LA RECTA DE SIMSON

POR J. SCHÜLLER, Profesor del LICEO FRANCES

TEOREMA Y DEFINICION: *Sea un triángulo ABC inscrito en un círculo O, y sea M un punto cualquiera del círculo; trazamos las perpendiculares de M a los tres lados del triángulo; los pies D,E,F de estas perpendiculares están en una línea recta llamada* RECTA DE SIMSON.

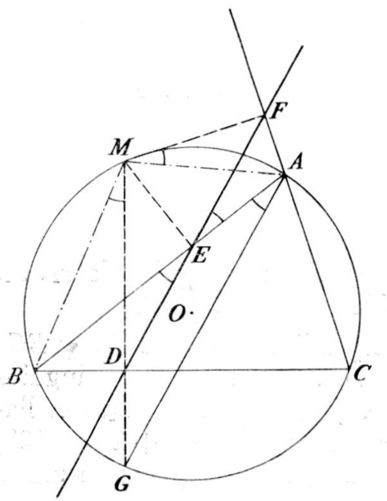

Figura 1

Consideramos el cuadrilátero $AMBC$; los cuatro vértices son puntos del círculo, el cuadrilátero está inscrito, sus ángulos son suplementarios:

(1) $\angle AMB = 180° - C.$

El cuadrilátero $FMDC$ también es inscriptible puesto que los ángulos de vértices D y F son rectos, y podemos escribir:

(2) $\angle FMD = 180° - C.$

Comparemos (1) y (2):

(3) $\angle FMD = \angle AMB.$

Estos dos ángulos tienen una parte común, el ángulo AMD. Restando a cada uno de ellos esta parte común, encontramos que:

(4) $$\angle FMA = \angle DMB.$$

Ahora consideramos el cuadrilátero $FMEA$; es inscriptible porque sus ángulos de vértices F y E son rectos. Sabemos que en un cuadrilátero inscriptible el ángulo formado por un lado y una diagonal es igual al ángulo formado por la otra diagonal y el lado opuesto. Luego

(5) $$\angle FMA = \angle FEA.$$

Consideramos finalmente el cuadrilátero $DEMB$; también es inscriptible en un medio círculo de diámetro BM, ya que los triángulos MEB y MDB son rectángulos y tienen la misma hipotenusa MB. En virtud del teorema ya citado, podemos escribir:

(6) $$\angle DMB = \angle DEB.$$

Si ahora comparamos las igualdades (4), (5), (6), vemos que:

$$\angle AEF = \angle AMF = \angle DMB = \angle DEB.$$

Concluimos que:

$$\angle AEF = \angle DEB.$$

Estos dos ángulos ocupan la posición de opuestos por el vértice. Los lados EA y EB están en línea recta; por lo tanto los lados FE y ED forman también una línea recta, llamada RECTA DE SIMSON.

PROPIEDADES DE LA RECTA DE SIMSON

I. Prolongamos MD hasta su intersección G con el círculo O. *La recta AG es paralela a la recta de* SIMSON *DEF relativa al punto M.*

Ya hemos visto que el cuadrilátero $BMED$ es inscriptible y que $\angle BMD = \angle BED$. Además, los ángulos inscritos: BMD y BAG interceptan el mismo arco $\widehat{BG}$; luego tienen la misma medida y son iguales:

$$\angle BMD = \angle BAG.$$

De donde podemos concluir que:

$$\angle BED = \angle BAG.$$

Estos dos ángulos ocupan la posición de correspondientes y por consiguiente las rectas DEF y AG son paralelas.

II. Sean M y M' dos puntos cualesquiera del círculo O, DEF y $D'F'E'$ las rectas de SIMSON correspondientes; sea G' el punto donde $M'D'$ encuentra el círculo O. Ya sabemos que AG es paralela a DEF y por la misma razón AG' lo es a $D'F'E'$, de modo que el ángulo GAG' es igual al ángulo de las rectas de SIMSON relativas a los puntos M y M'.

