SOBRE ALGUNOS TEOREMAS EN EL TRIANGULO Y EL CIRCULO DE NUEVE PUNTOS

Por Luis de Greiff Bravo

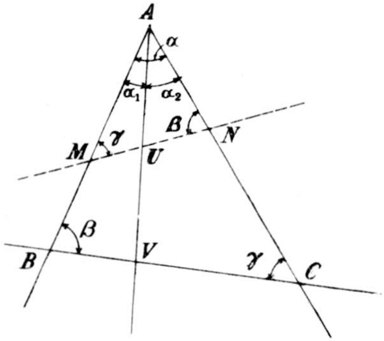

Figura 1

Introducción. — Sea el triángulo *ABC* (figura 1), cuyos ángulos designaremos respectivamente con α, β, γ. Toda recta que, como *MN,* forme con los lados *AB, AC,* ángulos de valor γ, β, respectivamente, se dice estar en posición *antiparalela* con respecto a *BC.* Resulta evidente, por igualdad de ángulos, que los triángulos *AMN* y *ABC,* son semejantes. Ahora trazamos por el vértice *A* una recta *AUV,* de dirección arbitraria, con el fin de establecer el siguiente

Teorema. — *Para los segmentos* UM, UN, VB, VC, *es válida la siguiente relación,*

$$\frac{UM}{UN} \div \frac{VB}{VC} = \frac{sen^2\,\beta}{sen^2\,\gamma} \tag{1}$$

Demostración. — Refiriéndose a los triángulos *AMU, AUN* de la figura 1, se puede escribir,

$$\frac{UM}{UA} = \frac{sen\,\alpha_1}{sen\,\gamma}\ ,\quad \frac{UN}{UA} = \frac{sen\,\alpha_2}{sen\,\beta}$$

y, por división de las dos proporciones anteriores,

$$\frac{UM}{UN} = \frac{sen\,\alpha_1}{sen\,\alpha_2}\cdot\frac{sen\,\beta}{sen\,\gamma} \tag{2}$$

Esta última relación permite escribir, para el triángulo *ABC,*

$$(2') \qquad \frac{VB}{VC} = \frac{sen\,\alpha_1}{sen\,\alpha_2}\,\frac{sen\,\gamma}{sen\,\beta}$$

Dividiendo (2) por (2′) queda, finalmente

$$(3) \qquad \frac{UM}{UN} \div \frac{VB}{VC} = \frac{sen^2\,\beta}{sen^2\,\gamma}\ .$$

Exponemos ahora el importante

TEOREMA DE CEVA. — *En todo triángulo, las rectas que unen los vértices con un mismo punto* O, *determinan, sobre los lados opuestos, tres putos* U, V, W, (figura 2). *Los segmentos así producidos en los lados, cumplen la relación siguiente (en la que puede exceptuarse, para la finalidad que buscamos, toda consideración relativa a signos)*:

$$(4) \qquad \frac{VA}{VC}\ .\ \frac{UC}{UB}\ .\ \frac{WB}{WA} = 1$$

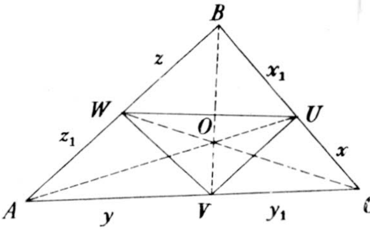

Figura 2

(Llámase *cevianas* a rectas tales como *AU, BV, CW,* en honor de JUAN DE CEVA, geómetra milanés que las introdujo en la Geometría, en la segunda mitad del siglo XVII).

Demostración. — Indícanse los segmentos determinados sobre los lados por x, x_1, y, y_1, z, z_1, para mayor claridad. Los triángulos *AOB*, *AOC*, tienen la misma base *AO*, luego sus áreas están entre sí como sus alturas o como los segmentos x, x_1, que son proporcionales a aquéllas. Por consiguiente, se puede escribir, utilizando el paréntesis para indicar áreas,

$$(5) \qquad \frac{(AOC)}{(AOB)} = \frac{x}{x_1}\,,\quad \frac{(AOB)}{(BOC)} = \frac{y}{y_1}\,,\quad \frac{(BOC)}{(AOC)} = \frac{z}{z_1}\ .$$

Multiplicando ordenadamente las (5) y suprimiendo factores comunes, se obtiene,

$$\frac{x\,.\,y\,.\,z}{x_1\,.\,y_1\,.\,z_1} = 1 \text{ o, también, } x\,.\,y\,.\,z = x_1\,.\,y_1\,.\,z_1$$

que expresan de nuevo la relación (4) con diferencia en la designación de los segmentos.

