

Revista
de
Matemáticas Elementales

VOLUMEN III.

FASCICULO 2

Tarifa Postal Reducida. — Licencia Nº 1993 del Ministerio de Correos y Telégrafos.

EL CONTRASTE DE FASE Y
LA TRANSFORMACION DE FOURIER

POR M. FRANÇON,

Profesor en el Instituto de Optica, de la Universidad de París.

Director de Investigaciones en el CNRS (*).

Introducción.

Se encuentran a menudo en óptica objetos transparentes que sólo difieren del medio que los rodea por pequeñas variaciones del índice de refracción, o que presentan ligeros cambios de espesor. Es el caso, por ejemplo, de las bacterias cuyo índice difiere muy poco del líquido en el cual están sumergidas. No se pueden observar con éxito tales objetos en las condiciones habituales por el hecho de que son invisibles no por falta de poder separador, sino sólo por falta de contraste. El método del contraste de fase tiene por fin

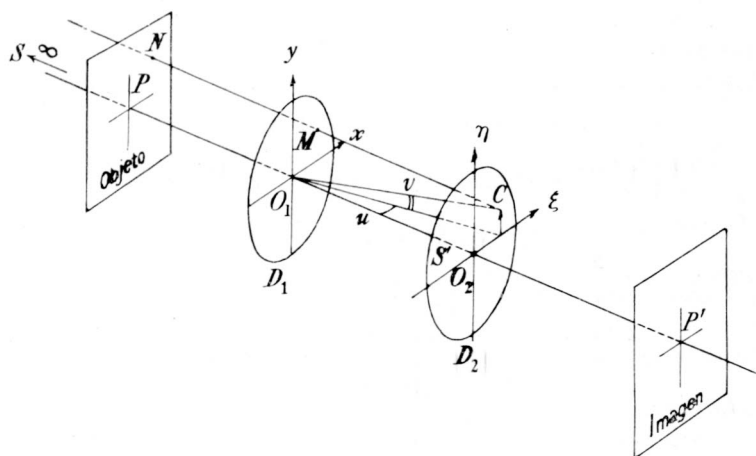
(*) Nota de la Redacción: El físico holandés F. ZERNIKE descubrió en 1934 un procedimiento de observación de los objetos transparentes, llamado "contraste de fase", que constituye un importante progreso en la microscopia. Sobre ese tema dictó una conferencia en la Universidad Nacional el señor M. FRANÇON, físico francés eminente, autor de numerosos inventos y publicaciones en el campo de la Optica ondulatoria, quien tuvo la gentileza de mandarnos el texto de su exposición. Lo publicamos aquí, aunque sea de un nivel superior al de esta revista, porque son todavía escasos los textos que dan las bases teóricas del contraste de fase, de uso ya muy extendido. La traducción es de los profesores LUIS IGNACIO SORIANO y H. YERLY.

CNRS es abreviación de "Centre National de la Recherche Scientifique", la institución oficial que organiza la investigación científica en Francia.

permitir la observación de esos objetos en condiciones análogas a las de los objetos ordinarios.

Principiaremos dando algunas indicaciones sobre el cálculo general de las imágenes de objetos transparentes, empleando la transformación de FOURIER. Este método de calcular permitirá luego explicar de manera simple y precisa el contraste de fase.

§ 1. *Cálculo de la amplitud luminosa en la imagen de un objeto que sólo introduce variaciones de fase.*



Sea P (fig. 1) un objeto transparente que no presenta más que variaciones locales de índice y espesor. Está iluminado con luz monocromática por una fuente puntual S . Se supone, además, que esa fuente está en el infinito sobre el eje del sistema. El objeto P , colocado en un plano normal al eje, se encuentra cerca de un objetivo O_1 , que da en su plano focal una imagen S' de la fuente luminosa S . Un segundo objetivo O_2 , en el plano de S' , da en P' una imagen del objeto P . La onda difractada después de atravesar el objeto P da en el plano conjugado de la fuente S un fenómeno de difracción característico de la distribución de las fases introducidas por los accidentes del objeto P , es decir por las pequeñas variaciones de índice o de espesor. Para calcular la intensidad luminosa en un punto cualquiera del plano imagen, basta efectuar la composición (interferencias) de las vibraciones emitidas por los diferentes puntos del plano focal. Se supone para eso el sistema óptico rigurosamente perfecto y se escoge un sistema de ejes de coordenadas que tenga como origen el centro óptico del objetivo O_1 . El eje

de las z es el eje del sistema, estando los ejes Ox y Oy en un plano perpendicular a Oz y convenientemente orientados para completar el triedro de referencia.

