Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXII (1988), págs. 161-172

EXISTENCIA DE MULTIPLES SOLUCIONES DE UN PROBLEMA ELIPTICO CON PARTE LINEAL EN RESONANCIA CON EL PRIMER VALOR PROPIO

por

Mario ZULUAGA URIBE

§1. Introducción. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ y sea Δ el operador diferencial $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. En este artículo estudiaremos el problema de existencia de soluciones generalizadas de

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{aligned} \Delta u + g(\zeta, u) &= 0 \quad \text{en } \Omega, \\ u(\zeta) &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

donde $g(\zeta,u)$ está sometida a restricciones que posteriormente precisaremos. Las soluciones las hallaremos en el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, el cual es el completado del espacio $C_0^1(\Omega)$ que consiste de las funciones de clase C^1 con soporte en Ω y provisto del producto interno

$$\text{(1.2)} \qquad \langle u, v\rangle_1 = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

Una *solución generalizada* de (1.1) es una función $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que para todo $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\text{(1.3)} \qquad \langle u, v\rangle_1 = \int_\Omega g(\zeta, u(\zeta))v(\zeta)d\zeta \, .$$

El producto interno y la norma en $L^2(\Omega)$ los denotaremos por $<,>_o$ y $\| \|_o$, respectivamente.

Es bien conocido que existe una sucesión $\{\lambda_k\}$ de números reales tales que $0 < \lambda_k \leqslant \lambda_{k+1}$ y $\lim \lambda_k = \infty$; y una correspondiente sucesión $\{\phi_k\} \subset H_o^1(\Omega)$ que constituyen un sistema ortonormal completo de $L^2(\Omega)$ tales que

$$(1.4) \qquad \begin{aligned} \Delta\phi_k + \lambda_k \phi_k &= 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \phi_k(\zeta) &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

en el sentido generalizado. Ver, por ejemplo, [4].

Si llamamos X al subespacio de $H_o^1(\Omega)$ generado por $\{\phi_1, \phi_2,\dots,\phi_{n-1}\}$, $N \geqslant 2$ y $Y = X^1$, entonces es bien conocido que $H_o^1(\Omega) = X \oplus Y$ y también que

$$(1.5) \qquad \lambda_N \|y\|_o^2 \leqslant \|y\|_1^2, \quad y \in Y,$$

$$(1.6) \qquad \lambda_1 \|u\|_o^2 \leqslant \|u\|_1^2, \quad u \in H_o^1(\Omega),$$

$$(1.7) \qquad \|x\|_1^2 \leqslant \lambda_{N-1} \|x\|_o^2, \qquad x \in X.$$

Supondremos ahora que $g:\Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible en la primera variable y continua en la segunda. Además, supondremos también que existen $C_1 \in L^2(\Omega)$ y $C > 0$ tales que

$$(1.8) \qquad |g(\zeta,u)| \leqslant C_1(\zeta) + C|u|$$

Es bien conocido (ver, por ejemplo, [2]), que bajo las anteriores condiciones el operador $G:L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definido por $G(u)(\zeta) = g(\zeta,u(\zeta))$ es continuo y envía conjuntos acotados en conjuntos acotados.

Nuestro principal resultado es el siguiente:

TEOREMA 1.1. *Supongamos que*

A) $g(\zeta,u)$ *es medible en* ζ *y continua en* u.

B) $g(\zeta,0) \in L^2(\Omega)$.

C) *Existe* $K > 0$ *tal que* $|g(\zeta,u)-g(\zeta,v)| \leqslant K|u-v|$.

D) *Existe* $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$ *tal que* $\lambda_N > K$ *para el cual se cumple que si* $\|u\|_o \leqslant \frac{\lambda_N}{\lambda_1} + \frac{\sqrt{\lambda_N}}{\sqrt{\lambda_1}}$ *entonces* $\|g(\zeta,u)\|_o \leqslant \lambda_N$.

