Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXII (1988), págs. 173-182

RETICULOS ENGENDRADOS POR COLECCIONES DE ESPACIOS L^p

por

Sergio ALVAREZ(*)

Resumen. En esta nota se estudian algunas propiedades de los espacios L^p+L^q y $L^p \cap L^q$ para $0 \leqslant p,q \leqslant \infty$. Se muestra que dado $P \subset [0,\infty]$, la clausura de $\{L^p,\ p \in P\}$ con respecto a sumas e intersecciones finitas es $\{L^p + L^q,\ L^p \cap L^q;\ p,q \in P\}$ y que éste es un retículo distributivo con respecto a la inclusión, isomorfo (dependiendo de condiciones sencillas sobre el espacio de medida subyacente) a alguno de estos: $-P\times P$, $-P\times\{0,1\}$, $-P$, P, $\{0,1\}$, o $\{0\}$.

§1. Contexto y notación.

(X,M,m) es un espacio de medida, $m \geqslant 0$.

M^o es el conjunto de los $E \in M$ con $0 < m(E) < \infty$.

$C\ell\ m(M^o)$ es la clausura topológica en $[0,\infty]$ del conjunto $\{m(E) : E \in M^o\}$

Para $p \in (0,\infty)$, $L^p = L^p(m)$ es el conjunto de las funciones complejas M-medibles f sobre X tales que $\int_X |f|^p\, dm < \infty$

$L^\infty = L^\infty(m)$ es el conjunto de las funciones esencialmente acotadas sobre X.

$L^o = L^o(m)$ es el conjunto de las funciones con soporte finito, es decir, tales que $m(\{x \in X \text{ con } f(x) \neq 0\}) < \infty$.

En cada L^p se identifican funciones que coinciden casi en todas partes (c.t.p.);

f/E es la restricción de f a E.

(*) Los resultados de este artículo forman parte de la Tesis presentada por el autor para optar al título de Magister en la Universidad de los Andes.

$f \in L^p$ *sobre* E significa $E \in M$ y $f/E \in L^p(E)$.

Si no se especifica otra cosa, p,q,r,s,t,u son elementos cualesquiera de $[0,\infty]$ y P es un subcojunto cualquiera de $[0,\infty]$.

χ_E es la función característica de E.

$A+B$ denota el conjunto $\{a+b;\ a \in A,\ b \in B\}$.

$\vee$ denota supremo, $\wedge$ denota ínfimo.

§2. Comentario sobre el espacio L^0. Este es un espacio métrico completo para la métrica $d(f,g) = m(\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\})$.

El que d sea una métrica en L^0 es trivial, considerando la identificación de funciones que coinciden c.t.p.

Supóngase ahora que (f_n) es una sucesión de Cauchy en (L^0,d). Tomando una subsucesión (g_n) de (f_n) con $d(g_n,g_k) < 1/2^n$ para $k > n$, se tiene para cada n

$$\bigcup_{k>n} \{x \in X \mid g_k(x) \neq g_n(x)\} \subset \bigcup_{k>n} \{x \in X \mid g_{k-1}(x) \neq g_k(x)\}$$

luego

$$m(\bigcup_{k>n} \{x \in X \mid g_k(x) \neq g_n(x)\}) < \sum_{k>n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \quad .$$

Por lo tanto,

$$(\bigcap_n \bigcup_{k>n} \{x \in X \mid g_k(x) \neq g_n(x)\}) = \lim_{n\to\infty} m(\bigcup_{k>n} \{x \in X \mid g_k(x) \neq g_n(x)\}) = 0$$

Es decir, para casi todo $x \in X$, la sucesión $(g_n(x))$ es eventualmente constante. En particular, (g_n) converge c.t.p. hacia alguna función medible f. Redefiniendo f, si es necesario, sobre un conjunto de medida cero,

(i) $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\} \subset \bigcup_{n>1} \{x \subset X \mid g_{n-1}(x) \neq g_n(x)\} \cup \{x \in X \mid g_1(x) \neq 0\}$

(ii) $\{x \in X \mid f(x) \neq g_n(x)\} \subset \bigcup_{k>n} \{x \in X \mid g_k(x) \neq g_{k-1}(x)\}$

Teniendo en cuenta la escogencia de (g_n), se concluye de (i) que $f \in L^0$, y de (ii) que $d(g_n, f) \to 0$. Por lo tanto, $f_n \to f$ en (L^0, d).

Nótese, también, que L^0 es un espacio vectorial con las operaciones usuales en los demás L^p.

§3. Algunas propiedades de los espacios L^p.

