Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXII (1988), págs. 1-12

CONVERGENCIA EN RELACION

por

Nicolás M. ZALOTE

Summary. The involvement in a subset of $E\times E$ of the conventional definition of limit on a topological space E, leads in a natural way to *Convergence in relation theory*, whose primary results will be shown in this paper.

Sea $E^{\bullet}$ un espacio dotado de una relación binaria reflexiva $(\cdot)$, definida por un subconjunto R del producto cartesiano $E\times E$. Para indicar que el par (x,y) pertenece a R emplearemos la notación $x \doteq y$. De este modo se cumplen las propiedades siguientes:

I) *La igualdad sobre E en el sentido ordinario: $x = y$, implica la "igualdad en relación", $x \doteq y$.*

II) *Si para todo $(x,y) \in R$ resulta $x = y$, se verifica entonces, que $R = R_0 = \{(x,x) \mid x \in E\}$.*

Llamaremos *clausura en relación* de un subconjunto no-vacío A de E, al conjunto $A^{\bullet}$ definido por:

$$A^{\bullet} = \{x \in E \mid \exists a \in A : x \doteq a\}.$$

Se prueba con facilidad que:

III) $A \subset A^{\bullet}$.

IV) $(A_1 \cup A_2)^{\bullet} = A_1^{\bullet} \cup A_2^{\bullet}$.

V) $A \subset B \Rightarrow A^{\bullet} \subset B^{\bullet}$

VI) $(\bigcap_i A_i)^{\bullet} \subset \bigcap_i A_i^{\bullet}$

Poniendo $\phi^{\bullet} = \phi$, se puede, entonces, definir una pseudo-clausura, en el sentido de Kuratowski, ([1],pg.43), mediante

$$A \in \mathcal{P}(E) \longrightarrow \Phi(A) = A^{\bullet} \in \mathcal{P}(E).$$

Sea μ la topología asociada a Φ. Probemos que:

VII) *Φ es una clausura; es decir, se tiene: $A^{\bullet\bullet} = A^{\bullet}$, para todo $A \subset E$, si y sólo si $(\bullet)$ es transitiva.*

En efecto, si la relación dada es transitiva, resulta:

$$x \in A^{\bullet\bullet} \Rightarrow \exists y \in A^{\bullet} : x \doteq y \Rightarrow \exists a \in A : y \doteq a \Rightarrow x \doteq a \Rightarrow x \in A^{\bullet}.$$

Recíprocamente, supongamos que Φ sea una clausura y que: $x \doteq y$, $y \doteq z$. Entonces, se tiene: $x \doteq y \Rightarrow x \in \{y\}^{\bullet}$, $y \doteq z \Rightarrow y \in \{z\}^{\bullet}$, y por tanto: $x \in \{y\}^{\bullet} \subset \{z\}^{\bullet\bullet} = \{z\}^{\bullet} \Rightarrow x \doteq z$.

VIII) *Si $(\bullet)$ esta definida por R_0, todo subconjunto de E resulta cerrado para la topología μ y recíprocamente.* (Es inmediato).

Dotemos, ahora, a $E^{\bullet}$ de una topología τ, tal que el sistema de entornos $\mathcal{N}_x$ no se reduzca al pl no E para ningún punto $x \in E$. Esta restricción no es esencial pero facilita la exposición, al disponerse para todo $x \in E$ de una base $\mathcal{B}_x$ de entornos U, abiertos y distintos de E.

Esto sentado, diremos que una red $(x_i)_I$ con valores en $E^{\bullet}_{\tau}$ *converge en relación* hacia un punto $x \in E$, si está eventualmente en la clausura en relación $U^{\bullet}$ de cada $U \in \mathcal{B}_x$. Dicho de otro modo, si

$$\forall U \in \mathcal{B}_x, \quad \exists i_U \in I : i_U \leq i \Rightarrow x_i \in U^{\bullet}.$$

Para expresarlo, emplearemos la notación: $(x_i)_I \xrightarrow[\tau]{\bullet} x$.

