Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXII (1988), págs. 13-28

RESULTADOS RECIENTES SOBRE ESPACIOS POLINOMIALES DE TIPO NUMERABLE

por

Miguel CALDAS CUEVA

Abstract. The purpose of this article is to present some recent developments about polynomial conditions of denumerable type barrelledness in locally convex spaces. The relation between the class of denumerable type barrelled polynomials and other significant classes of polynomials in locally convex spaces is stablished.

1. Introducción. En este trabajo profundizamos el estudio de la *clasificación* de los espacios E localmente convexos, por medio de las *propiedades* del espacio $P(^mE;F)$ de los polinomios m-homogéneos continuos de E en F, donde F es un espacio localmente covexo.

Nos referiremos a Aragona [1] y Caldas [4] para la terminología y notaciones, y las convenciones siguientes: una aplicación P de E en F es un *polinomio m-homogéneo* si existe $A \in L_a(^mE;F)$ tal que $P(x) = Ax^m = A(x,\overset{m}{\dots},x)$ para todo $x \in E$. Denotaremos $P = \hat{A}$ para expresar que P y A se corresponden en la forma indicada. Denotaremos por $P(^mE;F)$ el espacio vectorial de todos los polinomios m-homogéneos continuos de E en F. Cuando $F = \mathbb{C}$ escribiremos $P(^mE)$ en lugar de $P(^mE;\mathbb{C})$.

Si E es un espacio vectorial topológico, F un espacio localmente convexo, B un conjunto formado por partes acotadas (respectivamente finitas, compactas) de E y $m \in \mathbb{N}$, se define la topología τ_b (respectivamente τ_s, τ_0) *localmente convexa en* $P(^mE;F)$ *de la convergencia uniforme sobre los acotados* (respectivamente topología *de la convergencia simple*, topología *de la convergencia uniforme sobre compactos*), como la topología definida por la familia de seminormas

$$P \in P(^mE;F) \mapsto \|P\|_{\beta,M} = \sup_{x \in M} \beta(P(x)) \in \mathbb{R}_+ ,$$

donde β varía en el conjunto $SC(F)$ de todas las seminormas continuas de F y M varía en B (en la forma indicada arriba).

Un espacio localmente convexo E es llamado *polinomialmente tonelado* (respectivamente *polinomialmente infratonelado*), si para cada $m \in \mathbb{N}$ y para cada espacio localmente convexo F, un subconjunto $\mathfrak{X} \subset P(^mE;F)$ es equicontinuo si $\mathfrak{X}$ es puntualmente acotado (respectivamente acotado en los compactos). Ver [1],[4] y [12].

Un espacio localmente convexo E es llamado *enumerablemente polinomialmente tonelado* (respectivamente *enumerablemente polinomialmente infratonelado*) si para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada espacio localmente convexo F, un subconjunto $\mathfrak{X}$ de $P(^mE;F)$ que es unión enumerable de subconjuntos equicontinuos de $P(^mE;F)$ es equicontinuo, si $\mathfrak{X}$ es τ_s-acotado (respectivamente τ_0-acotado). Ver [4].

Un espacio localmente convexo E es llamado *σ-polinomialmente tonelado* (respectivamente *σ-polinomialmente infratonelado*), si para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada espacio localmente convexo F, una sucesión $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $P(^mE;F)$ es equicontinua si $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es τ_s-acotada (respectivamente τ_0-acotada). Ver [3] y [4].

Introduciremos las siguientes abreviaciones para las propiedades de un espacio localmente convexo complejo:

d-PT = enumerablemente polinomialmente tonelado,
σ-PT = σ-polinomialmente tonelado,
PT = polinomialmente tonelado,
d-PIT = enumerablemente polinomialmente infratonelado,

σ-PIT = σ-polinomialmente infratonelado,

PIT = polinomialmente infratonelado

y tenemos las siguientes implicaciones para los espacios mencionados:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & \sigma\text{-PT} \arrow[ddr] & & \\
\text{FRECHET} \arrow[rr] \arrow[drr] \arrow[dddd, dash] & & \text{BAIRE} \arrow[r] & \text{PT} \arrow[ur] \arrow[dddr] & & & \\
 & & \text{PUB} \arrow[dddr] & & & \sigma\text{-PIT} & \\
 & \text{DFS} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\
 & & \text{DFM} \arrow[dr] & & \text{PIT} \arrow[uur] \arrow[rr] & & \text{PM} \\
\text{METRIZABLE} \arrow[rrr] & & & \text{Pb} \arrow[ur] \arrow[r] & \text{PSb} & &
\end{tikzcd}
$$

donde además:

PUb = *polinomialmente ultrabornológico* (para definición y propiedades, ver [6]).