Bajo las condiciones A)-D) *el problema* (1.1) *tiene solución generalizada.*

Como consecuencia del Teorema 1.1 estudiaremos, primeramente en el numeral 2, el problema

$$(1.9)\qquad \begin{aligned} \Delta u + \lambda_1 u + \hat{g}(\zeta,u) &= 0 \quad \text{en } \Omega, \\ u(\zeta) &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

cuando $\hat{g}(\zeta,u)$ no es acotada. Siempre supondremos que $\partial\Omega$ es suficientemente suave. Este problema ha sido estudiado, entre muchos otros trabajos, en [1] (Teoremas 9.1 y 9.2); allí se dan condiciones sobre $\hat{g}(\zeta,u)$ para que (1.9) tenga, por lo menos, una solución. Aquí daremos condiciones para que (1.9) tenga múltiples soluciones. En [1] también se contempla el interesante caso en que $\hat{g}(\zeta,u) = f(\zeta,u)-h(\zeta)$ cuando $f(\zeta,u)$ es acotada.

En el numeral 3 estudiaremos las relaciones que existen entre el problema (1.9) y el mismo problema cuando cambiamos λ_1 por $\lambda \neq \lambda_1$.

Con relación al problema (1.9) tenemos el siguiente

TEOREMA 1.2. *Supongamos que*

E) $\hat{g}(\zeta,u)$ *es medible en* ζ *y continua en* u.

F) $\hat{g}(\zeta,0) \in L^2(\Omega)$.

G) $\hat{g}(\zeta,u)$ *es lipschitziana en* u *con constante de Lipschitz* K *tal que* $K + \lambda_1 < \lambda_2$.

H) *Si* $\|u\|_0 \leqslant \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1}}$ *entonces* $h(\zeta,u) = \lambda_1 u+g(\zeta,u)$ *satisface que* $\|h(\zeta,u)\|_0 \leqslant \lambda_2$.

Bajo las condiciones E)-H) *el problema* (1.9) *tiene solución generalizada. Si, además,*

I) $\hat{g}(\zeta,0) = 0$

J) $\left.\frac{\partial\hat{g}(\zeta,u)}{\partial u}\right|_{u=0} > 0$,

entonces el problema (1.9) *tiene, por lo menos, tres soluciones generalizadas.*

Para dar un ejemplo del Teorema 1.2, consideremos el siguiente problema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$(1.10)\qquad \begin{aligned} u'' + u + \hat{g}(\zeta, u) &= 0 \\ u(0) = u(\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Recordemos que en este caso $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$. Una clase de funciones para la cual el problema (1.10) tiene solución puede escogerse entre aquellas que satisfacen

$$|\hat{g}(\zeta, u) + u| \leqslant \frac{4}{\sqrt{\pi}}$$

y poseen constantes de Lipschitz $K < 3$.

§2. Demostración de los Teoremas 1.1 y 1.2.

Demostración del Teorema 1.1. Sea $\mathfrak{f}: H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ definida por

$$(2.1)\qquad \langle \mathfrak{f}(u), v\rangle_1 = \langle g(\zeta, u), v\rangle_0.$$

Probar que $\mathfrak{f}$ es un operador completamente continuo se hace mediente procedimientos ya clásicos. De (1.3) se deduce que $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución generalizada de (1.1) si, y sólo si $u = \mathfrak{f}(u)$.

Si $\|u\|_1 \leqslant \sqrt{\lambda_N} + \frac{\lambda_N}{\sqrt{\lambda_1}}$, por (1.6), se tiene que $\|u\|_0 \leqslant \frac{\lambda_N}{\lambda_1} + \frac{\sqrt{\lambda_N}}{\sqrt{\lambda_1}}$ y de la condición D) del Teorema 1.1, obtenemos que

$$(2.2)\qquad \frac{\|g(\zeta, u)\|_0}{\sqrt{\lambda_N}} \leqslant \sqrt{\lambda_N}\ .$$