En el punto $N(x, y)$ del objeto, la amplitud luminosa y la fase pueden ser representadas por una función compleja $f(x, y)$ que se puede escribir, según la teoría clásica de la difracción, bajo la forma:

$$f(x, y) = A(x, y) e^{i\varphi(x, y)}$$

El módulo A de la función compleja $f(x, y)$ representa la amplitud y ϕ la fase en el punto $N(*)$. Siendo el objeto perfectamente transparente, se admitirá que la función $A(x, y)$ es constante en todos los puntos del objeto. El objeto P está caracterizado solamente por las variaciones de la fase $\phi(x, y)$ debidas, sea a variaciones de espesor, sea a variaciones del índice.

Sea δ la diferencia de camino, en un punto cualquiera C del plano focal, entre las vibraciones difractadas por M y por O_1 . Siendo ξ, η, ζ las coordenadas de C , pongamos:

$$u = \frac{\xi}{\zeta}, \quad v = \frac{\eta}{\zeta}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

donde λ es la longitud de onda de la luz utilizada. Se sabe por la teoría clásica de la difracción que

$$\delta = -(ux + vy),$$

y que se puede escribir la amplitud $g(u, v)$ bajo la forma:

$$(1) \quad g(u, v) = \int_{D_1} \int f(x, y) e^{ik\delta} dx dy \quad (i = \sqrt{-1}),$$

extendiéndose la integral a toda la superficie del objetivo O_1 limitada por el contorno D_1 . Se puede anotar que la expresión precedente es la de la transformación de FOURIER. Se puede escribir:

$$(2) \quad g(u, v) = A \int_{D_1} (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) e^{ik\delta} dx dy.$$

(*) NOTA. Por dificultades tipográficas, quedó la fase notada a veces con la letra ϕ y otras con la otra forma de la "phi" minúscula; tenga el lector presente la equivalencia absoluta entre las dos formas de la letra en este artículo.

Como origen de las fases, escogamos la fase media definida por la condición:

$$(3) \quad \int_{D_1} \int \text{sen } \varphi \, dx \, dy = 0,$$

y sea M el valor medio de $\cos \phi$ en el interior de la región D_1 . La expresión (2) puede escribirse:

$$(4) \quad g(u, v) = M \int_{D_1} \int e^{i k \delta} \, dx \, dy + \int_{D_1} \int [(\cos \varphi - M) + i \text{sen } \varphi] e^{i k \delta} \, dx \, dy.$$

El primer término representa la figura de difracción de la onda perfecta (la que se tendría si no hubiera objeto) limitada por el contorno D_1 . La presencia del segundo término se debe a la luz difractada por las variaciones de fase causadas por los accidentes del objeto. En el punto O_2 , $\delta = 0$ y se tiene:

$$\int_{D_1} \int (\cos \varphi - M) \, dx \, dy = 0;$$

el último término de (4) es, pues, nulo en ese punto. Se puede decir que la luz difractada, nula en O_2 , se esparce alrededor de la mancha central del fenómeno de difracción debido a la onda perfecta.