Pb = *polinomialmente bornológico* (para definición y propiedades, ver [1],[5] y [12]).

PSb = *polinomialmente semibornólogico* (para definición y propiedades, ver [5]).

PM = *polinomialmente Mackey* (para definición y propiedades, ver [1] y [12]).

Un espacio (DF) es un espacio localmente convexo E con las siguientes propiedades:

(i) E admite un sistema fundamental enumerable de partes acotadas.

(ii) Todo subconjunto fuertemente acotado del dual E' de E que es reunión enumerable de partes equicontinuas de E' es equicontinuo.

Sean $A \in L_{as}(^mE;F)$, $m \in \mathbb{N}$ con $m \geqslant 1$ y $P = \hat{A}$ en $P(^mE;F)$. Entonces para todo $x_1, x_2, \ldots, x_m$ en E tenemos

$$A(x_1,\ldots,x_m) = \frac{1}{m!\,2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_i=\pm 1\\ 1\leqslant i\leqslant m}} \varepsilon_1\ldots\varepsilon_m \hat{A}(\varepsilon_1 x_1+\ldots+\varepsilon_m x_m)$$

denominada Fórmula de Polarización.

2. Espacios *d*-polinomialmente tonelados y *d*-polinomialmente infratonelados. Los item de la siguiente observación son fáciles de probar:

OBSERVACION 0. (i) Todo espacio d-PT (respectivamente d-PIT) es un espacio d-tonelado (respectivamente d-infratonelado). La recíproca es falsa; ver posteriormente el ejemplo 8 (ver [8] para las definiciones de los espacios d-tonelados y d-infratonelados).

(ii) Todo espacio d-PT es d-PIT. La recíproca es falsa; ver posteriormente el ejemplo 13.

(iii) Todo espacio PT (respectivamente PIT) es d-PT (respectivamente d-PIT). La recíproca es falsa, ver posteriormente el Ejemplo 14.

PROPOSICION 1. *Sean E un espacio d-PT, F un espacio localmente convexo de Hausdorff semi-Montel. Entonces todo subconjunto $\mathcal{X}$ de $P(^mE;F)$ que es unión enumerable de subconjuntos equicontinuos de $P(^mE;F)$ es τ_s-relativamente compacto si, y sólamente si, es τ_s-acotado.*

Demostración. Si $\mathcal{X}$ es τ_s-acotado y es unión enumerable de subconjuntos equicontinuos de $P(^mE;F)$ entonces $\mathcal{X}$ es equicontinuo, pues E es d-PT. Luego para cada $x \in E$, $\mathcal{X}(x) = \{P(x);P \in \mathcal{X}\}$ es acotado en F; siendo E semi-Montel, $\mathcal{X}(x)$ es relativamente compacto en F y haciendo uso del Teorema de Tychonoff obtenemos que $\mathcal{X}$ es τ_s-relativamente compacto. Por otro lado la condición necesaria se sigue del hecho que toda parte relativamente compacta de un espacio vectorial topológico es acotada. Q.E.D.

PROPOSICION 2. *Todo espacio localmente convexo E que es d-PIT y secuencialmente completo es d-PT.*

Es bastante conocido que un espacio de Baire es un espacio holomorficamente tonelado [2], por lo tanto polinomialmente tonerlado (ver [1] y [12]) y como consecuencia tenemos la siguiente proposición.

PROPOSICION 3. *Todo espacio de Baire es un espacio d-PT.*

La demostración de la siguiente proposición es análoga a la Proposición 35 de [2] ó de la Proposición 3.11 de [12].