PROPOSICION 1. *Para* $p < q$,

(i) $L^p \cap L^\infty \subset L^q$

(ii) $L^q \cap L^0 \subset L^p$.

Demostración. Los casos $q = 0$ ó $p = \infty$, son triviales. Para los casos $p = 0$ ó $q = \infty$ note que si $f \in L^0 \cap L^\infty$, entonces $|f| \leqslant K\chi_E$ m-c.t.p. para ciertos $K \in \mathrm{R}^+$, $E \in M$ con $m(E) < \infty$, luego

$$\int_X |f|^\alpha dm \leqslant K^\alpha m(E) < \infty \qquad \forall \alpha \in (0,\infty).$$

Para los demás casos:

(i) Si $f \in L^p$ y si $|f| \leqslant K < \infty$ entonces
$\int_X |f|^q dm \leqslant K^{q-p} \int_X |f|^p dm < \infty.$

(ii) Si $f \in L^q$ y si $m(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}) < \infty$ entonces por la desigualdad de Hölder

$$\int_X |f|^p dm \leqslant \left(\int_X |f|^q dm\right)^{p/q} m(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\})^{(q-p)/q} < \infty. \qquad \blacktriangle$$

El siguiente teorema extiende al caso $0 \in \{p,q\}$ un resultado de Villani (1985).

TEOREMA 1.

(i) *Para* $p \neq \infty$, $L^p \subset L^q$ *si y sólamente si* $p = q$ *o* ($p < q$ *y* $0 \notin C\ell\, m(M^0)$) *o* ($p > q$ *y* $\infty \notin C\ell\, m(M^0)$).

(ii) $L^\infty \subset L^q$ *si y solamente si* $q = \infty$ *o* $m(X) < \infty$.

Demostración. (ii) es trivial.
Probar (i) para el caso $0 \in \{p,q\}$ equivale a probar (a) y (b):

(a) Para $q \neq 0$, $L^0 \subset L^q$ si y sólo si $0 \notin C\ell\, m(M^0)$.

(b) Para $p \neq 0$, $L^p \subset L^0$ si y sólo si $\infty \notin C\ell\, m(M^0)$.

Demostración de (a). Si $0 \in C\ell\, m(M^0)$, es fácil ver que existe una sucesión de conjuntos $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ disyunta en M^0, con $\sum_n m(E_n) < \infty$, y que haciendo

$$f = \sum_n \chi_{E_n}\left(\frac{1}{m(E_n)}\right)^{1/q} \quad \text{para } q \neq \infty$$

$$f = \sum_n \chi_{E_n}\cdot n \quad \text{para } q = \infty$$

se tiene $f \in L^0\setminus L^q$, luego $L^0 \not\subset L^q$. Si $0 \notin C\ell\, m(M^0)$, entonces toda sucesión (E_k) de conjuntos disyuntos entre sí en M^0 con $\sum m(E_k) < \infty$ tiene rango finito. Si $f \in L^0$, sea $(E_k)_{k=1}^n$ una partición en M^0 de $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ que no pueda ser refinada en M^0. Entonces f es esencialmente constante sobre cada uno de los finitos E_k, y así $f \in L^q$.

Demostracion de (b). Si $\infty \in C\ell\, m(M^0)$, existe una sucesión $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos disyuntos en M^0 con $\sum_n m(E_n) = \infty$; se tiene

$$\sum_n \chi_{E_n}\left(\frac{1/2^n}{m(E_n)}\right)^{1/p} \in L^p\setminus L^0$$

luego $L^p \not\subset L^0$. Si $\infty \notin C\ell\, m(M^0)$ y si $f \in L^p$ $(p \neq \infty)$, entonces, puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\{x \in X \mid |f(x)| \geqslant 1/n\} \in M^0 \cup \{E \in M \mid m(E) = 0\},$$

se tiene

$$m(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}) = \lim_{n\to\infty} m(\{x \in X \mid |f(x)| \geqslant 1/n\}) < \infty$$

es decir, $f \in L^0$, luego $L^p \subset L^0$. ▲

De la proposición siguiente, el análogo para $p \in (0,\infty)$ puede encontrarse en Rudin (1987, ejercicios del Capítulo 3).

PROPOSICION 2. *Si f es una función compleja medible, $\{p \mid f \in L^p\}$ es un intervalo en $[0,\infty]$.*

Demostración. (Para los casos $f \in L^0$, $f \in L^\infty$). Si $f \in L^0 \cap L^p$ y si $q \in [0,p]$ entonces $f \in L^q$ por la proposición 1. El caso $f \in L^\infty$ es similar. ▲

§4. Los espacios $L(p,q)$. La definición siguiente es solamente de notación.