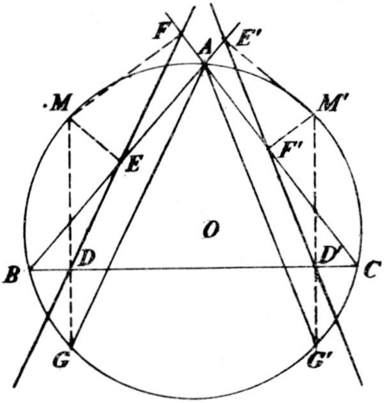

Figura 2

El ángulo GAG' es inscrito; por lo tanto:

$$med \angle GAG' = \tfrac{1}{2}\, med\ \widehat{GG'}.$$

Las cuerdas MG y $M'G'$ son paralelas e interceptan arcos iguales; podemos concluir que:

$$med \angle GAG' = \tfrac{1}{2}\, med\ \widehat{MM'}.$$

Por consiguiente, *la mitad del arco* $\widehat{MM'}$ *tiene la misma medida que el ángulo de las rectas de* SIMSON *relativas a los puntos* M *y* M'.

CASO PARTICULAR: Si los puntos M y M' son diametralmente opuestos, el arco $\widehat{MM'}$ es igual a $180°$; por lo tanto, el ángulo de las rectas de SIMSON correspondientes a estos puntos es igual a $90°$. De aquí el teorema:

Las rectas de SIMSON *relativas a dos puntos diametralmente opuestos son perpendiculares entre sí.*

III. *El ortocentro del triángulo y el punto M están a distancia igual de la recta de* SIMSON *relativa al punto M.*

Sean H el ortocentro del triángulo ABC, M un punto del círculo O y DEF la recta de SIMSON correspondiente. Llamemos N el simétrico de M con respecto al lado BC. Si prolongamos la altura AA' del triángulo hasta que encuentre el círculo O en P, sabemos que los puntos H y P son simétricos con respecto al lado BC, es decir que:

$$HA' = A'P.$$

Por consiguiente, las rectas MP y HN se cortan sobre la recta BC; además HP y MN son paralelas. Deducimos de eso la igualdad de los cuatro ángulos siguientes:

$$\angle MPH = \angle PHN = \angle MNH = \angle NMP. \tag{7}$$

Los ángulos HPM y ABM son inscritos y tienen la misma medida, la mitad del arco $\widehat{AM}$; por lo tanto esos ángulos son iguales y:

(8) $$\angle HPM = \angle MBA.$$

El cuadrilátero *BMED* es inscriptible, luego:

(9) $$\angle MBA = \angle MDE.$$

Ahora si comparamos las igualdades (7), (8), (9), podemos concluir que:

$$\angle MDE = \angle MNH.$$

Estos dos ángulos iguales ocupan la posición de correspondientes y *DEF* es paralela a *NH*.

Sea *I* el punto donde *MH* encuentra *DEF;* tenemos por el teorema de TALES:

$$\frac{MD}{DN} = \frac{MI}{IH}$$

Sabemos que $MD = DN$ y concluímos que:

$$MI = IH.$$

Las distancias *MJ* y *HK* también serán iguales.

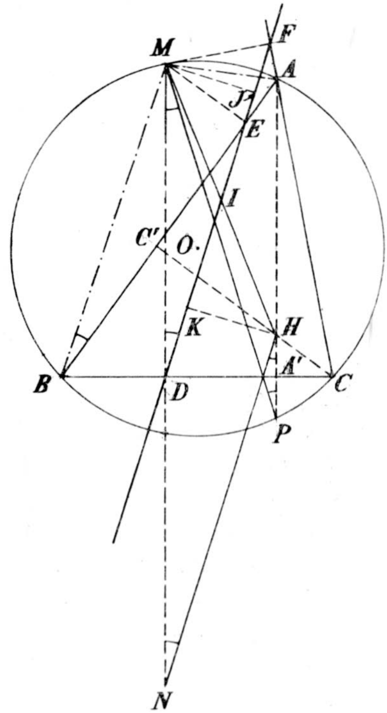

Figura 3

IV. *El lugar geométrico de la intersección de dos rectas de* SIMSON *perpendiculares entre sí es el círculo de los nueve puntos del triángulo o círculo de* EULER.