PROPOSICION 4. *Un espacio E localmente convexo es d-PT (respectivamente d-PIT) si, y sólamente si, para cada $\mathcal{X} \subset P(^mE)$ que es unión enumerable de subconjuntos equicontinuos de $P(^mE)$ es equicontinuo, si $\mathcal{X}$ es τ_δ-acotado (respectivamente τ_0-acotado) en $P(^mE)$.*

Demostración. Probaremos la proposición para el caso d-PT. El caso d-PIT es análogo. Siendo la necesidad evidente probaremos apenas la suficiencia. Sean F un espacio localmente convexo y $\mathcal{X} \subset P(^mE;F)$ un conjunto τ_δ-acotado, que es unión enumerable de subconjuntos equicontinuos de $P(^mE;F)$. Para toda parte equicontinua $Y \subset F'$ tenemos que

$$Y_o\mathcal{X} = \{g_oP;\ g \in Y,\ P \in \mathcal{X}\} \subset P(^mE)$$

es τ_δ-acotado, y es unión enumerable de conjuntos equicontinuos. Por tanto $Y_o\mathcal{X}$ es equicontinuo, y así $\mathcal{X}$ resulta equicontinuo, luego E es d-PT. Q.E.D.

TEOREMA 5. *Sean E un espacio d-PT localmente convexo $m \in \mathbb{N}$ y $(P_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de polinomios m-homogéneos continuos de E en un espacio F localmente convexo, que converge puntualmente a una función P de E en F. Entonces $P \in P(^mE;F)$.*

Demostración. Por hipótesis, el conjunto

$$\{P_n;\ n \geq 1\} = \bigcup_{n\geq 1} \{P_n\}$$

es τ_δ-acotado, por tanto equicontinuo, puesto que E es d-PT.

Que $P \in P_a(^mE;F)$, es verificado sin dificultad a partir de la fórmula de polarización. Como $(P_n)_{n\geqslant 1}$, es equicontinuo y τ_δ-convergente, concluimos que P es continuo. Q.E.D.

Este Teorema 5, es el Teorema de Banach-Steinhaus para polinomios m-homogéneos continuos, generalizando el Teorema 2 de Bochnak, el cual es verdadero en la categoría de espacios de Baire. Podemos observar que existen espacios tonelados de tipo (DF) consecuentemente d-PT que no son espacios de Baire.

Las dos proposiciones siguientes en la versión polinomial, son bien conocidas en el caso lineal, ver por ejemplo Husain [8].

PROPOSICION 6. *Si E es un espacio d-PT localmente convexo $m \in \mathbb{N}$ y F es un espacio de Hausdorff secuencialmente completo, entonces el espacio $P(^mE;F)$ dotado de la topología τ_δ es secuencialmente completo.*

Demostración. Si $(P_n)_{n\geqslant 1}$ es una sucesión de Cauchy en $(P(^mE;F);\tau_\delta)$, entonces para cada $x \in E$, $(P_n(x))_{n\geqslant 1}$ es una sucesión de Cauchy en F, por tanto convergente a un elemento $P(x) \in F$. El Teorema 5 nos afirma que $P \in P(^mE;F)$. Q.E.D.

PROPOSICION 7. *Sean E un espacio d-PT separable localmente convexo, F un espacio metrizable semi-Montel, y $m \in \mathbb{N}$. Entonces todo subconjunto $\mathcal{X} \subset P(^mE;F)$ que es τ_δ-acotado es τ_δ-secuencialmente relativamente compacto.*

Demostración. Para probar que $\mathcal{X}$ es τ_δ-secuencialmente relativamente compacto basta mostrar que cada sucesión en $\mathcal{X}$ tiene una subsucesión convergente a un elemento de $P(^mE;F)$ por τ_δ (el procedimiento es análogo al caso linear).

Veamos en el siguiente ejemplo que la recíproca de la observación 0, item (i), es falsa.

EJEMPLO 8. Consideremos $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ el producto cartesiano del espacio producto de una infinidad enumerable de de copias de $\mathbb{C}$, por el espacio suma directa infinita enumerable de $\mathbb{C}$, y definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ el polinomio 2-homogéneo $P_n : E \to \mathbb{C}$ de la forma $P_n(x,y) = x_n y_n$ donde $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, y $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$. Sea $B = \{P_n \in P(^2E); n \in \mathbb{N}\}$. Entonces B es un conjunto acotado de $(P(^2E), \tau_o)$ y no es localmente acotado, o sea no es equicontinuo.