Llamemos P_1 y P_2 las proyecciones ortogonales de $H_0^1(\Omega)$ sobre X y Y, respectivamente. Sea $x \in X$ tal que $\|x\|_1 \leqslant \lambda_N/\sqrt{\lambda_1}$ Fijemos x y consideremos la función $P_2\mathfrak{f}(x+\cdot): \bar{B}_{\sqrt{\lambda_N}} \cap Y \to Y$ donde $\bar{B}_{\sqrt{\lambda_N}} = \{u \in H_0^1(\Omega);\ \|u\|_1 \leqslant \sqrt{\lambda_N}\}$. Es claro que $P_2\mathfrak{f}(x+\cdot)$ es completamente continuo; de (1.5) y (2.2) se tiene que para cada $y \in \bar{B}_{\sqrt{\lambda_N}} \cap Y$,

$$\|P_2 f(x+y)\|_1 = \operatorname*{Sup}_{\substack{\|z\|_1=1 \\ z\in Y}} |\langle P_2 f(x+y), z\rangle_1|$$

$$(2.3) \qquad = \operatorname*{Sup}_{\substack{\|z\|_1=1 \\ z\in Y}} |\langle g(\zeta, x+y), z\rangle_0|$$

$$\leqslant \frac{\|g(\zeta, x+y)\|_0}{\sqrt{\lambda_N}} \leqslant \sqrt{\lambda_N}$$

De (2.3) y el teorema de punto fijo de Schauder se deduce que tiene un punto fijo en $\bar{B}_{\sqrt{\lambda_N}} \cap Y$. Por otra parte, por (1.5) y la condición C) del Teorema 1.1 se sigue que

$$\|P_2 f(x+y_1)-P_2 f(x+y_2)\|_1 \leqslant \frac{K}{\sqrt{\lambda_N}} \|y_1-y_2\|_0$$

$$(2.4) \qquad \leqslant \frac{K}{\lambda_N} \|y_1-y_2\|_1 .$$

Debido que $K/\lambda_N < 1$ se sigue, de (2.4), que $P_2 f(x+\cdot)$ es una contracción y, por tanto, su punto fijo es único. Sea $T:\bar{B}_{\lambda_N/\sqrt{\lambda_1}} \cap X \to \bar{B}_{\sqrt{\lambda_N}} \cap Y$ tal que $T(x)$ sea el único punto fijo de $P_2 f(x+\cdot)$. Esto es, para cada $x \in \bar{B}_{\lambda_N/\sqrt{\lambda_1}} \cap X$

$$(2.5) \qquad P_2 f(x+T(x)) = T(x).$$

De (2.5) se obtiene

$$(2.6) \qquad \|T(x_n)-T(x)\|_1 \leqslant \frac{1}{1-K/\lambda_N} \|P_2 f(x_n+T(x))-P_2 f(x+T(x))\|_1 .$$

De (2.6) y la continuidad de $P_2 f$ se sigue que T es continua.

Consideremos, ahora, la función $P_1 f(\cdot+T(\cdot)):\bar{B}_{\lambda_N/\sqrt{\lambda_1}} \cap X \to X$. Entonces

$$\|P_1 f(x+T(x))\|_1 = \operatorname*{Sup}_{\substack{\|z\|_1=1 \\ z\in X}} |\langle P_1 f(x+T(x)), z\rangle_1|$$

$$\leqslant \frac{\|g(\zeta, x+r(x))\|_0}{\sqrt{\lambda_1}}$$

$$(2.7) \qquad \leqslant \lambda_N/\sqrt{\lambda_1} .$$

Puesto que $\dim X < \infty$, de (2.7) se sigue que $P_1 \mathfrak{f}(\cdot + T(\cdot))$ tiene un punto fijo $x_o \in X$. Junto con (2.5) se obtiene

$$(2.8) \qquad \begin{aligned} P_2 \mathfrak{f}(x_o + T(x_o)) &= T(x_o) \\ P_1 \mathfrak{f}(x_o + T(x_o)) &= x_o \ . \end{aligned}$$

De (2.8) obtenemos que $x_o + T(x_o)$ es un punto fijo de $\mathfrak{f}$ y de allí que sea una solución generalizada de (1.1). ▲