Sean M y M' dos puntos diametralmente opuestos. Las rectas de SIMSON correspondientes son perpendiculares entre sí. Trazamos las paralelas a *DEF* y *D'F'E'* que pasan por los puntos M y M'. Estas rectas se cortan en S', y S' es un punto del círculo O, ya que $\angle MS'M' = 90°$.

Aplicando la propiedad anterior (III) podemos decir que las rectas *DEF* y *MS'* por una parte, y por otra parte las rectas *D'F'E'* y *M'S'*, son homotéticas, tomando como centro de homotecia el punto H y como relación $\frac{1}{2}$.

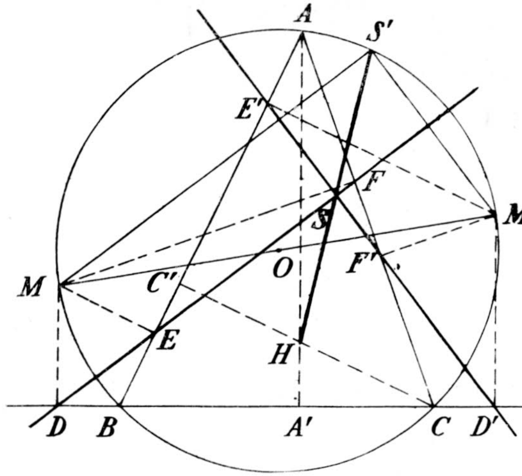

Figura 4

Luego el punto de intersección S de las rectas DEF y $D'F'E'$ es homotético de S' con el mismo centro H y la misma relación $1/2$ de homotecia. El lugar geométrico de S será el homotético del lugar de S'.

Sabemos que, en tales condiciones, el homotético del círculo circunscrito al triángulo ABC es el círculo de EULER de ese triángulo. Por lo tanto, el lugar de S', intersección de dos rectas de SIMSON perpendiculares entre sí, es el círculo de los nueve puntos o círculo de EULER del triángulo ABC.

Se ve sin dificultad que inversamente, todo punto del círculo de EULER es cruce de dos rectas de SIMSON perpendiculares entre sí.

V. El teorema fundamental admite el recíproco siguiente:

De un punto M del plano de un triángulo se trazan las perpendiculares a los lados; si los pies D,E,F (cf. fig. 1) *de esas perpendiculares están en línea recta, entonces el punto M está situado sobre el círculo circunscrito al triángulo.*

La demostración se hace partiendo de la igualdad de los ángulos AEF y BED; con la ayuda de los mismos cuadriláteros inscriptibles estudiados en el teorema directo, se llega a la conclusión:

$$\angle AMB = 180^\circ - C;$$

de donde se ve que el círculo circunscrito al triángulo ABC pasa por M.

I. Llamamos *cuadrilátero completo* la figura determinada por cuatro puntos o formada por dos pares de rectas.

Sea el cuadrilátero $ABCD$ cuyos lados opuestos se cortan en E y F. Sean O y O' los círculos circunscritos a los triángulos ADE y CDF. Los dos círculos se cortan en D y también en otro punto que llamaremos I. Trazamos las perpendiculares IM, IN, IP, IQ de I a los cuatro lados del cuadrilátero AB, CD, AD, BC, respectivamente.

