PROBLEMAS PROPUESTOS

Los problemas son señalados por cero, uno o dos asteriscos según su grado de dificultad. Las soluciones de los problemas deben ser enviadas a REVISTA DE MATEMÁTICAS ELEMENTALES, Universidad de los Andes, calle 18-A, carrera 1-E, Bogotá, Colombia, antes del 31 de julio de 1954. La solución a cada problema debe venir en hoja por separado. Los alumnos de bachillerato deben enviar, junto con las soluciones, el nombre del colegio y de su profesor de matemáticas.

67. Demostrar que si n es un número entero positivo $(2n + 1)^5 - 2n - 1$ es siempre divisible por 240.

68.

$$\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2}$$

es siempre un cuadrado perfecto (cf. Vol. II, p. 26).

69.

$$\binom{n}{2} + [1 + 2n(n-1)]\binom{n+1}{2}$$

es siempre un bicuadrado perfecto (bicuadrado = cuarta potencia).

70. Demostrar que el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 + a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 + a_2 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 + a_n \end{vmatrix}$$

es igual a $a_1 \, a_2 \, a_3 \dots a_n$.

71. Resolver la ecuación

$$\alpha(x^2 - px + q)^2 + \beta(x^2 + px + q)^2 = x^2.$$

72. Una longitud dada se divide en m partes iguales por $m - 1$ puntos negros y en n partes iguales por $n - 1$ puntos rojos. ¿Cuál es la distancia mínima entre un punto negro y un punto rojo?

73. Se dan en el espacio tres semirrectas Ox, Oy, Oz que salen del mismo punto O. Se supone que el ángulo xOy es igual a $90°$ y que los ángulos xOz e yOz son iguales a $60°$.

(a) Demostrar que Oz está situado en el plano que es perpendicular al plano xOy y que pasa por la bisectriz interior del ángulo xOy.

(b) Se toman sobre Ox y Oy respectivamente dos puntos A y B, tales que $OA = OB = a$. Siendo M un punto de Oz, ¿cuál debe ser la longitud de OM, para que el ángulo AMB sea recto?

En el caso de que el ángulo AMB sea recto, ¿cuáles son el centro y el radio de la esfera circunscrita al tetraedro $OAMB$?

(c) ¿Cuál es la medida del ángulo que forma Oz con el plano xOy? Calcular el volumen del tetraedro $OAMB$.

(d) ¿Cuál es el lugar de los puntos P del espacio tales que

$$PA^2 + OB^2 = PB^2 + OA^2 = PO^2 + AB^2\ ?$$

(Bachillerato, 1ª parte, Clermont-Ferrand, Francia, 1951).