Empecemos dando las propiedades iniciales siguientes:

IX) *Si* $(x_i)_I \xrightarrow[\tau]{\bullet} x$, *existen dos redes* $(y_j)_J$, $(x_j)_J$, *definidas sobre un mismo conjunto dirigido* J, *tales que:*

a) $(y_j)_J$ *es subred de* $(x_i)_I$, *en símbolos* $(y_j)_J \sqsubset (x_i)_I$.

b) $y_j \stackrel{\bullet}{=} z_j$, $\forall j \in J$.

c) $(z_j)_J \xrightarrow[\tau]{} x$.

En efecto, el conjunto $J = \{j = (i,U) \mid i \in I,\ U \in B_x, x_i \in U^\bullet\}$ se puede ordenar por: $(i,U) \leqslant (i', U') \Longleftrightarrow (i \leqslant i') \wedge (U' \subset U)$. Por otro lado, la aplicación $j = (i,U) \in J \longrightarrow \phi(j) = i \in I$, verifica la condición de cofinalidad: $\forall i \in I$, $j_i \in J : j_i \leqslant j \Longrightarrow i \leqslant \phi(j)$. Por tanto, haciendo $y_j = x_{\phi(j)}$, obtenemos una subred $(y_j)_J$ de la red original $(x_i)_I$. Además, como para $j = (i,U)$, el término $x_{\phi(j)}$ está en $U^\bullet$, debe existir un $z_j \in U$, con: $y_j \stackrel{\bullet}{=} z_j$, $\forall j \in J$. Finalmente, la red $(z_j)_J$ converge hacia $x \in E$, en sentido ordinario, para la topología τ.

X) *Si* $(x_i)_I \xrightarrow[\tau]{} x$, *y si* $y_i \stackrel{\bullet}{=} x_i$, $\forall i \in I$, *se tiene* $(y_i)_I \xrightarrow[\tau]{\bullet} x$. (Es inmediato).

XI) *La convergencia de redes en sentido ordinario para la topología* τ, *implica la convergencia en* $E^\bullet_\tau$. (Resulta, así mismo, inmediato).

XII) *Si* $R = R_0$. *los conceptos de convergencia ordinaria y de convergencia en relación se confunden. El recíproco es cierto si la topología* τ *es separadora.*

En efecto, si $x \stackrel{\bullet}{=} y$, se tiene: $(x) \xrightarrow[\tau]{\bullet} y$ (red de términos constantes), y por tanto: $(x) \xrightarrow[\tau]{} y$. Pero. $(x) \xrightarrow[\tau]{} x$. La unicidad del límite permite, ahora, inferir que $x = y$.

El siguiente paso a dar es ver con qué extensión pueden generalizarse al caso de convergencia en relación, los axiomas de Kuratowski para convergencia de redes en sentido ordinario. ([1].pg.74). Los dos primeros se transcriben, sin más, como sigue:

XIII) $(x) \xrightarrow[\tau]{\bullet} x, \ \forall x \in E$.

XIV) $(x_i)_I \xrightarrow[\tau]{\bullet} x \quad (y_j)_J \sqsubset (x_i)_I \Rightarrow (y_j)_J \xrightarrow[\tau]{\bullet} x.$

Antes de estudiar el tercero, es conveniente establecer las propiedades aclaratorias siguientes:

XV) *La condición necesaria y suficiente para que exista una red con valores en* $E^{\bullet}_{\tau}$, *no convergente en relación hacia el punto* $x \in E$, *es que al menos para un entorno* $U \in \mathcal{B}_x$, *se tenga:* $U^{\bullet} \neq E$.

En efecto, si $U^{\bullet}$ es estrictamente menor que E, existe un $y \in E$, tal que: $y \notin U^{\bullet}$. Entonces, $(y) \not\xrightarrow[\tau]{\bullet} x$. Recíprocamente, si $(x_i)_I \not\xrightarrow[\tau]{\bullet} x$, existe un entorno $U \in \mathcal{B}_x$ $(U \neq E)$, con la propiedad:

$$\forall i, \quad \exists i' : i \leqslant i' \wedge x_{i'} \notin U^{\bullet}$$

De este modo, el conjunto $I' = \{i' \in I \mid x_{i'} \notin U^{\bullet}\}$ es no-vacío y por tanto, $U^{\bullet} \neq E$. Más aún, el conjunto I' resulta cofinal del I y en consecuencia: $(x_{i'})_{I'} \sqsubset (x_i)_I$. Además, la subred $(x_{i'})_{I'}$ tiene todos sus términos fuera de $U^{\bullet}$ y está, por lo tanto, en $\complement U$, con lo que ni ella ninguna de sus subredes converge en relación hacia $x \in E$.

