Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXIII (1989), págs. 5-23

SOBRE UNA TRANSFORMACION GENERALIZADA DE HANKEL

por

Jorge J. BETANCOR

Abstract. In this paper, the classical Hankel transformation is extended to a certain space of generalized functions. We construct a space $T_{\mu,\delta,\beta}$ of testing functions, such that $xJ_\mu(xy)$ is in $T_{\mu,\delta,\beta}$, for every $y > 0$. The generalized Hankel transformation $h'_\mu f$ of $f \in T'_{\mu,\delta,\beta}$, the dual space of $T_{\mu,\delta,\beta}$, is defined by:

$$(h'_\mu f)(y) = \langle f(x), xJ_\mu(xy)\rangle, \quad y > 0 .$$

Several smoothness, boundedness and inversion theorems are proved. Moreover, Abelian theorems due to J.L. Griffith are extended to the space of distributions introduced. Finally, we analyze some applications of the generalized h'_μ-transformation.

§1. Introducción. La transformación integral de Hankel definida por

$$h_\mu\{f(x)\}(y) = \int_0^\infty xJ_\mu(xy)f(x)\,dx \tag{1}$$

donde J_μ es la función de Bessel de primera especie y de orden μ, ha sido estudiada por G.N. Watson [11], quien estableció la siguiente fórmula de inversión.

TEOREMA 1. *Si f es de variación acotada en un entorno de $r > 0, \mu \geq -\frac{1}{2}$ y $\int_0^\infty |f(R)| R^{1/2} dR$ existe, entonces:*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\infty f(R) R \int_0^\lambda J_\mu(Ru) J_\mu(ru) u du dR = \frac{1}{2}\{f(r+0) + f(r-0)\} .$$

La transformación de Hankel clásica dada en (1) es extendida por J.M. Méndez en [7] a un cierto espacio de funciones generalizadas de crecimiento lento. Considera, para ello, la nueva transformación integral

$$\mathcal{H}_\mu\{f(x)\}(y) = y\int_0^\infty J_\mu(xy) f(x) dx \quad , \tag{2}$$

para la que prueba un teorema de inversión análogo al Teorema 1.

Las transformaciones h_μ y $\mathcal{H}_\mu$ están relacionadas por la siguiente igualdad de tipo Parseval:

$$\int_0^\infty f(x) g(x) dx = \int_0^\infty F(y) G(y) dy \tag{3}$$

donde $G(y) = \mathcal{H}_\mu\{g(x)\}(y)$ y $F(y) = h_\mu\{f(x)\}(y)$, siempre que $\mu \geq -\frac{1}{2}$, $x^{1/2} f(x) \in L_1(0,\infty)$ y $y^{-1/2} G(y) \in L_1(0,\infty)$.

Para $\mu \geq -\frac{1}{2}$, la transformación h_μ resulta ser un automorfismo en el espacio de funciones prueba H_μ, constituído por todas las funciones complejas regulares definidas en el intervalo $I = (0,\infty)$, tales que para todo elemento $\psi(x)$ del mismo $\gamma^\mu_{m,k}(\psi)$ existe y está acotada, siendo:

$$\gamma^\mu_{m,k}(\psi) = \sup_{x\in I} |x^m (\tfrac{1}{x}D)^k (x^{-\mu-1}\psi(x))| , \quad \text{para cada } m,k \in N .$$

Los elementos de H_μ y sus derivadas de cualquier orden son funciones de rápido decrecimiento cuando $x\to\infty$.

Para cada $f \in H'_\mu$, en [7] se define la transformación generalizada de Hankel $h'_\mu f$ de f, a través de la siguiente generalización de la igualdad de Parseval (3):

$$\langle h'_\mu f, \psi\rangle = \langle f, \mathcal{H}_\mu \psi\rangle \quad , \text{ para cada } \psi \in H_\mu . \tag{4}$$

h'_μ es un automorfismo en H'_μ , si $\mu \geq -\frac{1}{2}$.