Como consecuencia de este ejemplo resulta la siguiente observación: E es un espacio d-tonelado que no es d-PIT de aquí resulta que un producto de espacios d-PT puede no ser un espacio d-PIT, ya que $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ es un espacio de Frechet (luego d-PT) y $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ es un espacio (DF) tonelado (luego d-PT). Además nos muestra E como límite inductivo enumerable de espacios E_m que son d-PT, a saber: $E_m = \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \oplus \mathbb{C} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}$ $(m \in \mathbb{N})$; mas E no es d-PIT.

Para la demostración del Teorema 10, se precisa del siguiente lema dado en [12] pg.49.

LEMA 9. *Sean E un espacio PIT, F un espacio localmente convexo, $m \in \mathbb{N}$ y $\mathfrak{X} \subset P(^mE;F)$. Entonces $\mathfrak{X}$ es equicontinuo si, y sólamente si, para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E, la cual converge a cero, el conjunto $\{P(x_n); P \in \mathfrak{X}, n \in \mathbb{N}\}$ es acotado en F.*

TEOREMA 10. [4]. *Sean E un espacio d-tonelado localmente convexo y F un espacio localmente convexo tal que $E\times F$ es polinomialmente infratonelado. Sea G un espacio localmente convexo. Si $\mathfrak{X} \subset L(E,F;G)$ es tal que:*

(i) *Para cada $y \in F$ fijado, $\{A(..y); A \in \mathfrak{X}\}$ es un subconjunto equicontinuo de $L(E;G)$.*

(ii) *Para cada $x \in E$ fijado, $\{A(x,.); A \in \mathfrak{X}\}$ es un subconjunto equicontinuo de $L(F.G)$.*

Entonces $\mathfrak{X}$ es equicontinuo en $E\times F$.

(La demostración es una modificación de la demostración de la noción lineal dada en [8] y que generaliza el resultado clásico de Bourbaki y de T. Husain; más aún generaliza el

Teorema 3.17 de [12] dado para los espacios tonelados).

PROPOSICION 11. *Todo espacio* (DF)-*localmente convexo es* d-PIT.

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$ y $\mathfrak{X} \subset P(^mE)$ una reunión enumerable de conjuntos equicontinuos $\mathfrak{X}_n$ tal que $\mathfrak{X}$ es τ_0-acotado. Sea $\tilde{\mathfrak{X}}_n = \{A \in L_s(^mE); \hat{A} \in \mathfrak{X}_n\}$. Entonces por la fórmula de polarización tenemos que $\tilde{\mathfrak{X}}_n$ es equicontinua en E^m. La demostración se sigue del hecho que el correspondiente $\tilde{\mathfrak{X}}$ de $\mathfrak{X}$ es equihipocontinuo, luego $\tilde{\mathfrak{X}}$ es equicontinuo (ver Grothendieck: Summa Brasil Math.3,1954. Th.2, pg. 64), por tanto $\mathfrak{X} = \bigcup_{n \geqslant 1} X_n$ equicontinuo, de donde E resulta d-PIT. Q.E.D.

PROPOSICION 12. *Todo espacio* (DF)-*localmente convexo y secuencialmente completo es* d-PT.

Las Proposiciones 11 y 12 dadas relacionan la noción lineal con la polinomial y como consecuencia tenemos los siguientes resultados conocidos en el caso lineal [8]: todo (DF) es d-infratonelado y todo (DF) secuencialmente completo es d-tonelado respectivamente.

EJEMPLO 13. La condición secuencialmente completo en la hipótesis de la Proposición 12 es indispensable. En efecto el espacio $\mathbb{C}_\infty(\mathbb{N}) = \{x \in K^{\mathbb{N}}; (\exists m \in \mathbb{N})\ (\forall n > m)\ x_n = 0\}$ es un espacio normado (no de Banach) con la norma supremo

$$\|\cdot\| : (x_1,\ldots,x_m,0,0,\ldots) \in \mathbb{C}_\infty(\mathbb{N}) \mapsto \|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x| \in \mathbb{R}^+$$

del tipo (DF), d-PIT, no secuencialmente completo y no d-PT, pues como es sabido este espacio no es d-tonelado.