DEFINICION. Si $p \leqslant q$, $L(p,q) = L^p + L^q$, $L(q,p) = L^p \cap L^q$. Obsérvese que $L(p,p) = L^p$.

TEOREMA 2. (y definición). *Dada $f \in L^0+L^\infty$ sea $c > 0$ tal que si $\bar{X}_f = \{x \in X \mid |f(x)| \geqslant c\}$ entonces $m(\bar{X}_f) < \infty$, y sean $\underline{X}_f = \{x \in X \mid |f(x)| < c\}$, $\bar{f} = f \cdot \chi_{\bar{X}_f}$, $\underline{f} = f \cdot \chi_{\underline{X}_f}$. Entonces se cumple*

$$L(p,q) = \{f \in L^0+L^\infty \mid \bar{f} \in L^p \text{ y } \underline{f} \in L^q\}.$$

(Observese que vale la igualdad independientemente de la escogencia de c para cada f, aunque $\bar{f}$ y $\underline{f}$ sí dependen de esta escogencia).

Demostración. (Para $p \leqslant q$) si $\bar{f} \in L^p$ y $\underline{f} \in L^q$ entonces $f = \bar{f}+\underline{f} \in L^p+L^q = L(p,q)$. Dada $f \in L(p,q) = L^p+L^q$, sean $g \in L^p$ y $h \in L^q$ tales que $f = g+h$. Puesto que $m(\bar{X}_f) < \infty$, entonces $h \in L^p$ sobre $\bar{X}_f$ (Proposición 1), luego $\bar{f} \in L^p$. Sobre $\{x \in \underline{X}_f \mid |g(x)| < c\}$ es $g \in L^p \cap L^\infty \subset L^q$ (Proposición 1), y sobre $\{x \in \underline{X}_f \mid |g(x)| \geqslant c\}$ es $|g| \geqslant |f|$ y $f \in L^\infty$, luego aquí $f \in L^p \cap L^\infty \subset L^q$ (Proposición 1); así que $\underline{f} \in L^q$.

(Para $p \geqslant q$) dada $f \in L(p,q) = L^p \cap L^q$ es obvio que $\bar{f} \in L^p$ y $\underline{f} \in L^q$. Si $\bar{f} \in L^p$ y $\underline{f} \in L^q$ entonces $\bar{f} \in L^q$ y $\underline{f} \in L^p$ (Proposición 1), y por lo tanto $f = \bar{f}+\underline{f} \in L^p \cap L^q = L(p,q)$. ▲

COROLARIO. *Dada $f \in L^0+L^\infty$, el conjunto*

$$\{(p,q) \mid f \in L(p,q)\} = \{p \mid \bar{f} \in L^p\} \times \{q \mid \underline{f} \in L^q\}$$

es un producto de intervalos en $[0,\infty]$, el primero de los cuales contiene a 0 y el otro a ∞.

PROPOSICION 3.

(i) $L(p,q) + L(r,s) = L(p\wedge r,\ q\vee s)$.

(ii) $L(p,q) \cap L(r,s) = L(p\vee r,\ q\wedge s)$.

Demostracion. (i) $L(p,q) \subset L(p\wedge r,\ q\vee s)$ y $L(r,s) \subset L(p\wedge r,\ q\vee s)$ como consecuencia del Teorema 2 y la Proposición 1, luego $L(p,q)+L(r,s) \subset L(p\wedge r,\ q\vee s)$. Recíprocamente, dada $f \in L(p\wedge r,\ q\vee s)$, $\bar{f}$ pertenece a alguno entre L^p y L^r y $\underline{f}$ pertenece a alguno entre L^q y L^s (Teorema 2), de donde (tomando $\bar{f}_- = \underline{f}^- = 0$), $\bar{f}$ pertenece a alguno entre $L(p,q)$ y $L(r,s)$, y $\underline{f}$ también; así $f = \bar{f} + \underline{f} \in L(p,q) + L(r,s)$.

(ii) $L(p\vee r,\ q\wedge s) \subset L(p,q)$ y $L(p\vee r,\ q\wedge s) \subset L(r,s)$ como consecuencia del Teorema 2 y la Proposición 1, luego $L(p\vee r,\ q\wedge s) \subset L(p,q) \cap L(r,s)$. Recíprocamente, dada $f \in L(p,q) \cap L(r,s)$, se tiene $\bar{f} \in L^p \cap L^r \subset L^{p\vee r}$ y $\underline{f} \in L^q \cap L^s \subset L^{q\wedge s}$; por lo tanto $f \in L(p\wedge r,\ q\vee s)$ (Teorema 2). ▲

COROLARIO.