Teorema recíproco. — *Si sobre los lados de un triángulo, o sobre sus prolongaciones, se tienen puntos* U, V, W, *para los cuales se cumple la relación* (4) *o sea que el producto de tres segmentos no consecutivos* VA, UC, WB, *es igual al producto de los otros tres,* VC, UB, WA, *las rectas* AU, BV, CW, *pasan por un mismo punto.*

Para establecer este teorema se puede proceder *ad absurdum.* Trácense las rectas *AU, BV,* con lo que se determina así un punto *O*. Si la *CW* no pasa por *O,* podemos trazar la *CO* determinando así el punto *W'*. Entonces se cumple, según el supuesto, la relación,

$$\frac{VA}{VC} \cdot \frac{UC}{UB} \cdot \frac{WB}{WA} = 1$$

y, en virtud del teorema directo,

$$\frac{VA}{VC} \cdot \frac{UC}{UB} \cdot \frac{W'B}{W'A} = 1 \ .$$

Por división de estas dos últimas relaciones, se obtiene,

$$\frac{W'B}{W'A} = \frac{WB}{WA}$$

la cual solamente puede cumplirse cuando *W'* coincide con *W*.

Teorema de Carnot. — *Si los lados de un triángulo son cortados por un círculo en los puntos* a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, *se verifica la relación siguiente*

$$(6) \qquad \frac{a_1B}{a_1C} \cdot \frac{a_2B}{a_2C} \cdot \frac{b_1C}{b_1A} \cdot \frac{b_2C}{b_2A} \cdot \frac{c_1A}{c_1B} \cdot \frac{c_2A}{c_2B} = 1$$

(figura 3).

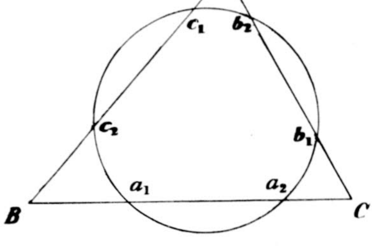

Figura 3

Para establecer este teorema, que Carnot demostró para polígonos cualesquiera, escribimos las conocidas igualdades entre productos de segmentos,

$Ba_1 \,.\, Ba_2 = Bc_2 \,.\, Bc_1;\; Cb_1 \,.\, Cb_2 = Ca_2 \,.\, Ca_1;\; Ac_1 \,.\, Ac_2 = Ab_2 \,.\, Ab_1.$

Multiplicando ordenadamente las igualdades escritas y disponiendo los factores del segundo miembro como divisores, se obtiene la relación (6) que se quería demostrar.

Teorema. — *Si en un triángulo,* ABC, *las rectas* Aa_1, Bb_1, Cc_1, *son cevianas o sea, pasan por un mismo punto* o_1, *el círculo circunscrito al triángulo* $a_1b_1c_1$ *determina sobre los lados del primero otros puntos* a_2, b_2, c_2, *de tal manera dispuestos, que las rectas* Aa_2, Bb_2, Cc_2, *pasan también por un mismo punto* o_2. (Dicho con otras palabras, constituyen otra terna de cevianas), (figura 4).

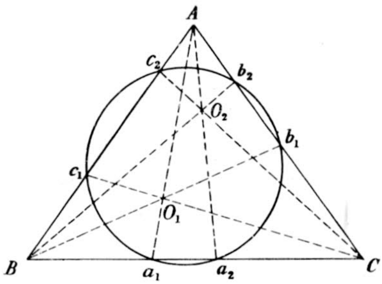

Figura 4

Para demostrar este teorema nos apoyaremos en la relación (6) escrita como sigue,

$$\frac{a_1B}{a_1C} \cdot \frac{b_1C}{b_1A} \cdot \frac{c_1A}{c_1B} \cdot \frac{a_2B}{a_2C} \cdot \frac{b_2C}{b_2A} \cdot \frac{c_2A}{c_2B} = 1$$

Según el teorema de Ceva, los tres primeros factores valen la unidad, luego queda solamente,

$$\frac{a_2B}{a_2C} \cdot \frac{b_2C}{b_2A} \cdot \frac{c_2A}{c_2B} = 1$$

la cual demuestra que también Aa_2, Bb_2, Cc_2, han de pasar por un mismo punto o_2.

El Círculo de Nueve Puntos. Basados en los teoremas anteriores, vamos a demostrar nuevamente el siguiente teorema debido a Leonardo Euler, que sirvió de punto de partida a interesantes estudios llevados a cabo por Feuerbach [1], sobre la geometría del triángulo.

---

[1] Feuerbach, Karl Wilhelm. — Alemán, hermano del filósofo Ludwig Feuerbach, nació en 1800 en Jena y murió en 1834, siendo profesor de matemáticas en el Gimnasio de Erlangen.