Demostración del Teorema 1.2. Bajo las condiciones E)-H) la función $h(\zeta,t)$ satisface las condiciones del Teorema 1.1 y por lo tanto el problema (1.9) tiene solución. Debemos anotar que en este caso $X = \{t\phi_1;\ t \in \mathbb{R}\}$ y $Y = X^{\perp}$. Como en el Teorema 1.1 tenemos, en nuestro caso, que $\|t\phi_1\|_1 \leqslant \lambda_2/\sqrt{\lambda_1}$. En virtud de la desigualdad (1.6) tenemos una identidad para $u = \phi_1$, la anterior desigualdad equivale a que $|t| \leqslant \lambda_2/\lambda_1$. Como en el Teorema 1.1, por cada solución de la ecuación

$$(2.9) \qquad P_1 \mathfrak{f}(t\phi_1 + T(t\phi_1)) = t\phi_1, \qquad |t| \leqslant \lambda_2/\lambda_1,$$

tendremos una solución generalizada de (1.9) y recíprocamente: si $t\phi_1 + y$, $y \in Y$, es una solución de (1.9) entonces $\mathfrak{f}(t\phi_1 + y) = t\phi_1 + y$ y por lo tanto $P_2\mathfrak{f}(t\phi_1 + y) = y$. Puesto que $P_2\mathfrak{f}(t\phi_1 + \cdot)$ es una contracción, de la definición de la función $T: X \to Y$ se obtiene que $y = T(t\phi_1)$ y de acá que $t\phi_1$ satisface (2.9). De la condición I) se obtiene que 0 es una solución de (1.9), así que (2.9) se satisface para $t = 0$, y $T(0)$ será la solución de (1.9). De la desigualdad (1.5), en este caso $N = 2$, tenemos

$$\lambda_2 \|T(0)\|_o^2 \leqslant \|T(0)\|_1^2 = \langle h(\zeta, T(0)), T(0)\rangle_o \leqslant (K+\lambda_1)\|T(0)\|_2^2 ,$$

puesto que $\lambda_2 > K + \lambda_1$ se sigue que $T(0) = 0$. Es claro que (2.9) es equivalente a

$$(2.10) \qquad H(t) = \langle P_1\mathfrak{f}(t\phi_1 + T(t\phi_1)), \phi_1\rangle_1 = \lambda_1 t, \qquad |t| \leqslant \lambda_2/\lambda_1 \ .$$

Afirmamos que $H:[-\lambda_2/\lambda_1,\lambda_2/\lambda_1] \to \mathbb{R}$ es C^1. Además es claro que $H(0) = 0$. Para ello es suficiente ver que T es C^1.

Sea $F:X\times Y \to Y$ definido por

$$F(x,y) = P_2 \mathfrak{f}(x+y) - y \ . \tag{2.11}$$

Para $|t| \leqslant \lambda_2/\lambda_1$ tomamos $x = t\phi_1$ fijo. De (2.4) se deduce que $P_2\mathfrak{f}(x+\cdot)$ es una contracción y por lo tanto $F(x,y) = 0$ si y sólo si $y = T(x)$.

Veamos que $D_y P_2 \mathfrak{f}(x+y) - I|_Y$ es un difeomorfismo de Y en Y. Primero veamos que es inyectivo. Supongamos que existe $w \in Y$, $w \neq 0$ (podemos suponer que $\|w\|_1 = 1$), tal que $D_y P_2 \mathfrak{f}(x+y)(w) = w$. Entonces

$$\begin{aligned} 1 = \langle D_y P_2 \mathfrak{f}(x+y)(w),w\rangle_1 &= \frac{d}{dt} \ \langle P_2\mathfrak{f}(x+y+tw),w\rangle_1 \big|_t = 0 \\ &= \langle \frac{\partial h}{\partial u} \ (\zeta,x+y)w,w\rangle_0 \ . \end{aligned} \tag{2.12}$$