(i) $L(p,q) \cap (L(r,s)+L(t,u)) = (L(p,q)\cap L(r,s))+(L(p,q)\cap L(t,u))$

(ii) $L(p,q) + (L(r,s)\cap L(t,u)) = (L(p,q)+L(r,s))\cap (L(p,q)+L(t,u))$

Demostración. Esto se sigue de la Proposición 3 y del hecho de que para $a,b,c \in [0,\infty]$ se tiene

$$a \wedge (b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c), \quad a\vee(b\wedge c) = (a\vee b)\wedge(a\vee c).$$

PROPOSICION 4. $L(p,q) \subset L(r,s)$ *si y sólo si* $(p \geqslant r$ *o* $0 \notin C\ell m(M^o))$ *y* $(q \leqslant s$ *o* $(\infty \notin C\ell m(M^o)$ *y* $q \neq \infty)$ *o* $(m(X) < \infty))$.

Demostración. Por el Teorema 2, $L(p,q) \subset L(r,s)$ si y sólo si $L^p \cap L^o \subset L^r$ y $L^q \cap L^\infty \subset L^s$. Basta, pues, probar (i) y (ii):

(i) $L^p \cap L^\infty \subset L^q$ si y sólo si $p < q$ ó $(\infty \notin C\ell m(M^o)$ y $p \neq \infty)$ ó $m(X) < \infty$.

(ii) $L^p \cap L^o \subset L^q$ si y sólo si $p > q$ ó $0 \notin C\ell m(M^o)$.

Demostracion de (i). Si $p \leqslant q$, entonces $L^p \cap L^\infty \subset L^q$ por la Proposición 1. Si $p > q$ y si $(\infty \notin C\ell m(M^o)$ y $p \neq \infty)$ ó $(m(X) < \infty$ y $p = \infty)$, entonces $L^p \subset L^q$ por el Teorema 1, luego $L^p \cap L^\infty \subset L^q$. Con esto termina una dirección de la equivalencia. Si $L^p \cap L^\infty \subset L^q$ y además $p > q$ entonces, puesto que

$L^p \cap L^o \subset L^q$ por la Proposición 1, se tiene $L^p = (L^p \cap L^o) + (L^p \cap L^\infty) \subset L^q$ (Proposición 3), luego por el Teorema 1 se tiene ($\infty \notin C\ell m(M^o)$ y $p \neq \infty$) ó ($m(X) < \infty$).

Demostracion de (ii). Si $p \geqslant q$, entonces $L^p \cap L^o \subset L^q$ por la Proposición 1. Si $p < q$ y si $0 \notin C\ell m(M^o)$, entonces $L^p \subset L^q$ por el Teorema 1. Esto muestra que la condición dada es suficiente para que $L^p \cap L^o \subset L^q$. Si $L^p \cap L^o \subset L^q$ y además $p < q$, de la Proposición 1 se sigue que $L^p \cap L^\infty \subset L^q$, luego $L^p = (L^p \cap L^o) + (L^p \cap L^\infty) \subset L^q$ y así $0 \notin C\ell m(M^o)$ por el Teorema 1.

§5. Los retículos $R(P)$. Recordemos que P denota un subconjunto arbitrario de $[0,\infty]$. Sea $R(P) = \{L(p,q) \mid p,q \in P\}$.

TEOREMA 3.

(i) $R(P)$ *es un retículo distributivo con respecto a la inclusión, con supremo* + *e infimo* $\cap$.

(ii) $R(P)$ *es la clausura con respecto a sumas e intersecciones finitas de* $\{L^p \mid p \in P\}$.

(iii) *Si en* $P\times P$ *se define* $(p,q) \leqslant (r,s)$ *por* $p \geqslant r$ *y* $q \leqslant s$, *entonces* $(p,q) \mapsto L(p,q)$ *define un epimorfismo de retículos de* $P\times P$ *sobre* $R(P)$.