Teorema. — *En todo triángulo, los pies de las alturas, los puntos medios de los lados y los puntos medios de los segmentos de altura comprendidos entre cada vértice y el ortocentro, están situados sobre una misma circunferencia.*

Demostración. — En el triángulo ABC de la figura 5, desígnanse los puntos medios de los lados opuestos con a_1, b_1, c_1. Se construye luégo el círculo circunscrito al triángulo $a_1b_1c_1$. Vamos a demostrar que si son a_2, b_2, c_2, los segundos puntos de intersección del círculo anteriormente trazado, con los lados del triángulo ABC, las rectas Aa_2, Bb_2, Cc_2, son alturas del triángulo fundamental, o, expresado con otras palabras, el triángulo $a_2b_2c_2$, es el triángulo *órtico,* correspondiente a ABC.

En primer lugar, las rectas Aa_2, Bb_2, Cc_2, han de cortarse en un mismo punto, según un teorema anteriormente demostrado.

Se indican con x, y, z, los puntos de intersección de los lados del triángulo $a_2b_2c_2$, con las alturas del triángulo ABC; es decir, x es la intersección de b_2c_2 con Aa_2, etc. Empleando la letra T para designar los triángulos, podemos escribir las siguientes relaciones de semejanza,

$$T\text{-}\ Bc_2a_2 \sim T\text{-}\ Bc_1a_1 \sim T\text{-}\ ABC,$$

$$T\text{-}\ Ab_2c_2 \sim T\text{-}\ Ab_1c_1 \sim T\text{-}\ ABC,$$

$$T\text{-}\ Ca_2b_2 \sim T\text{-}\ Ca_1b_1 \sim T\text{-}\ ABC,$$

o sea que los triángulos $A\ b_2c_2$, $B\ c_2a_2$, $C\ a_2b_2$, son semejantes entre sí por serlo al triángulo fundamental ABC. (Es interesante observar que el símbolo de semejanza $\sim$ posee las propiedades *reflexiva, simétrica* y *transitiva*). Se concluye entonces que b_2c_2 es antiparalela con BC; a_2b_2 lo es con respecto a BA y por último, AC, a_2c_2 se disponen también como antiparalelas.

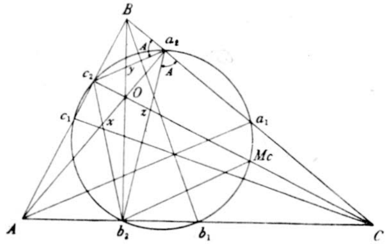

Figura 5

Luego para cada uno de los vértices podemos escribir una relación como la siguiente que corresponde al vértice A,

$$(7) \qquad \frac{x\, b_2}{x\, c_2} \div \frac{a_2C}{a_2B} = \frac{sen^2\, C}{sen^2\, B} \quad ;$$

Por otra parte, según la ley de senos, se tiene,

$$\frac{a_2C}{a_2b_2} = \frac{sen\, B}{sen\, C} \;, \quad \frac{a_2B}{a_2c_2} = \frac{sen\, C}{sen\, B} \;,$$

y por división de estas últimas relaciones,

$$(8) \qquad \frac{a_2C}{a_2b_2} \div \frac{a_2B}{a_2c_2} = \frac{sen^2\, B}{sen^2\, C} \quad .$$

Multiplicando ordenadamente las (7) y (8) se obtiene,

$$(9) \qquad \frac{x\, b_2}{x\, c_2} = \frac{a_2b_2}{a_2c_2} \quad .$$

La relación (9) demuestra que Aa_2 es bisectriz del ángulo $c_2a_2b_2$. Lo análogo puede considerarse establecido para Cc_2, Bb_2.

Nos falta demostrar ahora la perpendicularidad de Aa_2 y BC; respectivamente, de Bb_2, AC; Cc_2, AB. En efecto, los ángulos b_2a_2C, c_2a_2B son iguales al ángulo A y si el ángulo $A\,a_2b_2$ es llamado ϵ, así como su igual $A\,a_2c_2$, podemos escribir $2A + 2\epsilon = 180°$, de donde, $A + \epsilon = 90°$ o sea que Aa_2 y BC son perpendiculares entre sí.

Tengamos ahora en consideración el punto medio de CO, el cual designamos con M_c . Unase este punto con b_2; vamos a demostrar cómo M_c , respectivamente M_a , M_b , están situados sobre la circunferencia que estudiamos.

En efecto, en el triángulo rectángulo Ob_2C, se tiene, $M_c\, b_2 = M_c\, O = M_c\, C$; luego, *ang.* $b_2M_c\, c_2 = 2$ *ang.* ACc_2. En el triángulo rectángulo c_2AC, por ser b_1 punto medio de AC, se tiene, $c_2b_1 = b_1C = b_1A$; luego, *ang.* $Ab_1C_2 = 2$ *ang.* ACc_2. En resumen: los ángulos $b_2b_1c_2$, $b_2M_c\, c_2$ resultan iguales y la circunferencia que pasa por c_2, b_2, b_1 ha de pasar también por M_c .