. Si* f^2 *es continua, entonces* f *y* g *tienen un único punto fijo común.*

En lo que sigue, supondremos conocido el "Principio de Contracción de Banach", que dice:

TEOREMA 1.3. *Si* (X,d) *es un espacio métrico completo y* $f:X \to X$ *es una aplicación tal que para todo par* x, y *en* X

$$d(f(x),f(y)) \leqslant \alpha d(x,y), \qquad \alpha \in (0,1),$$

entonces, f *tiene un único punto fijo.*

§2. El teorema principal.

En esta sección se demostrará un teorema de punto fijo que generaliza los teoremas 1.1 y 1.2.

TEOREMA 2.1. *Sean* (X,d) *un espacio métrico,* f *y* g *aplicaciones de* X *en sí misma. Entonces,* f *y* g *tienen un punto fijo común si y sólo si existen* $K \subseteq X$*, completo y no vacío, y* $\alpha \in (0,1)$*, tales que*

(i) $g(K) \subseteq f(K) \subseteq K$.

(ii) *Para todo par de puntos* x, y *en* K

$$d(g(x),g(y)) \leqslant \alpha d(f(x),f(y)).$$

(iii) *Dado* $x \in X$*, si existe* $\{x_n\} \subseteq K$ *tal que*

$$\lim f(x_n) = \lim g(x_n) = x,$$

entonces $f(x) = g(x)$.

Demostración. Para ver que la condición es necesaria, supongamos que $f(a) = g(a) = a$ para algún $a \in X$. Las condiciones (i), (ii) y (iii) se cumplen trivialmente para $K = \{a\}$ y para todo $\alpha \in (0,1)$.

Veamos ahora que la condición es suficiente. Definamos en K la siguiente relación de equivalencia:

$$x \sim y \text{ si y sólo si } f(x) = f(y).$$

Si en el espacio cociente $K = \tilde{K}/\sim$ definimos $\tilde{f},\tilde{g}:\tilde{K} \to f(K)$ por $\tilde{f}(\tilde{x}) = f(x)$, $\tilde{g}(\tilde{x}) = g(x)$, $\tilde{x} \in \tilde{K}$, entonces $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ están bien definidas y $\tilde{f}$ es inyectiva. Como $g(K) \subseteq f(K)$, la aplicación $\tilde{g}\circ\tilde{f}^{-1}:f(K) \to f(K)$ es tal que, para $x,y \in K$,

$$d(\tilde{g}\circ\tilde{f}^{-1}(f(x)),\tilde{g}\circ\tilde{f}^{-1}(f(y))) = d(g(x),g(y)) < \alpha d(f(x),f(y)).$$

Es decir $\tilde{g}\circ\tilde{f}^{-1}$ es una α-contracción. Podemos entonces extender $\tilde{g}\circ\tilde{f}^{-1}$ a $\overline{f(K)}$ manteniendo la misma propiedad. Denotemos con $\overline{\tilde{g}\circ\tilde{f}^{-1}}$ a tal extensión. Por el Teorema 1.3, existe un único $x \in \overline{f(K)}$ tal que

$$\overline{\tilde{g}\circ\tilde{f}^{-1}}(x) = x.$$

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de K tales que $\lim f(x_n) = x$. La continuidad de $\overline{\tilde{g}\circ\tilde{f}^{-1}}$ asegura que

$$\lim g(x_n) = x$$

y, por (iii),

$$f(x) = g(x).$$

Como

$$\tilde{g}\circ\tilde{f}^{-1}(f(x)) = f(x),$$

la unicidad del punto fijo de $\overline{\tilde{g}\circ\tilde{f}^{-1}}$ permite decir que

$$f(x) = g(x) = x.$$

Se concluye que x es punto fijo común de f y g.

Nota 2.1. Obsérvese que la condición (ii) del Teorema

2.1 asegura que, sobre K, f y g tienen un único punto fijo común el cual está en g(K). En efecto, si $x,y \in K$, $f(x) = g(x) = x$ y $f(y) = g(y) = y$, entonces

$$d(x,y) = d(g(x),g(y)) \leqslant \alpha d(f(x),f(y) = d(x,y),$$

de lo cual $(1-\alpha)d(x,y) \leqslant 0$. Como $\alpha \subset (0,1)$, necesariamente $d(x,y) = 0$.

Nota 2.2. Si suponemos satisfechas las condiciones de los teoremas 1.1 y 2.1, $x \in X$, y existe $\{x_n\} \subseteq K$ tal que

$$\lim f(x_n) = \lim g(x_n) = x,$$

entonces $f(x) = g(x)$. En efecto, claramente $\overline{\tilde{g}\circ\tilde{f}^{-1}}(x) = x$, y de la continuidad de f^2 y g^2 se deduce que

$$\lim f^2g(x_n) = \lim f^3(x_n) = f^2(x)$$

y que

$$\lim g^2f(x_n) = \lim g^3(x_n) = g^2(x).$$

Como

$$d(gf^2(x_n),g^3(x_n)) \leqslant \alpha d(f^3(x_n),g^2f(x_n)),$$

pasando al límite cuando $n \to \infty$ se obtiene que

$$d(f^2(x),g^2(x)) \leqslant \alpha d(f^2(x),g^2(x))$$

y como $0 < \alpha < 1$, que

$$f^2(x) = g^2(x).$$

Por otra parte, de

$$d(gf(x),g^2(x)) \leqslant \alpha d(f^2(x),f\circ g(x)),$$

se deduce que

$$g\circ f(x) = f^2(x) = g^2(x).$$

Como $f^2(x)$ es punto fijo de $\overline{\tilde{g}\circ\tilde{f}^{-1}}$, la unicidad del punto fijo de tal aplicación asegura entonces que

$$f^2(x) = x.$$

Debido a la conmutatividad entre f y g se concluye, finalmente que $f(x) = g(x)$.

Esta observación muestra que el Teorema 2.1 efectivamente generaliza los resultados de los teoremas 1.1 y 1.2. El siguiente ejemplo ilustra esta situación:

EJEMPLO 2.1. Sea $X = \mathbb{R}$ con la métrica usual y definamos $f,g:X \to X$ como sigue: Para $0 \leqslant x \leqslant 1/3$,

$$f(x) = \begin{cases} 4x/3(x+1), & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x^2/3, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } X \in \mathbb{Q}^c. \end{cases}$$

En $\mathbb{R}-[0,1/3]$, defininamos f y g de tal manera que sean discontinuas y no conmutativas. Tomando $K = [0,1/3]$ y $\alpha = 16/27$, se verifican fácilmente las condiciones del teorema. Se concluye que f y g tienen en K un único punto fijo en común: $x = 0$. Nótese que f tiene dos puntos fijos $x = 0$ y $x = 1/3$, pero que solo $x = 0$ es punto fijo común para f y g.

Agradecimiento. Quiero expresar mis agradecimientos a los profesores Jairo Charris C. y Lucimar Nova G. por su ayuda en la preparación de este artículo.

BIBLIOGRAFIA

[1] Das, K.M. and Viswanatha-Naik, K., *Common fixed point theorems for commutative maps on a metric space.*

Proc. Amer. Math. Soc. 77 (3) (1979), 369-373.
[2] Jungck, G., *Commutating mapping and fixed points*. Amer. Math. Monthly, 83 (1976), 261-263.

*

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E. Colombia.

(Recibido en enero de 1987).