(iv) *El morfismo dado en* (iii) *induce un isomorfismo de* $R(P)$ *sobre* $\bar{P}\times \underline{P}$, *siendo*

$$\bar{P} = \begin{cases} -P & si \quad 0 \in C\ell m(M^o) \\ \{0\} & si \quad 0 \notin C\ell m(M^o) \end{cases},$$

$$\underline{P} = \begin{cases} +P & si \quad \infty \in C\ell m(M^o) \\ \{0,1\} & si \quad \infty \notin C\ell m(M^o) \ y \ m(X) = \infty \\ \{0\} & si \quad m(X) < \infty \end{cases}$$

(v) $R(P)$ *es completo si y solamente si* P *es cerrado en* $[0,\infty]$, *en el caso* $C\ell m(M^o) \cap \{0,\infty\} \neq \emptyset$. *Siempre que* $R(P)$ *sea completo se tiene*

$$\bigvee_{(p,q)\in I} L(p,q) = L\Big(\bigwedge_{(p,q)\in I} p, \bigvee_{(p,q)\in I} q\Big)$$

$$\bigwedge_{(p,q)\in I} L(p,q) = L\Big(\bigvee_{(p,q)\in I} p, \bigwedge_{(p,q)\in I} q\Big).$$

Demostración. (i) Se sigue de la Proposición 3.
(ii) Se sigue de (i) y de las definiciones de los $L(p,q)$ y de $R(P)$.
(iii) De la Proposición 3.
(iv) Por (iii), $R(P)$ es isomorfo al cociente $P\times P/\sim$, con $(p,q) \sim (r,s)$ si y sólo si $L(p,q) = L(r,s)$; (iv) se sigue entonces de la Proposición 4.

(v) $P\times P$ y $\pm P$ son completos si y sólo si P es cerrado en $[0,\infty]$. Luego por (iv), $R(P)$ es completo si y sólo si P es cerrado en $[0,\infty]$ en el caso indicado. Las fórmulas para $\bigvee$, $\bigwedge$ se deducen de la Proposición 4. (considerando casos según $C\ell\, m(M^{\circ})$. ▲

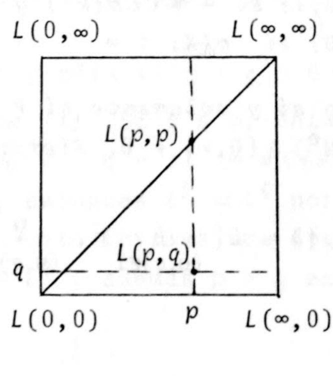
NOTA. En (v) del Teorema 3,

$$+L(p,q) \subset \bigvee L(p,q) \qquad \bigcap L(p,q) \supset \bigwedge L(p,q)$$

pero los objetos del lado izquierdo pueden no estar en $R(P)$. Por ejemplo, si $\infty \in C\ell\, m(M^{\circ})$, tomando (E_n) disyunta en M° con $m(E_n) \geqslant n$ y definiendo $f = \sum \chi_{E_n}\exp(-m(E_n))$ se tiene $f \notin L^{\circ}$ aunque $f \in L^p$ para todo $p > 0$. Esto muestra que en este caso

$$\bigcap_{0<p<\infty} L(p,q) \underset{\neq}{\supset} L(\infty,0)$$

Restringiéndose por simplicidad al caso $\{0,\infty\} \subset C\ell\, m(M^{\circ})$, pueden hacerse algunos comentarios adicionales $R(P)$ es un subretículo de $R([0,\infty])$; este último es isomorfo a $[0,\infty]\times[0,\infty]$ (como en el Teorema 3):



(recuérdese que $L(p,q) \subset L(r,s)$ si y sólo si $p \geqslant r$ y $q \leqslant s$). La existencia del isomorfismo permite probar fácilmente, por ejemplo: $R(P)$ tiene máximo si y sólo si P tiene simultáneamente máximo y mínimo si y sólo si $R(P)$ tiene mínimo; en tal caso, max $R(P) = L(\min P, \max P)$, min $R(P) = L(\max P, \min P)$, y los únicos elementos de $R(P)$ con complemento son los $L(p,q)$ con $(p,q) \in \{\min P, \max P\}\times\{\min P, \max P\}$. También pueden darse condiciones necesarias y suficientes para un subconjunto de $R([0,\infty])$ sea un subretículo y para que un subretículo de $R([0,\infty])$ sea un $R(P)$.

Para finalizar, deseo agradecer especialmente la ayuda que me brindó Jaime Lesmes durante la preparación de este artículo. También agradezco a X. Caicedo, Sergio Fajardo, Edgar Ramos y al corrector anónimo sus valiosas sugerencias.

*

REFERENCIAS

[1] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, 3ª. edición Mc-Graw-Hill, 1987.

[2] Villani, A., *Another Note on the Inclusion* $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$, The American Mathematical Monthly, vol. 92 (1985), 485-487.

*

Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes
BOGOTA. D.E. Colombia

(Recibido en noviembre de 1987).