Para pasar de la figura de difracción $g(u, v)$ a la imagen final P' , basta aplicar la transformación de FOURIER. Teniendo el objetivo O_2 una abertura limitada, sólo una parte de $g(u, v)$, sea $g'(u, v)$ se emplea para formar la imagen P' . La transformación de FOURIER va, por lo tanto, a dar la distribución de las amplitudes y de las fases en la imagen, es decir la imagen misma, por una función compleja $f'(x, y)$ y se tienen las dos relaciones:

$$(5) \quad g(u, v) = \int_{D_1} \int f(x, y) e^{i k \delta} \, dx \, dy$$

$$(6) \quad f'(x, y) = \int_{D_2} \int g'(u, v) e^{-i k \delta} \, du \, dv.$$

La segunda relación da la imagen P' . Se han considerado las dimensiones de la imagen iguales a las del objeto y se han tomado las mismas coordenadas, lo que no restringe en nada la generalidad de la exposición y de los resultados.

Caso en que las variaciones de fase son pequeñas: En ese caso el término $\cos \phi - M$ es del segundo orden con respecto a ϕ y puede ser despreciado. La expresión (4) puede escribirse:

$$g(u, v) = \int_{D_1} e^{ikx} dx dy + i \int_{D_1} \varphi e^{ikx} dx dy.$$

Si el objetivo O_2 recibe la mayor parte de la luz difractada, se puede decir que todo ocurre como si los límites de integración fuesen infinitos. Es lo que pasa prácticamente en óptica, de suerte que se puede escribir:

$$f'(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(u, v) e^{-ikx} du dv,$$

de donde (*):

$$f'(x, y) = \underbrace{M}_{\substack{\text{término debido} \\ \text{a la onda entera} \\ \text{perfecta}}} + \underbrace{[(\cos \phi - M) + i \operatorname{sen} \phi]}_{\substack{\text{término debido a la onda} \\ \text{difractada por el objeto}},$$

y si ϕ es pequeño:

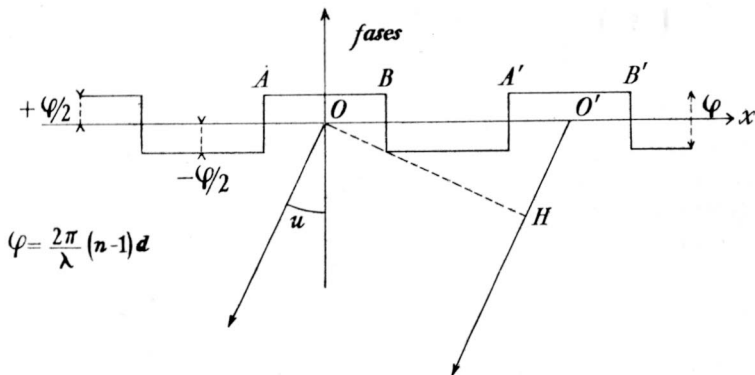
$$(7) \quad f'(x, y) = 1 + i\phi.$$

Ya que se desprecia ϕ^2 , la suma de los cuadrados de las partes reales e imaginarias es constante. La intensidad luminosa es la misma en todo punto de la imagen. Evidentemente, el objeto no es visible.

Consideremos un objeto formado por una lámina de caras paralelas sobre la cual se depositó una serie de fajas transparentes rectangulares, paralelas unas a otras, y separadas por intervalos de aire de igual dimensión. Esas fajas, cuyo número se supone muy grande, tienen un espesor d y un índice n y su longitud es muy grande en relación con su anchura. El eje O_1y (fig. 1) es paralelo a las fajas y la función $\phi(x, y)$ independiente de y . Tal objeto, llamado red de fase, da a la función $\phi(x)$ el aspecto indicado en la figura 2. Esa red está colocada en el plano objeto (fig. 1) y vamos a suponer que el objetivo D_1 esté limitado por una abertura rectangular de ancho D_1 .

(*) Por la fórmula de reciprocidad de FOURIER (nota del traductor).

Sea a el ancho de una faja; si la dirección u corresponde a un máximo de orden m , se tiene (fig. 2):



$$O'H = m\lambda = 2a \cdot u,$$

de donde

$$k\delta = \frac{m\pi x}{a} ;$$

m toma los valores $0, 1, 3, 5, \dots$, porque a los valores pares corresponden los mínimos nulos de la figura de difracción de una faja de la red. Estando en fase las vibraciones enviadas en esas direcciones por todas las fajas, basta calcular el movimiento vibratorio mandado por dos fajas características, por ejemplo AB y BA' .