(La continuidad de $\dfrac{\partial h(\zeta,u)}{\partial u}$ garantiza que la derivada de Gateaux coincida con la derivada de Fréchet). De la condición G) se deduce que $\dfrac{\partial \hat{g}(\zeta,u)}{\partial u} \leqslant K$, por lo tanto

$$\frac{\partial h(\zeta,u)}{\partial u} \leqslant \lambda_1 + K < \lambda_2 . \tag{2.13}$$

De la desigualdad (1.5) (en este caso $N = 2$) y (2.13) reemplazada en (2.12) se obtiene $1 < \lambda_2 \|w\|_0^2 \leqslant \frac{\lambda_2}{\lambda_2} = 1$. Esta contradicción prueba la inyectividad. Ahora, $\mathfrak{f}$ es completamente continua y por lo tanto $P_2\mathfrak{f}$ también lo es. Es bien conocido, ver [5], Teorema 4.7, pág. 51, que $D_y P_2 \mathfrak{f}(x+y)$ también será completamente continuo. De la alternativa de Fredholm se sigue que $D_y P_2\mathfrak{f}(x+y) - I|_Y$ es sobre.

Del teorema de la función implícita se deduce que si $F(x,y) = 0$, existe ψ definida en una vecindad de x y con valores en Y, única y de clase C^1 tal que $F(z,\psi(z)) = 0$ para todo z de la vecindad de x. De la definición de la función T se obtiene que $T = \psi$. Así que T es C^1.

Volvamos, ahora, a nuestro problema (2.10). De acuerdo a la manera como se definió el operador $\mathfrak{f}$ (como en (2.1) y haciendo $g = h$) y observando que ϕ_1 y $T(t\phi_1)$ son ortogonales en $L^2(\Omega)$ se tiene que,

$$H(t) = \lambda_1 t + \langle \hat{g}(\zeta, t\phi_1 + T(t\phi_1)), \phi_1 \rangle_o .$$

Un cálculo nos muestra que

$$H'(t) = \lambda_1 + \langle \frac{\partial \hat{g}(\zeta, t\phi_1 + T(t\phi_1))}{\partial u} \{\phi_1 + T'(t\phi_1)(\phi_1)\}, \phi_1 \rangle_o .$$

De la condición J) y del hecho de que $T'(0)(\phi_1)$ y ϕ_1 son ortogonales en $L^2(\Omega)$, se obtiene que $H'(0) > \lambda_1$. Puesto que $H(0) = 0$, entonces $H(t) > \lambda_1 t$, $t > 0$ y $H(t) < \lambda_1 t$ para $t < 0$, $y|t|$ pequeño.

También, $H(t) = \langle h(\zeta, t\phi_1 + T(t\phi_1)), \phi_1 \rangle_o$. Si $|t| \leqslant \lambda_2/\lambda_1$ es fácil ver que $\| t\phi_1 + T(t\phi_1) \|_o \leqslant \lambda_2/\lambda_1 + \sqrt{\lambda_2}/\lambda_1$. De la condición H) se sigue que $|H(t)| \leqslant \lambda_2$. Esto implica que (2.10) se satisface para algún $t' > 0$ y algún $t'' < 0$. Por lo tanto $t'\phi_1 + T(t'\phi_1)$ y $t''\phi_1 + T(t''\phi_1)$ son soluciones no nulas y distintas de (1.9). Como cero es otra solución el teorema queda probado. ▲

§3. El caso en que $g(\zeta,u)$ es acotado. Para simplificar supondremos que $g(\zeta,u) = g(u)$. Ahora estudiaremos el problema

$$(P_\lambda) \qquad \begin{aligned} \Delta u + \lambda u + g(u) + h &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ u(\zeta) &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

donde $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y acotada y $h \in L^2(\Omega)$.

El problema (P_{λ_1}) ha sido estudiado, aparte de otros trabajos en [1]. Allí se dan condiciones necesarias y suficientes para que (P_{λ_1}) tenga por lo menos una solución generalizada. Acá estableceremos algunas relaciones entre las soluciones de (P_λ) y (P_{λ_1}).