Esto aclarado, diremos que una red $(x_i)_I$ con valores en $E^{\bullet}_{\tau}$, posee la propiedad $K^{\bullet}_x$, si es cierta la proposición:

$$\forall (y_j)_J \sqsubset (x_i)_I, \ \exists (z_k)_K \sqsubset (y_j)_J : \ (z_k)_K \xrightarrow[\tau]{\bullet} x. \qquad (1)$$

El tercer axioma se extiende, ahora, al caso general de convergencia en relación, como sigue:

XVI) *Toda red con valores en* $E^{\bullet}_{\tau}$ *que posea la propiedad* $K^{\bullet}_x$, *converge en relación hacia el punto* $x \in E$. *Por tanto, la condición necesaria y suficiente para que* $(x_i)_I \xrightarrow[\tau]{\bullet} x$ *es que* $(x_i)_I$ *tenga la propiedad* $K^{\bullet}_x$.

Diremos, a continuación, que $E^{\bullet}_{\tau}$ es *coherente*, si se satisface el siguiente postulado adicional:

α) $(x_i)_I \xrightarrow[\tau]{\bullet} x \wedge x \stackrel{\bullet}{=} y \Rightarrow (x_i)_I \xrightarrow[\tau]{\bullet} y$.

Vamos, ahora, a probar, que la condición necesaria y suficiente para que el cuarto axioma de Kuratowski (*propiedad del límite iterado*) sea extensible al caso de convergencia en relación, es que el espacio $E^{\bullet}_{\tau}$ sea coherente. Empecemos previamente por dar la citada propiedad del límite iterado para el caso de redes convergentes en relación, la cual siguiendo la línea expuesta en [1], la enunciaremos como sigue:

β) Sea I un conjunto dirigido y sea, a su vez, J_i un conjunto dirigido para cada $i \in I$. Si se verifica que:

$$(x^i_j)_{J_i} \xrightarrow[\tau]{\bullet} x_i, \quad \forall i \in I \tag{2}$$

$$(x_i)_I \xrightarrow[\tau]{\bullet} x, \tag{3}$$

entonces la red $(y_r)_P$, definida sobre el conjunto dirigido $P = I \times \prod_{i\in I} J_i$ de forma que si $r = (i,\xi)$, $i \in I$, $\xi \in \prod_{i\in I} J_i$, se tenga $y_r = x^i_{\xi(i)}$, en donde $\xi(i)$ representa la proyección de ξ sobre el espacio J_i, es tal que

$$(y_r)_P \xrightarrow[\tau]{\bullet} x.$$

Vamos entonces a probar que:

XVII) $(\alpha) \Longleftrightarrow (\beta)$.

En efecto, supongamos que (α) sea cierto. De (3) se deduce que dado un $U \in B_x$, $(U \neq E)$, existe un $i_U \in I$, con

$$i_U \leqslant i \Rightarrow x_i \in U^{\bullet}. \tag{4}$$

Para cada uno de esos subíndices $i \in I$, existe un elemento $y_i \in U$, tal que: $x_i \stackrel{\bullet}{=} y_i$. Invocando ahora (α), se tiene

$$(x^i_j)_{J_i} \xrightarrow[\tau]{\bullet} y_i \qquad (i_U \leqslant i) \tag{5}$$

Por otro lado, como U es abierto (no-vacío), será entorno de y_i $(i_U \leqslant i)$, y en consecuencia, existe un $j\ (i,U) \in J_i$, tal que

$$j(i,U) \leqslant j \Rightarrow x_j^i \in U^\bullet. \tag{6}$$

Podemos, ahora, definir un $\xi_U \in \prod_{i\in I} J_i$ por $\xi_U(i) = j(i,U)$, para $i_U \leqslant i$, $\xi_U(i)$ arbitrario, en caso contrario. De este modo la red $(y_h)_P$ converge en relación hacia $x \in E$. Recíprocamente, supongamos cierta la propiedad del límite iterado y vamos a probar que

$$(x_j)_J \xrightarrow[\tau]{\bullet} x \wedge x \doteq y \Rightarrow (x_j)_J \xrightarrow[\tau]{\bullet} y.$$