Vemos también en este ejemplo un espacio d-PIT que no es d-PT.

EJEMPLO 14. En [10] §31,7, Köthe da un ejemplo de un espacio E localmente convexo metrizable, no distinguido (ó equivalentemente $(E',\beta(E',E))$ no infratonelado). Siendo E metrizable, $(E'\beta(E',E))$ es un espacio completo del tipo

(DF). Entonces por la Proposición 12 es d-PT y por lo tanto d-PIT. Tenemos así un ejemplo de un espacio d-PIT que no es PIT, y de un espacio d-PT que no es PT.

3. Espacios σ-polinomialmente tonelados y σ-polinomialmente infratonelados. Análogamente a la observación 0, tenemos:

OBSERVACION 15. (i) todo espacio σ-PT (respectivamente, σ-PIT) es σ-tonelado (respectivamente σ-infratonelado). Ver [8] y [9] para las definiciones de σ-tonelados y σ-infratonelados.

(ii) Todo espacio σ-PT es σ-PIT.

(iii) Todo espacio d-PT (respectivamente d-PIT) es σ-PT (respectivamente σ-PIT).

PROPOSICION 16. *Todo espacio* σ-PT *y* PIT *es* PT.

Demostración. Basta ver que en los espacios σ-PT todo subconjunto τ_s-acotado es τ_0-acotado. Q.E.D.

Sabemos que todo subconjunto débilmente relativamente enumerablemente compacto de un espacio E localmente convexo es acotado (ver por ejemplo [10], pg.310). En el caso en que E es un espacio σ-PT, la recíproca de esta afirmación se verifica en $(P(^mE;F),\tau_s)$, como vemos en la siguiente proposición cuya demostración detallada se encuentra en [4].

PROPOSICION 17. *Sean E un espacio* σ-PT *localmente convexo, F un espacio de Hausdorff semi-Montel localmente convexo y $m \in \mathbb{N}$. Entonces todo subconjunto de $P(^mE;F)$ que es τ_s-acotado es τ_s-relativamente enumerablemente compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{X}$ un subconjunto τ_s-acotado de $P(^mE;F)$. Consideremos $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathcal{X}$. Entonces $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es τ_s-acotado en $P(^mE;F)$. Por otro lado tenemos que $\overline{(P_n)}_{n\in\mathbb{N}}$ (clausura por τ_s) es equicontinua y $\overline{(P_n)}_{n\in\mathbb{N}} \subset P(^mE;F)$.

Siendo F semi-Montel, obtenemos que $\overline{(P_n)}_{n\in\mathbb{N}}$ es τ_s-enumerablemente compacto en $P(^mE;F)$. Luego $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un punto clausura en $(P(^mE;F),\tau_\delta)$. Por tanto $\mathcal{X}$ es τ_δ-relativamente enumerablemente compacto. Q.E.D.

Como consecuencia tenemos las siguientes proposiciones:

PROPOSICION 18. *Si E es un espacio de Hausdorff separable* σ-PT *localmente convexo, entonces E es* PT.

PROPOSICION 19. *Sean E, F espacios localmente convexos, $m \in \mathbb{N}$ y E polinomialmente infratonelado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *E es* PT

b) *E es* σ-PT

c) *Todo subconjunto $\mathcal{X}$ de $P(^mE;F)$ que es τ_δ-compacto es τ_0-acotado.*

d) *Toda sucesión de $P(^mE;F)$ que es τ_δ-convergente a cero es τ_0-acotada.*

Demostración.

a) ⇒ b) Inmediato.

b) ⇒ a) Proposición 16.

a) ⇒ c) Basta ver que todo subconjunto $\mathcal{X} \subset P(^mE;F)$ equicontinuo es τ_0-acotado.

c) ⇒ d) Sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión τ_δ-convergente a cero en $P(^mE;F)$. Como $K = \{P_n; n \geqslant 1\} \cup \{0\}$ es un subconjunto τ_δ-compacto de $P(^mE;F)$, entonces por (c) tenemos que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es τ_0-acotado.

d) ⇒ b) Si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es τ_δ-acotado, entonces por (d) probamos que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es τ_0-acotado y siendo E = PIT, concluimos que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinuo. Q.E.D.