En este trabajo, la transformación definida en (1) es estudiada en un nuevo espacio de funciones generalizadas, siguiendo el proceso empleado por L.S. Dube y J.N. Pandey [1] en la extensión de la transformación de Hankel-Schwartz. Se introduce un espacio de funciones prueba, denotado por $T_{\mu,\delta,\beta}$, siendo $xJ_\mu(xy)$ un elemento de $T_{\mu,\delta,\beta}$, para todo $y>0$. Para cada $f \in T'_{\mu,\delta,\beta}$, la transformación generalizada de Hankel $h'_\mu f$ de f es definida por la igualdad:

$$(h'_\mu f)(y) = \langle f(x), xJ_\mu(xy)\rangle \text{ , para cada } y>0. \tag{5}$$

Se prueban para la transformación (5) teoremas de acotación, inversión y unicidad. Además, si $\mu \geq -\frac{1}{2}$, $\delta \geq \frac{1}{2}$ y $\beta \leq -\frac{3}{2}$, entonces $H_\mu \subset T_{\mu,\delta,\beta}$, por lo cual para cada $f \in T'_{\mu,\delta,\beta}$ pueden definirse dos transforciones generalizadas de Hankel: una, siguiendo a J.M. Méndez [7], viene dada por (4); y la otra por medio de (5). Se prueba que, en las condiciones impuestas, las dos definiciones coinciden sobre H_μ

Así mismo, siguiendo las ideas desarrolladas por A.H. Zemanian [12] probamos ciertos teoremas abelianos para la transformación distribucional (5) siendo extendidos los resultados clásicos recogidos en [4].

Finalmente se aplica la teoría presentada a la resolución de una ecuación diferencial distribucional que incluye el operador de Bessel $B_\mu = x^{-\mu-1}Dx^{2\mu+1}Dx^{-\mu}$.

§2. El espacio de funciones prueba $T_{\mu,\delta,\beta}$ y su dual. Sea $\mu \in R$. El espacio de funciones $T_{\mu,\delta,\beta}$ está constituido por todas las funciones $\psi \in C^\infty(I)$, tales que

$$\tau^m_{\mu,\delta,\beta}(\psi) = \sup_{x\in I} \left|\xi(x) B^m_\mu \frac{\psi(x)}{x}\right| < \infty, \text{ para cada } m \in N .$$

Aquí, $\xi(x)$ es una función positiva regular que verifica:

$$\xi(x) = \begin{cases} x^\delta, & x \in (0,1) \\ \\ x^\beta, & x > 2 \end{cases} ,$$

siendo $\delta \geqslant \frac{1}{2}$ y $\beta \leqslant -\frac{3}{2}$. La familia $\Gamma = \{\tau^m_{\mu,\delta,\beta}\}_{m\in N}$ constituye una multinorma numerable en $T_{\mu,\delta,\beta}$. Dotando a $T_{\mu,\delta,\beta}$ con la topología generada por Γ, $T_{\mu,\delta,\beta}$ es un espacio numerablemente multinormado.

A continuación recogemos algunas propiedades del espacio que acabamos de definir.

PROPOSICION 1. *El espacio $T_{\mu,\delta,\beta}$ es completo y, por tanto, Fréchet.*

PROPOSICION 2. *$T_{\mu,\delta,\beta}$ es un espacio de funciones prueba y su dual, $T'_{\mu,\delta,\beta}$, un espacio de funciones generalizadas.*

PROPOSICION 3. *$\mathcal{D}(I) \subset T_{\mu,\delta,\beta} \subset \mathcal{E}(I)$, siendo las inclusiones continuas.*

Por tanto $T_{\mu,\delta,\beta}$ es denso en $\mathcal{E}(I)$, ya que $\mathcal{D}(I)$ lo es. $\mathcal{E}'(I)$ puede ser considerado, por ello, un subespacio de $T'_{\mu,\delta,\beta}$.

NOTA 1. El espacio $T_{\mu,\delta,\beta}$ no es en general cerrado bajo diferenciación. En efecto, consideremos la función $\psi(x) = x^{1-\mu}$. Se tiene que:

$$B^m_\mu \frac{\psi(x)}{x} = 0, \quad \text{para cada } m \in N-\{0\} .$$

Además:

$$\xi(x)\ \frac{\psi(x)}{x} = \begin{cases} x^{\delta-\mu}, & \text{si } x \in (0,1) \\ x^{\beta-\mu}, & \text{si } x > 2 . \end{cases}$$