Se considera, para ello, la familia de redes $(x_j^i)_{J_i}$ del caso general, reducida aquí, a la red única $(x_j)_J$ y se toma como red de límites, la de términos constantes (x), la cual, en virtud de la hipótesis, converge en relación hacia y. A continuación se aplica (β) para concluir que $(x_j)_J$ converge en relación hacia y.

Si $E_\tau^\bullet$ es coherente, el conjunto $\mathfrak{C}$ de pares definidos por

$$[(x_i)_I, x] \in \mathfrak{C} \Longleftrightarrow (x_i)_I \xrightarrow[\tau]{\bullet} x,$$

resulta una clase de convergencia, y en consecuencia existe una topología asociada $\tau^\bullet$ con las dos propiedades siguientes:

1) $(x_i)_I \xrightarrow[\tau]{\bullet} x \Longleftrightarrow (x_i)_I \xrightarrow[\tau^\bullet]{} x.$
2) Un subconjunto $A \subset E$, no vacío, cumple la condición: $x \in \overline{A}^{\tau^\bullet} \Longleftrightarrow \exists (x_i)_I \subset A : (x_i)_I \xrightarrow[\tau]{\bullet} x.$

Es decir, cuando $E_\tau^\bullet$ es coherente, la convergencia en relación se refleja en una convergencia en sentido ordinario, respecto de la topología asociada $\tau^\bullet$. En este caso, también, la familia $\{U^\bullet\}$, cuando U recorre $\mathcal{B}_x$, resulta una base de entornos de x para la topología $\tau^\bullet$. En efecto,

XVIII) *Dado $U \in \mathcal{B}_x$, supongamos que no exista ningún* *entorno* V *de* x*, para la topología* $\tau^\bullet$*, que este contenida en* $U^\bullet$*. Existe entonces para cada* V *un elemento* $x_V \in V$ *con* $x_V \notin U^\bullet$*. En consecuencia, la red* (x_V)*, tomada sobre el sistema* N_x *de* $\tau^\bullet$*-entornos de* x*, es tal que converge hacia* x *para la topología* $\tau^\bullet$ *y sin embargo no converge en relación hacia dicho punto.*

Visto así que los $\{U^\bullet\}$ son entornos de x para la topología $\tau^\bullet$, probemos a continuación que constituyen una base. Razonando análogamente, supongamos que en un entorno dado V, no exista ningún $U^\bullet$ con la condición $U^\bullet \subset V$. Existe, así, un elemento $x_{U^\bullet} \in U^\bullet$ con $x_{U^\bullet} \notin V$. La red $(x_{U^\bullet})$, definida sobre el conjunto dirigido $\{U^\bullet\}$ (por inclusión), es tal que converge en relación hacia x pero no converge para la topología $\tau^\bullet$ hacia el mismo límite.

COROLARIO. *Si* $E^\bullet_\tau$ *es coherente, los* $\{U^\bullet\}$*, cuando* U *recorre* $\mathcal{B}_x$*, definen una topología para la cual las citadas familias obtenidas al mover* x *sobre* E *son bases de entornos.*

La convergencia en relación encuentra una aplicación interesante en el tratamiento de topologías cocientes, ya que permite reducirlas a un espacio del tipo estudiado $E^\bullet_\tau$.

Consideremos el caso en que $(\cdot)$ es una equivalencia en $E^\bullet_\tau$. Sea $\mathcal{E}$ el conjunto formado por los elementos de la forma $X = \{x\}^\bullet$, cuando x recorre E. Sea $U \in \mathcal{B}_x$ y formemos el subconjunto U_* de $\mathcal{E}$, definido por:

$$U^* = \{\{u\}^\bullet \mid u \in U\}$$

Al variar U sobre $\mathcal{B}_x$, los $\{U^*\}$ constituyen una base de entornos de $\{x\}^\bullet$ para la topología cociente ν. Supongamos que: $\{x_i\}^\bullet_I \longrightarrow \{x\}^\bullet$, vamos a probar que $(x_i)_I \xrightarrow[\tau]{\bullet} x$.