El siguiente corolario es una consecuencia de la proposición anterior, teniendo presente que todo espacio metrizable es PIT (ya que todo metrizable es holomórficamente infratonelado [2] y de aquí PIT).

COROLARIO 20. *Sea E un espacio metrizable localmente* *convexo; las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) E *es* PT

b) E *es* σ-PT

c) $(P(^mE),\tau_\delta)$ *es casi-completo*

d) $(P(^mE),\tau_\delta)$ *es secuencialmente completo*

e) *Todo subconjunto* $\mathfrak{X} \subset (P(^mE),\tau_\delta)$ *compacto es* τ_0*-acotado.*

f) *Toda sucesión de* $(P(^mE),\tau_\delta)$ *que es convergente a cero es* τ_0*-acotada.*

La implicación (d) $\Rightarrow$ (a) es una versión polinomial del caso lineal que dice: si E es un espacio metrizable localmente convexo y E' es $\sigma(E',E)$-secuencialmente completo, entonces E es tonelado.

TEOREMA 21. *Si* E *es un espacio* σ-PT, *entonces todo subconjunto* $\mathfrak{X}$ *de* $P(^mE;F)$ *que es* τ_δ*-acotado es* τ_0*-acotado.*

La demostración es clara (basta proceder por el absurdo).

Por otro lado vemos que en [3], los espacios σ-PT (respectivamente σ-PIT) son denotados por polinomialmente $\mathfrak{X}_0$-tonelados (respectivamente polinomialmente $\mathfrak{X}_0$-infratonelados) siguiento la notación de [9]. Y se prueba el siguiente resultado. El Teorema de Banach-Steinhaus es verdadero para los espacios (DF); en la versión polinomial ésto es:

PROPOSICION 22. *Si* E *es un espacio* (DF) *y* F *un espacio normado y* $m \in \mathbb{N}$, *entonces toda sucesión de polinomios m-homogéneos continuos* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset P(^mE;F)$ *acotada sobre los subconjuntos compactos de* E *es localmente acotada.*

José Bonet (*Una nota sobre la coincidencia de topologías en productos tensoriales,* a aparecer en Rev. Acad. Cienc. Madrid), prueba que el producto tensorial proyectivo de espacios (DF), $\mathfrak{X}_0$-tonelados es también $\mathfrak{X}_0$-tonelado. En [3] por una adaptación de la demostración de la propiedad dada arriba por Bonet, se muestra la siguiente proposición.

PROPOSICION 23. *Si E es un espacio* (DF), *$\aleph_0$-tonelado, entonces toda sucesión $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset P(^mE;F)$ acotada sobre subconjuntos compactos de dimensión finita de E es localmente acotada, para todo espacio F.*

En [3] se definen también los espacios *σ-holomórficamente tonelados* (respectivamente los espacios *σ-holomórficamente infratonelados*) y se hace una clasificación holomorfa comparándola con la clasificación dada en [2]. En este mismo trabajo se prueban las proposiciones 24 y 25 a seguir.

PROPOSICION 24. *Todo espacio de tipo* (DF) *y σ-tonelado es* σ-PT.

PROPOSICION 25. *Todo espacio metrizable y tonelado es* PT.

La proposición 25, se sigue de la propiedad conocida que el producto tensorial proyectivo de dos espacios metrizables y tonelados es también tonelado (ver [9] 15.6,6).

Haremos en la siguiente proposición 26 una demostración más directa de la propiedad de que todo espacio (DF) es σ-PIT (compare con la Proposición 11), cuya demostración se encuentra también en [3] Sección 4.

PROPOSICION 26. *Todo espacio E de tipo* (DF) *localmente convexo es* σ-PIT.