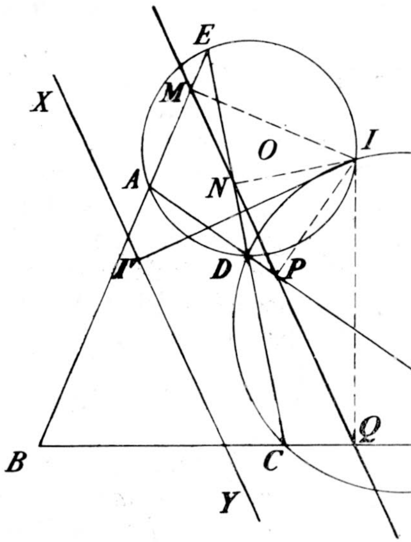

Figura 5

Los puntos M, N, P están en línea recta que es la recta de SIMSON del triángulo ADE para el punto I. Por la misma razón, los puntos N, P, Q determinan la recta de SIMSON del triángulo CDF para el mismo punto I. Podemos concluir que los cuatro puntos M, N, P, Q están en línea recta. Esta recta es la recta de SIMSON relativa al punto I de los cuatro triángulos CDF, ADE, BCE, ABF. Eso implica, por el recíproco del teorema fundamental, que el punto I es común a los círculos circunscritos a los cuatro triángulos. De aquí el teorema:

Los círculos circunscritos a los cuatro triángulos de un cuadrángulo tienen un punto común *.

* Nota de la red: esta demostración es otra solución del problema **57** de esta Revista (cf. Vol. II, pág. **81** y Vol. III, pág. **40**).

II. Sea I' el simétrico de I relativamente a la recta $MNPQ$, y sea XY la paralela a $MNPQ$ trazada por I'. Sabemos que la recta de SIMSON equidista de I y del ortocentro del triángulo. Luego la recta XY contiene los ortocentros de los triángulos CDF,ADE, BCE,ABF. Los ortocentros de los cuatro triángulos formados por los lados de un cuadrángulo están en línea recta.

PROBLEMA DE LAS TRES TANGENTES A LA PARABOLA

Sea una parábola definida por su foco F y su directriz d. Las tangentes a la parábola en tres puntos cualesquiera M_1,M_2,M_3 forman un triángulo GIH. Sabemos que el lugar geométrico de las proyecciones del foco sobre las tangentes es la tangente d' a la parábola en el vértice. Por consiguiente, los pies E_1,E_2,E_3 de las perpendiculares trazadas de F a los lados del triángulo GIH están en la recta d'.

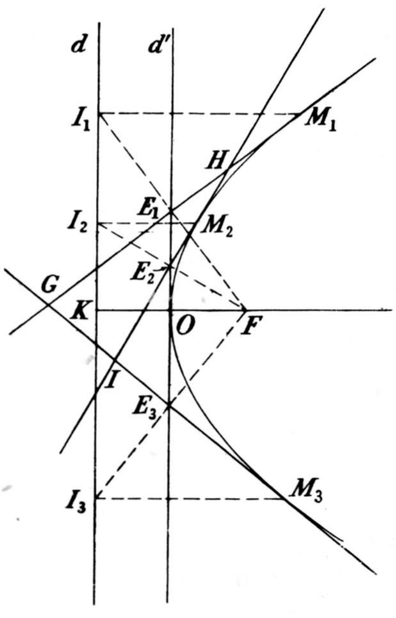

Figura 6

De aquí el teorema:

La tangente a una parábola en su vértice es la recta de SIMSON *del triángulo formado por tres tangentes cualesquiera a la parábola.*

Los pies de las perpendiculares a las tangentes trazadas desde el foco F determinan la recta de SIMSON relativa al punto F; eso significa que el foco F pertenece al círculo circunscrito al triángulo GIH. Podemos enunciar el teorema siguiente:

El círculo circunscrito a un triángulo es el lugar geométrico del foco de las parábolas tangentes a los tres lados del triángulo.

Por otra parte vimos que el ortocentro de un triángulo se encuentra sobre la recta homotética de la recta de SIMSON relativa al punto M, tomando como centro de homotecia M y como relación 2.

El homotético con centro F de la tangente en el vértice O es la directriz d de la parábola. Podemos concluir que:

El ortocentro del triángulo GIH se encuentra sobre la directriz de la parábola.

Caso particular: Si dos de las tangentes son perpendiculares entre sí, el triángulo GIH es rectángulo, en G por ejemplo. G es el ortocentro de ese triángulo. Por lo tanto, G es un punto de la directriz d, y podemos enunciar el teorema siguiente:

La directriz de la parábola es al lugar geométrico de los puntos de donde se pueden trazar tangentes a la parábola perpendiculares entre sí.