En efecto, dado el entorno $U \in \mathcal{B}_x$, determinemos el correspondiente U^*, entorno de $\{x\}^\bullet$ para la topología ν. Entonces, desde un subíndice i_U en adelante, se tiene $\{x_i\}^\bullet \in U^*$. Para cada uno de esos subíndices, existe un $u_i \in U$, tal que

$\{x_i\}^\bullet = \{u_i\}^\bullet$, y por tanto: $x_i \doteq u_i$. En definitiva, resulta que

$$i_U \leq i \Rightarrow x_i \in U^\bullet,$$

con lo cual, la red $(x_i)_I$ converge en relación hacia x.

Recíprocamente, vamos a probar que si $(x_i)_I \xrightarrow[\tau]{\bullet} x$, se tiene: $\{x_i\}_I^\bullet \xrightarrow[\nu]{} \{x\}^\bullet$. Sea, para ello, U^* un entorno de la base correspondiente al punto $\{x\}^\bullet$ para la topología ν. Desde un cierto i_{U*} en adelante, se tiene $x_i \in U^\bullet$. Esto prueba que $x_i \doteq u_i$, con $u_i \in U$. Por tanto, se tiene: $\{x_i\}^\bullet = \{u_i\}^\bullet \in U^*$. lo cual implica la convergencia de $\{x_i\}_I^\bullet$ hacia $\{x\}^\bullet$ para la topología ν. En resumen, resulta:

$$\{x_i\}_I^\bullet \longrightarrow \{x\} \Leftrightarrow (x_i)_I \xrightarrow[\tau]{\bullet} x,$$

con independencia de los representantes x_i, x elegidos, respectivamente, para las clases $\{x_i\}_I^\bullet$ y $\{x\}^\bullet$.

Cuando $(\bullet)$ es una equivalencia, se prueba la propiedad siguiente:

XIX) *Si* $(x_i)_I \xrightarrow[\tau]{\bullet} x$, *y si* $y_i \doteq x_i$, $\forall i$, *y si además,* $y \doteq x$, *resulta* $(y_i)_I \xrightarrow[\tau]{\bullet} y$.

En efecto, $(x_i)_I \xrightarrow[\tau]{\bullet} x \Rightarrow \{x_i\}_I^\bullet \xrightarrow[\nu]{} \{x\}^\bullet \Rightarrow \{y_i\}_I^\bullet \longrightarrow \{y\}^\bullet$ $\Rightarrow (y_i)_I \xrightarrow[\tau]{\bullet} y$.

La propiedad (XIX) es más fuerte que el postulado de coherencia (α). Por tanto, cuando en $E_\tau^\bullet$, la relación $(\bullet)$ resulta una equivalencia, el espacio es coherente.

Finalmente, veamos cómo se enlazan las adherencias en $\mathcal{E}$ respecto de la topología ν con las adherencias en $E_\tau^\bullet$, respecto de la topología asociada $\tau^\bullet$

XX) *Si* $E_\tau^\bullet$ *es tal que* $(\bullet)$ *resulta una equivalencia, y si además,* $A \subset E$ *es un subconjunto no vacío, se tiene:*

$$\{x\} \in \overline{t(A)}^\nu \Longleftrightarrow x \in \overline{A}^{\tau^\bullet},$$

siendo $t: E \to \mathcal{E}$ *la transformación canónica, definida por:*

$$x \in E \longrightarrow t(x) = \{x\}^{\bullet} \in \mathcal{E}.$$

En efecto, supongamos cierto que $\{x\} \in \overline{t(A)}^{\nu}$. Existe, entonces, una red $\{x_i\}_I^{\bullet}$ contenida en $t(A)$, de modo que $\{x_i\}_I^{\bullet} \xrightarrow[\nu]{} \{x\}$, y en consecuencia: $(x_i)_I \xrightarrow[\tau]{\bullet} x$. Por otro lado para cada $i \in I$ existe un $a_i \in A$, con $x_i \doteq a_i$. Finalmente, de (XIX) se deduce que $(a_i)_I \xrightarrow[\tau]{\bullet} x$, y por consiguiente $x \in \overline{A}^{\tau^{\bullet}}$. El recíproco se demuestra mediante un proceso análogo.

