Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXIII (1989), págs. 1-4

NOTA SOBRE PLANOS ISOCLINOS

por

W. REYES

§1. Considérese $\mathbb{R}^4$ referido a la base ortonormal acostumbrada $\{e_i\}$ y dotado de la orientación $e_{1234} = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$. Al plano P engendrado por $u = (u_i)$ y $v = (v_i)$ van asociados los bivectores:

$$w_P = u \wedge v = \sum a_{ij}e_{ij}, \quad e_{ij} = e_i \wedge e_j, \quad a_{ij} = u_i v_j - u_j v_j \tag{1}$$

$$^*w_P = \sum a_{ij}{}^*e_{ij}, \quad e_{ij} \wedge {}^*e_{ij} = e_{1234}, \quad 1 \leq i < j < 4 \ .$$

Es decir, si asimilamos w_P a $(a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34})$, $^*w_P$ es el vector $(a_{34}, -a_{24}, a_{23}, a_{14}, -a_{13}, a_{12})$. Los w_P satisfacen las propiedades siguientes:

$$<^*w_P, w_P> = 2(a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}) = 0. \tag{2}$$

$$|w_P\| = |^*w_P| \ . \tag{3}$$

$$|w_P - {}^*w_P| = |w_P + {}^*w_P| \ , \tag{4}$$

es decir

$$(a_{12} - a_{34})^2 + (a_{13} + a_{24})^2 + (a_{14} - a_{23})^2$$
$$= (a_{12} + a_{34})^2 + (a_{13} - a_{24})^2 + (a_{14} - a_{23})^2 \ .$$

Para dos planos cualesquiera P y Q se tiene:

AMS Subject Classification (1980): 53B20, 51N20.

$$\langle w_P, {}^*w_Q\rangle = \langle {}^*w_P, w_Q\rangle$$

Los planos P y Q conforman entre sí un par de ángulos, α y β, de manera que:

$$\begin{aligned} \langle w_P, w_Q\rangle &= |w_P|\ |w_Q| \cos\alpha \cos\beta\ , \\ \langle w_P, {}^*w_Q\rangle &= |w_P|\ |w_Q| \sin\alpha \sin\beta\ . \end{aligned} \qquad (6)$$

Si $|\alpha| = |\beta|$ los planos se dicen *isóclinos*. Según la última fórmula P y Q son isóclinos sí y sólo si satisfacen alguna de las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \qquad \langle w_P, w_Q\rangle + \langle w_P, {}^*w_Q\rangle = |w_P|\ |w_Q| \quad (\alpha = \beta)\ , \\ &\text{(ii)} \qquad \langle w_P, w_Q\rangle - \langle w_P, {}^*w_Q\rangle = |w_P|\ |w_Q| \quad (\alpha = \beta)\ . \end{aligned} \qquad (7)$$

Para mayores detalles y demostraciones puede verse las referencias $|W_1|$ o $|G\text{-}W|$.

§2. Sean 0 un plano de referencia fijo, el cual puede asimilarse al plano de base $\{e_1, e_2\}$ y $0^\perp$ su complemento ortogonal, el plano $\{e_3, e_4\}$. Resumimos las propiedades de los planos isóclinos en la siguiente

PROPOSICION. *Los planos isóclinos con* 0 *y complementarios con* $0^\perp$ *se caracterizan por ecuaciones de alguno de los tipos:*

(i) $$(x_3, x_4) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

(ii) $$(x_3, x_4) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\ ,$$

con $a^2 + b^2 \neq 0$. *El sistema de coordenadas es el asociado a la base canónica. Todos los planos* (i) *son isóclinos entre sí, y también los* (ii), *pero planos de distinto tipo no son isóclinos entre sí.*

Demostración Los planos P y Q que nos interesan están representados en el sistema canónico por ecuaciones:

$$(x_3, x_4) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} , \quad ad - bc \neq 0 . \tag{1}$$