Demostración. Sea E un espacio localmente convexo, $m \in \mathbb{N}$. Sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $P(^mE;F)$, la cual es τ_0-acotada. Probaremos que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n \in L_s(^mE;F)$ tal que $\hat{A}_n = P_n$. Por la fórmula de Polarización $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada sobre los subconjuntos acotados de E^m. Sea LA_n la única aplicación lineal continua del producto tensorial proyectivo topológico $E\otimes_\pi\ldots\otimes_\pi E$ de m-copias de E en F tal que $LA_n(x_1\otimes\ldots\otimes x_m) = A_n(x_1,\ldots,x_m)$ para todo $x_1,\ldots,x_m \in E$ (ver [7] pg.30, Proposición 2).

Sea $Y = \{LA_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset L(E\otimes_\pi\ldots\otimes_\pi E;F)$. Entonces Y es equicontinuo, pues $E\otimes_\pi\ldots\otimes_\pi E$ es un espacio (DF) por lo tanto σ-infratonelado (ver [9], 15.6.2, pg.336) y para cada $B \subset E\oplus_{\Pi}\ldots\oplus_{\Pi}E$ acotado, existen, $B_i \subset E(i=1,\ldots,m)$ acotados tal que $B \subset \overline{\Gamma(B_1\oplus\ldots\oplus B_m)}$ por lo tanto V es acotado sobre los subconjuntos acotados de $E\oplus_{\Pi}\ldots\oplus_{\Pi}E$.

De aquí, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L_s({}^mE;F)$ es equicontinua. Por lo tanto por la fórmula de polización $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua en $P({}^mE;F)$, lo que completa la aserción. Q.E.D.

El siguiente teorema y su prueba nos fueron proporcionados por el profesor José Bonet (Universidad de Valencia, España) y nos permite ver que todo espacio d-PT es equivalente a los espacios σ-PT, y con ésto ver que todas las propiedades dadas para los espacios d-PT son válidas para los espacios σ-PT y recíprocamente. De aquí en adelante solo mencionaremos espacios σ-PT (respectivamente, σ-PIT).

TEOREMA 27. *Sean E y F espacios localmente convexos, $m \in \mathbb{N}$. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

a) *E es σ-polinomialmente tonelado*

b) *E es d-polinomialmente tonelado.*

Demostración. (b) $\Rightarrow$ (a) (Observación 15 (iii)) basta suponer que $\{P_n; n \geq 1\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{P_n\}$ es τ_s-acotada.

(a) $\Rightarrow$ (b) Sean, $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{X}_n$ en $P({}^mE;F)$ el cual es τ_s-acotado y cada $\mathcal{X}_n$ equicontinuo en $P({}^mE;F)$. Es suficiente tomar F normado. Consideremos el espacio

$$\ell^{\infty}(\mathcal{X},F) = \{(\phi_f)_{f\in\mathcal{X}} \; ; \; \sup_{f\in\mathcal{X}} \|\phi_f\| < +\infty\}$$

que es un espacio normado con la norma

$$\|(\phi_f)_{f\in\mathcal{X}}\|_{\ell^{\infty}(\mathcal{X},F)} = \sup_{f\in\mathcal{X}} \|\phi_f\| \; ;$$

definamos $f_n : x \in E \mapsto f_n(x) \in \ell^{\infty}(\mathcal{X},F)$ por

$$f_n(x) = (f_n(x)_P)_{P\in\mathcal{X}} \text{ con } f_n(x)_P = P(x) \text{ si } P \in \mathcal{X}_n \text{ y } f_n(x)_P = 0$$

si $P \in \mathcal{X}\setminus\mathcal{X}_n$, cualquier que sea $x \in E$.

Es claro que $f_n \in P_a({}^mE;\ell^{\infty}(\mathcal{X},F))$. Como $\mathcal{X}_n \subset P({}^mE;F)$ es equicontinuo, entonces f_n es un polinomio m-homogéneo continuo y siendo $\mathcal{X}$ τ_δ-acotado, se tiene que $(f_n)_{n\geq 1}$ es τ_δ-acotada en $P(^mE;\ell^\infty(\mathcal{X},F))$, pues

$$\sup_{x\in M} \| f_n(x)\|_{\ell^\infty(\mathcal{X},F)} = \sup_{x\in M,\, P\in \mathcal{X}} \|P(x)\|$$

(M varía en el conjunto formado por las partes finitas de E) y este último supremo es finito.