En resumen, la topología cociente ν sobre $\mathcal{E}$ queda reflejada en una convergencia en relación sobre el espacio origen $E_{\tau}^{\bullet}$, en donde $(\cdot)$ es la equivalencia asociada a $\mathcal{E}$.

Estos resultados son así mismo extendibles al caso de un espacio convexo cociente E_{τ}/M, sin más que probar previamente la compatibilidad de la convergencia en relación respecto de las operaciones vectoriales de E, lo que constituye un sencillo ejercicio.

En el caso de un espacio seminormado E_r, se define la equivalencia:

$$x \doteq y \Leftrightarrow x - y \in N_r,$$

en donde N_r representa el conjunto de anulación de la seminorma r. Se tiene, entonces

$$x \doteq y \Rightarrow r(x) = r(y)$$

Ahora, el conjunto C definido por:

$$[(x_i)_I, x] \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow \lim_{i \in I} r(x - x_i) = 0$$

resulta, como fácilmente se comprueba, una clase de convergencia. Existe, en consecuencia, una topología asociada τ sobre E, con la propiedad:

$$(x_i)_I \xrightarrow[\tau]{} x \Longleftrightarrow \lim_{i \in I} r(x - x_i) = 0.$$

De este modo la topología inducida por r sobre E, es τ

Consideremos a continuación el espacio $E^{\bullet}_{\tau}$, en donde $(\bullet)$ es la equivalencia anteriormente definida. Se tiene, así, que:

$$(x_i)_I \xrightarrow[\tau]{\bullet} x \Leftrightarrow \lim_{i\in I} r(x-x_i) = 0.$$

Los conceptos de convergencia ordinaria, para la topología τ, y de convergencia en relación sobre $E^{\bullet}_{\tau}$, se confunden y sin embargo, la relación $x \doteq y$ no es la identidad, al menos que r sea una norma. De acuerdo con (XII), ambas situaciones pueden coexistir en vista de que la topología τ no es separadora, salvo cuando el espacio es normado.

Es frecuente en análisis funcional, especialmente al tratar la teoría de la medida, considerar, a efectos formales, un espacio seminormado como normado, recurriendo, para ello, al convenio previo de que la igualdad: $x = y$, se interprete en el sentido de que x y y estén relacionados mediante la equivalencia definida por r. A este respecto, creemos más acertado poner $x \doteq y$, siendo ésta una causa más que justifica el empleo de la notación usada.

Cuando el espacio $E^{\bullet}_{\tau}$ es no-coherente, se obtiene condiciones más débiles. La clase de convergencia C, se convierte, ahora, en una pseudo-clase, la cual lleva, así mismo, asociada la topología $\tau^{\bullet}$, pero solamente puede garantizarse el que $(x_i)_I \xrightarrow[\tau]{\bullet} x \Rightarrow (x_i)_I \xrightarrow[\tau^{\bullet}]{} x$, y no al revés.

Si se define la *adherencia en relación* de un subconjunto no-vacío A de E, mediante

$$x \in A^c \Leftrightarrow \exists (x_i)_I \subset A : (x_i)_I \xrightarrow[\tau]{\bullet} x ,$$

se verifica que $A \subset A^c \subset \bar{A}^{\tau^{\bullet}}$

Para la topología $\tau^{\bullet}$, un conjunto A es cerrado si y solo si se tiene $A = A^c$.

Toda topología τ' para la cual sea cierto que:

$$(x_i)_I \xrightarrow[\tau]{\bullet} x \Longleftrightarrow (x_i)_I \xrightarrow[\tau']{} x,$$

resulta menos fina que $\tau^\bullet$. En todos los casos, τ es siempre más fina que $\tau^\bullet$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Kelley, J.L., *General Topology*. Van Nostrand, Princeton (1955).

*

Facultad de Matemáticas
Departamento de Ecuaciones Funcionales
Universidad de La Laguna
Tenerife, Islas Canarias
ESPAÑA.

(Recibido en mayo de 1986, la versión revisada en septiembre de 1986).