Por ello, si elegimos δ y β tales que $\delta-\mu \geqslant 0$ y $\beta-\mu \leqslant 0$, podemos asegurar que $\tau^m_{\mu,\delta,\beta}(\psi) < \infty$ para cada $m \in N$, donde $\psi \in T_{\mu,\delta,\beta}$. Por otra parte, $\mathcal{D}\psi(x) = x^{-\mu}(1-\mu)$, siendo:

$$\xi(x)\ \frac{\mathcal{D}\psi(x)}{x} = \begin{cases} (1-\mu)\,x^{\delta-\mu-1}, & \text{si } x \in (0,1) \\ (1-\mu)\,x^{\beta-\mu-1}, & \text{si } x > 2 ; \end{cases}$$

se deduce de ésto que si $\mu \leqslant \delta < \mu + 1$ y $\mu \neq 1$ entonces $\tau^{0}_{\mu,\delta,\beta}(D\psi) = \infty$ y $D\psi \notin T_{\mu,\delta,\beta}$. Por tanto, en general, no tiene sentido definir el operador derivación en $T'_{\mu,\delta,\beta}$ de la forma clásica:

$$<Df,\psi> = <f,-D\psi> \ , \quad \text{para } f \in T'_{\mu,\delta,\beta} \text{ y } \psi \in T_{\mu,\delta,\beta} .$$

PROPOSICION 4. *Si $f(x)$ es una función localmente integrable en $0 < x < \infty$ y tal que:*

$$\int_0^\infty |f(x)| \frac{x}{\xi(x)} \, dx$$

$f(x)$ define una distribución regular en $T'_{\mu,\delta,\beta}$.

Demostración. Si se define la aplicación

$$<f(x),\psi(x)> = \int_0^\infty f(x)\psi(x)dx, \quad \text{para cada } \psi \in T_{\mu,\delta,\beta} ,$$

ésta es lineal y continua. En efecto, la continuidad sigue de que

$$\begin{aligned}|<f(x),\psi(x)>| &\leqslant \int_0^\infty |f(x)||\psi(x)|dx \leqslant \tau^{0}_{\mu,\delta,\beta}(\psi)\int_0^\infty |f(x)| \frac{x}{\xi(x)} \, dx \\ &\leqslant K\tau_{\mu,\delta,\beta}(\psi)\end{aligned}$$

para cada $\psi \in T_{\mu,\delta,\beta}$ donde K es una adecuada constante positiva. La linealidad de la aplicación considerada es trivial. ▲

En virtud de un conocido resultado (véase A.H. Zemanian [13]) se deduce la siguiente:

PROPOSICION 5. *Para cada $f \in T'_{\mu,\delta,\beta}$ existen un entero no negativo r y una constante positiva C, tales que, para cada $\psi \in T_{\mu,\delta,\beta}$:*

$$|<f,\psi>| \leqslant C \max_{0\leqslant m\leqslant r} \tau^{m}_{\mu,\delta,\beta}(\psi)$$

PROPOSICION 6. *Para cada $y > 0$, $m = 0,1,2$,*

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m}\{xJ_\mu(xy)\} \in T_{\mu,\delta,\beta} ,$$

siempre que $\mu \geqslant -\frac{1}{2}$.

Demostración. Si $m = 0$, para cada $n \in N$, se tiene:

$$B_\mu^n J_\mu(xy) = (-1)^n y^{2n} J_\mu(xy) .$$

Dado que la función $z^{1/2} J_\mu(z)$ está acotada en $0 < z < \infty$, se sigue:

$$|B_\mu^n J_\mu(xy)| = y^{2n-1/2} x^{-1/2} |(xy)^{1/2} J_\mu(xy)| \leqslant B y^{2n-1/2} x^{-1/2} ,$$

donde B es una cierta constante positiva. Por tanto:

$$\sup_{x\in I} |\xi(x) B_\mu^n J_\mu(xy)| \leqslant B y^{2n-1/2} \sup_{x\in I} |\xi(x) x^{-1/2}| ,$$

en virtud de las restricciones impuestas a los parámetros δ y β. Procediendo de forma similar puede probarse el aserto para $m = 1$ y 2 . ▲

Sin embargo la función $zJ_\mu(z)$ no es de rápido decrecimiento cuando $x\to\infty$, por lo que $xJ_\mu(xy) \notin H_\mu$, para cada $y > 0$, teniéndose que $T_{\mu,\delta,\beta} \not\subset H_\mu$

Por otra parte, consideremos una función infinitamente diferenciable ψ tal que:

$$\psi(x) = \begin{cases} x^{\mu+1}, & x \in (0,1) \\ e^{-x}, & x > 2. \end{cases}$$