TEOREMA 3.1. *Sea $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitziana y acotada. Sea $h \in L^2(\Omega)$ arbitraria. Entonces para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| < \lambda_1$, el* *problema* (P_λ) *tiene, por lo menos, una solución generalizada* u_λ. *Si, además, para todo* $\lambda \in [\lambda_o,\lambda_1)$, *para algún* λ_o, $\|u_\lambda\| \leq M$, *entonces el problema* (P_{λ_1}) *tiene solución en el sentido generalizado.*

Demostración. La primera parte del teorema es una consecuencia del Teorema 1.1. En efecto; supongamos que $\|g\|_\infty \leq \alpha$ para algún $\alpha > 0$. Sea K la constante de Lipschitz de g. Si llamamos $g(\zeta,u) = \lambda u + g(u) + h$ entonces es fácil ver que se cumplen las condiciones A)-C) del Teorema 1.1. Como $\lambda_N \to \infty$ cuando $N \to \infty$, escojamos $N \in \mathrm{N}$ tal que $\lambda_N > \text{Máx}\{\alpha|\Omega|^{\frac{1}{2}} + \|h\|_o, \lambda_1 + K\}$. Es fácil ver que si $\|u\|_o \leq \lambda_N/\lambda_1 + \sqrt{\lambda_N}/\sqrt{\lambda_1}$ entonces para $\lambda \in \mathrm{R}$ tal que

$$(3.1) \qquad |\lambda| \leq \frac{\lambda_1(\lambda_N - \alpha|\Omega|^{\frac{1}{2}} - \|h\|_o)}{\lambda_N + \sqrt{\lambda_N}\,\sqrt{\lambda_1}}$$

se cumple que $\|g(u)+\lambda - u + h\|_o \leq \lambda_N$. Puesto que el miembro derecho de (3.1) tiende a λ_1^- si $N \to \infty$, concluímos que (P_λ) tiene solución para $|\lambda| < \lambda_1$. Queda probada la primera parte del teorema.

Para probar la segunda parte supongamos que (P_{λ_1}) no tiene solución. Recordemos que las soluciones de (P_λ), $|\lambda| \leq \lambda_1$, son los puntos fijos del operador $\mathfrak{f}_\lambda : H_o^1(\Omega) \to H_o^1(\Omega)$ definido por $<\mathfrak{f}_\lambda(u), v>_1 = <\lambda u + g(u) + h, v>_o$, para todo $v \in H_o^1(\Omega)$. Un calculo fácil nos dice que

$$(3.2) \qquad \|\mathfrak{f}_\lambda(u) - \mathfrak{f}_{\lambda_1}(u)\|_1 \leq \frac{|\lambda - \lambda_1|}{\lambda_1}\, \|u\|_1 .$$

De (3.2) se deduce que $\mathfrak{f}_\lambda \to \mathfrak{f}_{\lambda_1}$, cuando $\lambda \to \lambda_1$, uniformemente sobre conjuntos acotados de $H_o^1(\Omega)$. Por hipótesis $I - \mathfrak{f}_{\lambda_1}$ no tiene ceros sobre cualquier bola cerrada de centro cero y radio R, por lo tanto $I - \mathfrak{f}_\lambda$ tampoco se anula para λ tal que $\lambda_o < \lambda < \lambda_1$ donde λ_o depende de R (ver Teorema 19.5 de [3]). De lo anterior se sigue que la solución u_λ de (P_λ), para $\lambda_o < \lambda < \lambda_1$, cumple que $\|u_\lambda\|_1 > R$. Como R es arbitrario se contradice la hipótesis de que $\{u_\lambda\}$ es acotado. El teorema queda probado. ▲

Un resultado recíproco del Teorema 3.1 es el siguiente

TEOREMA 3.2. *Supongamos que el problema* $(P\lambda_1)$ *tiene por lo menos una solución* u_{λ_1}. *Supongamos, además, que* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *es de clase* C^1 *y que* $g'<0$. *Entonces existe* $\varepsilon>0$ *tal que para todo* λ, $|\lambda-\lambda_1|<\varepsilon$ *el problema* $(P\lambda)$ *tiene una solución* u_λ *y además* $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_1} u_\lambda = u_{\lambda_1}$.