Tomenos como origen de las fases la fase definida por la condición (3). Sobre la faja AB , la fase será:

$$+ \frac{\phi}{2} = \frac{\pi(n-1)d}{\lambda}$$

y sobre BA' :

$$- \frac{\phi}{2} = - \frac{\pi(n-1)d}{\lambda}$$

La expresión (2) toma la forma:

$$g(u) = \underbrace{\left(\cos \frac{\phi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \right) \int_{-\frac{a}{4}}^{+\frac{a}{4}} e^{i \frac{m\pi x}{a}} dx}_{\text{acción de la faja } AB} + \underbrace{\left(\cos \frac{\phi}{2} - i \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \right) \int_{-\frac{a}{4}}^{+\frac{a}{4}} e^{i \left(\frac{m\pi x}{a} + m\pi \right)} dx}_{\text{acción de la faja } BA'}$$

porque cuando se pasa de un punto de AB al punto correspondiente de BA' la fase aumenta $m\pi$ para el espectro de orden m .

Se tiene entonces:

$$g(u) = (1 + e^{im\pi}) \cos \frac{\varphi}{2} \int_{-\frac{a}{4}}^{+\frac{a}{4}} e^{i \frac{m\pi x}{a}} dx + i(1 - e^{im\pi}) \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \int_{-\frac{a}{4}}^{+\frac{a}{4}} e^{i \frac{m\pi x}{a}} dx.$$

Pongamos en forma explícita el término correspondiente a $m = 0$, es decir, la imagen directa. Se tiene

$$g(0) = 2a \cos \frac{\phi}{2},$$

de donde:

$$(8) \quad g(u) = 2a \cos \frac{\phi}{2} + i \frac{4a}{m\pi} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2},$$

asumiendo ahora m los valores 1, 3, 5, ... La figura de difracción se compone, pues, de la imagen directa, enmarcada de cada lado por los espectros de los diferentes órdenes.

Apliquemos la transformación de FOURIER; la imagen de la red es dada entonces por:

$$f'(x) = 2a \cos \frac{\phi}{2} + i \frac{4a}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \left[(e^{i \frac{\pi x}{a}} + e^{-i \frac{\pi x}{a}}) - \frac{1}{3} (e^{i \frac{3\pi x}{a}} + e^{-i \frac{3\pi x}{a}}) + \dots \right]$$

o también:

$$(9) \quad f'(x) = \\ = 2a \cos \frac{\varphi}{2} + i \frac{8a}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \left[\cos \frac{\pi x}{a} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{a} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi x}{a} - \dots \right]$$

y si ϕ es pequeño,

$$(10) \quad f'(x) = 2a + i \frac{4a}{\pi} \varphi \left(\cos \frac{\pi x}{a} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{a} + \dots \right).$$

§ 2. Principio del contraste de fase.

Consideremos la expresión (7) y supongamos que se pueda cambiar la fase de la onda directa, representada por el término igual a la unidad, con respecto a la fase de la onda difractada representada por $i\phi$. Escojamos ese cambio igual a $\pi/2$ y atrasemos, por ejemplo, la onda difractada en $\pi/2$ con relación a la onda directa; multiplicando el último término de (7) por $-i$, tendremos:

$$f'(x,y) \approx 1 + \varphi,$$

y la intensidad luminosa:

$$I = f'^2(x, y) = 1 + 2\phi;$$

dentro de la imagen del objeto, la intensidad es $I_1 = 1 + 2\phi$ y fuera de ella, es igual ($\phi = 0$) a $I_2 = 1$: luego el objeto se vuelve visible. Se puede caracterizar su visibilidad por el "contraste" definido de la manera siguiente:

$$(11) \quad \gamma = \frac{I_1 - I_2}{I_1} \approx 2\phi.$$

Si $I_2 = 0$, el contraste es máximo e igual a 1. Si $I_1 = I_2$, el contraste se anula y la imagen desaparece. El contraste puede por lo tanto tomar todos los valores entre 0 y 1.