Para cada $m,n \in N$, se tiene:

$$\sup_{x\in I} |x^m (\tfrac{1}{x}D)^n (x^{-\mu-1}\psi(x))| < \infty ,$$

siendo, por tanto, $\psi(x) \in H_\mu$. Ahora bien, si $x \in (0,1)$, entonces $\xi(x)\psi(x) = x^{\delta+\mu+1}$. Por ello, si $\delta < -\mu-1$, $\psi \notin T_{\mu,\delta,\beta}$. Se concluye, pues, que en general, $H_\mu \not\subset T_{\mu,\delta,\beta}$. Sin embargo, al ser:

$$B_\mu^m \frac{\psi(x)}{x} = \sum_{j=0}^{m} b_j x^{2j+\mu} (\tfrac{1}{x}D)^{j+m} (x^{-\mu-1}\psi(x)), \quad \text{para } m \in N ,$$

si $\delta + \mu \geqslant 0$, entonces H_μ está contenido en $T_{\mu,\delta,\beta}$. Estamos, pues, en condiciones de enunciar.

PROPOSICION 7. *Si* $\delta+\mu \geq 0$, *entonces* $H_\mu \subset T_{\mu,\delta,\beta}$, *siendo la topología de* H_μ *más fina que la inducida en él por la de* $T_{\mu,\delta,\beta}$. *Si* $f \in T'_{\mu,\delta,\beta}$ *su restricción a* H_μ *está en* H'_μ *y la convergencia en* $T'_{\mu,\delta,\beta}$ *implica la convergencia en* H'_μ.

La siguiente propiedad define la estructura de la restricción a $\mathcal{D}(I)$ de los elementos de $T'_{\mu,\delta,\beta}$.

PROPOSICION 8. *Sea* f *un elemento de* $T'_{\mu,\delta,\beta}$. *Existen funciones medibles esencialmente acotadas* $g_i(x)$, *definidas para* $x \in I$, *con* $i = 0,1,\ldots,r$, *para un cierto entero no negativo* r, *dependiente de* f, *tales que para cada* $\psi \in \mathcal{D}(I)$:

$$\langle f\ \psi\rangle = \langle \sum_{i=0}^{r} B_\mu^i\{\frac{\psi(x)}{x}(-\mathcal{D})g_i(x)\},\psi(x)$$

Demostración. En virtud de la proposición 5, dado $f \in T'_{\mu,\delta,\beta}$, existen una constante C y un entero no negativo r, tales que para cada $\psi \in \mathcal{D}(I) \subset T_{\mu,\delta,\beta}$:

$$|\langle f,\psi\rangle| \leq C \max_{0\leq m\leq r} \tau^m_{\mu,\delta,\beta}(\psi) = C \max_{0\leq m\leq r} \sup_{x\in I}|\xi(x)B^m_\mu \frac{\psi(x)}{x}|$$

$$\leq C \max_{0\leq m\leq r} \|\mathcal{D}_x\{\xi(x)B^m_\mu \frac{\psi(x)}{x}\}\|_1 ,$$

donde $\| \ \|_1$ denota la norma en el espacio $\mathcal{L}_1(0,\infty)$.

Se define la aplicación

$$J : \mathcal{D}(I) \longrightarrow L_r(0,\infty)$$

$$\psi \longrightarrow (w_m(\psi))_{m=0,\ldots,r}$$

donde $L_r(0,\infty) = (\mathcal{L}_1(0,\infty))^{r+1}$ y $w_m(\psi) = \mathcal{D}_x\{\xi(x)B^m_\mu(\psi(x)/x)\}$, para cada $\psi \in \mathcal{D}(I)$. Si denotamos $J\mathcal{D}(I)$ la imagen de $\mathcal{D}(I)$ por la aplicación J, entonces

$$T : J\mathcal{D}(I) \subset L_r(0,\infty) \longrightarrow C$$

$$(w_m(\psi))_{m=0,\ldots,r} \longmapsto \langle J,\psi\rangle$$

es una aplicación continua ya que

$$|\langle f,\psi\rangle| \leqslant C \max_{0\leqslant m\leqslant r} \|w_m(\psi)\|_1 .$$