Como E es σ-polinomialmente tonelado, entonces $(f_n)_{n\geq 1}$, es equicontinua, de aquí tenemos inmediatamente que $\mathcal{X}$ es equicontinua, lo que prueba que E es d-polinomialmente tonelado. Q.E.D.

OBSERVACION 28. Usando un argumento similar al Teorema 27, se prueba la equivalencia entre los espacios σ-PIT, y los espacios d-PIT.

DEFINICION 29. E es *σ^∞-polinomialmente tonelado* = σ^∞-PT (respectivamente *σ^∞-polinomialmente infratonelado* = σ^∞-PIT) si para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada sucesión $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset P(^mE)$ que es τ_δ-acotada (respectivamente τ_o-acotada) es equicontinua (definición análoga a la clase σ-PT y a la clase σ-PIT en el caso en que $F = \mathbb{C}$).

La clase que es diferente a la clase dada en el Teorema 27 es la clase σ^∞-PIT (respectivamente σ^∞-PIT) dada en la definición 29, pues en [3] se da un ejemplo de un espacio σ^∞-holomórficamente tonelado, por lo tanto σ^∞-PIT, que no es σ-infratonelado y consecuentemente no σ-PIT.

Recientemente el profesor Bonet, propuso a D. García extender los resultados de Maestre dados en [11] para clases polinomiales, y García ha obtenido varios resultados al respecto, (ver Domingo García: *Countable Sets of Holomorphic Mappings*; to appear in Portugaliae Math.).

Agradecemos al profesor Bonet por proporcionarnos los artículos [3], [6] y [11], y por sus sugerencias con relación a la sección 3 de este trabajo.

BIBLIOGRAFIA

[1] Aragona, J., *On the Holomorphical Classification of Spaces of Holomorphic Germs*. Nagoya Math. A. Vol. 84 (1981), pg.85-118.

[2] Barroso, J.A., Matos, M.C. and Nachbin, L., *On Holomorphy Versus Linearity in Classifying Locally Convex Spaces*. Infinite Dimensional Holomorphy and Applications, Ed. M.C.Matos North-Holland Math.-Studies 12 (1977), pg.31-74.

[3] Bonet, J., Galindo, P., Garcia, D. and Maestre, M., *Locally Bounded sets of Holomorphic Mappings*. To appear.

[4] Caldas, M., *New Classes of Polynomials of Locally Convex Spaces*. Tesis de Doctorado. IMUFRJ-Brasil (1985).

[5] Caldas, M., *On Polynomials Semibornological locally convex Spaces*. Congr.Nac.de Mat.Apl.e Comp. IX, Brasil (1986) pg.151-157 (Sessão Especial 60º Aniversario Prof. L. Adauto Medeiros). To appear in Portugaliae Math.

[6] Galindo, P., García, D. and Maestre, M., *Holomorphically ultrabornological spaces and Holomorphic Inductive Limits*. To appear in J. Math. Anal. and Appl.

[7] Grothendieck, A., *Produits Tensoriels topologiques et spaces nucléaires*, Memoirs of the American Mathematical Society 16 (1955).

[8] Husain, T., *Two New Classes of Locally Convex Spaces*. Math. Annalen 166 (1966), pg.289-299.

[9] Jarchow, H., *Locally Convex Spaces*. B.G. Teubner Stuttgart, (1981).

[10] Köthe, G., *Topological Vector Spaces V.* I-II Springer Verlag (1969)-(1979).

[11] Maestre, M., *Products of Holomorphically Relevant Spaces*. To appear in Portugaliae Math.

[12] Pombo Júnior, D.P., *On Polynomial Classication of Locally Convex Spaces*. Studia Math. T. LXXVIII (1984), pg.39-57.

[13] Restrepo, G., *Continuidad de Polinomios En Espacios Vectoriales Topológicos*. Revista Colombiana de Matemáticas Vol. XIII (1979), pg.271-310.

*

Departamento de Matemática Aplicada-IMUFF
Universidade Federal Fluminense
Rua Sao Paulo, S/Nº, CEP 24210
Niterói-RJ, BRASIL.

(Recibido en Mayo de 1987, la versión revisada en julio de 1987).