En el caso precedente se dice que el contraste es positivo. Si se atrasa la onda directa, se tiene entonces el contraste de fase negativo.

Para realizar esa diferencia de fase de $\pi/2$ que permite hacer aparecer la imagen del objeto transparente, basta colocar en O_2 (fig. 1) una pequeñísima lámina transparente de espesor tal que las vibraciones que la atraviesan sean adelantadas o retardadas en $\pi/2$. Esa lámina debe ser lo bastante pequeña para que no actúe sino sobre la imagen S' de la fuente S (luz u onda directa), sin operar sobre la luz difractada que se esparce alrededor de S' según se vió anteriormente. Esa laminilla se llama "lámina de fase". La expresión (11) muestra que si ϕ es pequeño, lo es también γ . Se puede lograr una sensibilidad enorme procediendo de la manera siguiente: tomemos una lámina de fase absorbente. Supongamos que por la absorción la intensidad de la luz directa (imagen de S , es decir S') quede dividida por N . Las amplitudes quedarán divididas por N y como la lámina de fase prácticamente no actúa sobre la luz difractada, se puede escribir:

$$e \quad I_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} + \varphi \right)^2 = \frac{1}{N} (1 + 2\varphi\sqrt{N}),$$

$$I_2 = \frac{1}{N},$$

de donde el contraste $\gamma = 2\phi\sqrt{N}$.

El contraste está ahora multiplicado por \sqrt{N} . Con $N = 2500$, fácil de realizar, se podrán observar variaciones de espesor óptico (producto del espesor por el índice) de 1 Angström con un contraste de 0,1 bien visible.

Consideremos el caso de la red de fase estudiada arriba. Al colocar la lámina de fase, la imagen se escribe:

$$(12) \quad f'(x) = 2a \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{8a}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\pi x}{a} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{a} + \dots \right),$$

y si ϕ es pequeño:

$$(13) \quad f'(x) = 2a + \frac{4a}{\pi} \varphi \left(\cos \frac{\pi x}{a} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{a} + \dots \right).$$

Si el objetivo no admite más que la imagen directa $2a$, no se ve ninguna imagen de la red, por ser $f'(x)$ constante, así como la intensidad. Si ahora tomamos la imagen directa más un espectro, tendremos una sinusoide. Tomando más y más espectros, se ve la imagen reproducir cada vez más fielmente al objeto. Se puede observar que las discontinuidades del objeto están dadas por los términos de frecuencias más altas en las expresiones (12) y (13). Los objetivos no tienen nunca apertura infinita; esa es la razón por la cual aquellos términos faltan en la imagen y los contornos de los objetos aparecen esfumados por la difracción.

Como la serie de la expresión (12) o (13) oscila entre $-\pi/4$ y $+\pi/4$, se tiene:

$$I_1 = 4a^2(1 + \operatorname{sen} \phi) \quad (\text{para las fajas})$$

$$I_2 = 4a^2(1 - \operatorname{sen} \phi) \quad (\text{para los intervalos de aire})$$

de donde el contraste:

$$\gamma = \frac{2 \operatorname{sen} \phi}{1 + \operatorname{sen} \phi}$$

que vale 1 si $\phi = \pi/2$. Si ϕ es pequeño, se vuelve a encontrar

$$\gamma = 2\phi$$

para una lámina transparente.

Conclusión.

El método de contraste de fase se emplea sobre todo en microscopía, donde presta los mayores servicios, ya que permite a los biólogos estudiar los objetos vivos sin coloración. Se usa en muchas otras ramas de la ciencia, sobre todo en Física, y más particularmente en Óptica. Ha sido posible medir el espesor de capas monomoleculares de ácidos grasos del orden de 24 Angströms. Se han podido estudiar con precisión los defectos de pulimento más débiles, de sólo algunos Angströms, en algunos objetivos astronómicos especiales.

El método del contraste de fase prueba, si ello fuera menester, que la óptica clásica, la óptica de Fresnel, no es una ciencia muerta y que aún puede prestar grandes servicios.