Demostración. Las soluciones del problema $(P\lambda_1)$ son los puntos fijos del operador $\mathfrak{f}_{\lambda_1}: H_0^1(\Omega)\to H_0^1(\Omega)$. Es fácil ver que

$$(3.3)\qquad <\mathfrak{f}'_{\lambda_1(u_{\lambda_1})}(w),v>_1 \;=\; <\lambda_1 w+g'(u_{\lambda_1})w,v>_0$$

para todo $v\in H_0^1(\Omega)$. Puesto que $g'(u_{\lambda_1})<0$ entonces $\mathfrak{f}'_{\lambda_1}(u_{\lambda_1})$ no tiene valores propios reales en el intervalo $[1,\infty)$. Esto en virtud de que la única solución del problema

$$\begin{aligned}\Delta w + m(\lambda_1+g'(u_{\lambda_1}))w &= 0 \quad \text{en } \Omega\\ w(\zeta) &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega\end{aligned}$$

es $w=0$, cuando $0<m\leqslant 1$. Por lo tanto u_{λ_1} es un cero aislado del operador $I-\mathfrak{f}_{\lambda_1}$ y se cumple que el grado de Leray-Schauder

$$(3.4)\qquad d[I-\mathfrak{f}_{\lambda_1},B(u_{\lambda_1},\rho),0] = (-1)^0 = 1$$

para todo $\rho<0$ suficientemente pequeño. (Ver Teorema 21.6 de [3]). De que u_{λ_1} sea un cero aislado de $I-\mathfrak{f}_{\lambda_1}$ concluimos que $(I-\mathfrak{f}_{\lambda_1})(u)\neq 0$ para u tal que $\|u-u_{\lambda_1}\|_1=\rho$, con ρ suficientemente pequeño. Es claro que $\mathfrak{f}_\lambda\to\mathfrak{f}_{\lambda_1}$ uniformemente sobre $\partial B(u_{\lambda_1},\rho)$, entonces existe $\varepsilon>0$ tal que para todo $\lambda\in\mathbb{R}$, $|\lambda-\lambda_1|<\varepsilon$ se cumple que $(I-\mathfrak{f}_\lambda)u\neq 0$ cuando $\|u-u_{\lambda_1}\|=\rho$. Además $I-\mathfrak{f}_\lambda$ es homótopa a $I-\mathfrak{f}_{\lambda_1}$ sobre $\partial B(u_{\lambda_1},\rho)$. De (3.4) se obtiene que $d[I-\mathfrak{f}_\lambda,B(u_{\lambda_1},\rho),0]=1$ y por lo tanto $I-\mathfrak{f}_\lambda$ tiene un cero u_λ en $B(u_{\lambda_1},\rho)$. Haciendo que $\rho\to 0$ obtenemos que $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_1} u_\lambda = u_{\lambda_1}$ y el Teorema queda probado. ▲

Agradecimientos. Deseo manifestar mis agradecimientos al pro-

fesor Jairo Charris por sus valiosos comentarios y advertencias.

*

REFERENCIAS

[1] Ambrosetti, A. and Mancini, G., *Existence and Multiplicity results for nonlinear Elliptic problems with linear part at resonance. The case of the simple eigenvalue*, J. of Diff. Eq. **28**, (1978), 220-245.

[2] Krasnosel'skii, M.A., *Topological Methods in the Theory of nonlinear Integral equations*, Mac Millan Company, N.Y., 1964.

[3] Krasnosel'skii, M.A. and Zabreico, P.P., *Geometrical Methods of nonlinear Analysis*, Springer-Verlag, N.Y., 1984.

[4] Mijailov, V.P., *Ecuaciones diferenciales en Derivadas parciales*, Mir. Moscú, 1978.

[5] Vainberg, M.M., *Variational Methods for the study of nonlinear operators*, Holden-Day, San Francisco, 1964.

*

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional
BOGOTA. D.E.

(Recibido en diciembre de 1986, la versión revisada en marzo de 1988).