Por lo tanto, los bivectores correspondientes serán de la forma:

$$w_P = (1, b, d, -a, -c, ad - bc) . \tag{2}$$

Al aplicar la condición 1(7)(i) a w_P y a $w_0 = (1,0,0,0,0,0)$ se tiene

$$(1 + ad - bc)^2 = 1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + (ad - bc)^2,$$

de donde $d = a$ y $c = -b$. Al aplicar la condición §1(7)(ii) se obtiene $d = -a$ y $c = b$. Las condiciones referidas prueban que dos planos del mismo tipo son isóclinos entre sí y los de tipos diferentes no lo son. ▲

Razonamos sobre los planos (i), ya que para los (ii) se obtendrá propiedades análogas. Sea pues G la familia de los planos del primer tipo, que consideramos como una subvariedad de la grassmanniana real G_2^4 (2-planos de $\mathbb{R}^4$). La fórmula §1-(4) da para $P \in G$:

$$(1 - a^2 - b^2)^2 + 4a^2 + 4b^2 = (1 + a^2 + b^2)^2.$$

Esta identidad trivial nos permite asociar a P el punto

$$\tilde{w}_P := \left(\frac{1-a^2-b^2}{1+a^2+b^2} , \frac{2b}{1+a^2+b^2} , \frac{2a}{1+a^2+b^2} \right) \in S^2 .$$

Estudiamos una propiedad de $\tilde{w}_P$ en el

TEOREMA. *La aplicación $P \to \tilde{w}_P$ es una isometría entre G, dotada de la métrica intrínseca de G_2^4 , y la esfera S^2.*

Demostración. Sea $Q \in G$, $W_Q = (1, b', a', -a', b', a'^2 + b'^2)$, y sea α el ángulo común a P y a Q . Este ángulo se calcula según 1-(6)

$$\sin^2\alpha = \frac{(a-a')^2 + (b-b')^2}{(1+a^2+b^2)(1+a'^2+b'^2)} . \tag{3}$$

Si pensamos P y Q como infinitamente próximos, tendremos $a - a' = da, b - b' = db$ y $\sin\alpha$ podrá considerarse como la distancia infinitesimal entre P y Q :

$$ds^2 = \frac{da \; db}{(1+a^2+b^2)^2} \tag{4}$$

Pero esta última expresión se obtiene también al substituir en la fórmula métrica de Y.C. Wong en el caso particular de la grassmanniana G_2^4 :

$$ds^2 = tr(I + X^tX)^{-1}dX(I + {}^tXX)^{-1}d^tX \tag{5}$$

X por $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Véase [W_2].

Por otro lado, usando los cambios de variable $a = r\cos\Theta, b = r\sin\Theta$ y $\phi = 2$ arctg (estereográfica), $\tilde{w}_p$ se convierte en el punto

$$(\cos\phi,\ \sin\phi\sin\Theta,\ \sin\phi\cos\Theta) \tag{6}$$

de S^2. Mientras la métrica $ds^2 = d\phi^2 + \sin^2\phi d\Theta^2$ de la esfera se transforma en

$$ds^2 = 4\ \frac{dr^2+r^2d\Theta^4}{(1+r^2)^2}\ . \tag{7}$$

Pero (7) es lo mismo, salvo el factor, que (4) tras la substitución $a = r\cos\Theta$, $b = r\sin\Theta$. ▲

REFERENCIAS

[G-W] Gluck, H., Warner, F., *Great circle fibrations of the thereesphere*, Duke Math. Journal, **50**,(1983),107-133.

[W1] Wong, Y.C., *Linear Geometry in Euclidean 4-space*. S.E. A.M.S., 1977.

[W2] Wong, Y.C., *Differential Geometry of Grassmann manifols*, These. Proceedings **57**, (1967), 589-594.

*

Instituto Profesional de Chillán
Chillán, Chile

(Recibido en Octubre de 1986, versión final en Diciembre de 1987).