Por tanto en virtud del teorema de Hahn-Banach esta aplicación puede extenderse a $L_r(0,\infty)$ y ya que el espacio dual de $L_r(0,\infty)$ es canónicamente isomorfo a $(\mathcal{L}_\infty(0,\infty))^{r+1}$ podemos garantizar la existencia de $r+1$ funciones medibles esencialmente acotadas $g_i(x)$, $i = 0,1,\dots,r$ tales que

$$\langle f,\psi\rangle = \sum_{i=0}^{r} \langle g_i(x), D_x\{\xi(x) B_\mu^i \frac{\psi(x)}{x}\}\rangle$$

$$= \langle \sum_{i=0}^{r} B_\mu^i\{\frac{1}{x}\xi(x)(-D_x) g_i(x)\}, \psi(x)\rangle$$

para cada $\psi \in D(I)$.

3. Una transformación generalizada de Hankel: Sea $\mu \geqslant -\frac{1}{2}$. Para cada $f \in T'_{\mu,\delta,\beta}$ se define la transformación generalizada de Hankel $h'_\mu f$ de f, como sigue:

$$F(y) = (h'_\mu f)(y) = \langle f(x), xJ_\mu(xy)\rangle, \quad \text{para cada } y > 0 . \tag{6}$$

La aplicación anterior tiene sentido, pues de acuerdo con la proposición 6, la función $xJ_\mu(xy)$ es un elemento de $T_{\mu,\delta,\beta}$ para cada $y > 0$.

Por otra parte si f es una función que satisface las condiciones indicadas en la Proposición 4, la transformación generalizada $h'_\mu f$ de f, coincide con la transformación clásica de f:

$$(h'_\mu f)(y) = \langle f(x), x J_\mu(xy)\rangle = \int_0^\infty xJ_\mu(xy) f(x)\,dx .$$

TEOREMA 2. *Para cada $y > 0$, $F(y)$ es diferenciable, y*

$$\frac{d}{dy} F(y) = \langle f(x), x \frac{\partial}{\partial y} J_\mu(xy)\rangle .$$

Demostración. Para cada $y > 0$:

$$\frac{F(y+h)-F(y)}{h} - \langle f(x), x \frac{\partial}{\partial y} J_\mu(xy)\rangle = \langle f(x), \phi_h(x,y)\rangle ,$$

donde, para cada $0 < |h| < y$:

$$\phi_h(x,y) = x\{\frac{J_\mu(x(y+h)) - J_\mu(xy)}{h} - \frac{\partial}{\partial y} J_\mu(xy)\} .$$

Nuestro propósito es probar que $\phi_h(x,y) \to 0$, cuando $h \to 0$, en el espacio $T_{\mu,\delta,\beta}$. Para cada $n \in N$, en virtud de ciertas reglas operacionales para la función J_μ (véase [11]), se tiene:

$$\xi(x)B_\mu^n(\phi_h(x,y) / x) = \xi(x)\frac{(-1)n}{h} \int_y^{y+h}\int_y^u \frac{\partial^2}{\partial\eta}2(\eta^{2n}J_\mu(x\eta))d\eta du$$

$$= \xi(x)\frac{(-1)^n}{hx} \int_y^{y\ h}\int_y^u \{2n+\mu)(2n+\mu+1)\eta^{2n-5/2}x^{1/2}(x\eta)^{1/2}J_\mu(x\eta)$$

$$+ \{(2n+\mu)\eta^{2n-3/2} + (2n+\mu)\eta^{2n+5/2}\}x^{3/2}(x\eta)^{1/2}J_{\mu+1}(x\eta)$$

$$+ \eta^{2n+1/2}x^{5/2}(x\eta)^{1/2}J_{\mu+2}(x\eta)\}d\eta du .$$

De donde, a tenor de la acotación de la función $z^{1/2}J_\mu(z)$, sobre $0 < z < \infty$, se sigue:

$$|\xi(x)B_\mu^n(\phi_h(x,y) / x)| \leqslant M\,\frac{\xi(x)}{h} \int_y^{y\ h}\int_y^u \{(\eta^{2n-5/2}x^{-1/2} + (\eta^{2n-3/2} + \eta^{2n+5/2})x^{1/2}$$

$$+ \eta^{2n+1/2}x^{3/2}\}d\eta du \to 0 ,$$

cuando $h \to 0$, uniformemente en $x \in (0,\infty)$, de acuerdo con la elección de δ y β. Se concluye pues que $<f(x),\phi_h(xy)> \to 0$, cuando $h \to 0$, y por ello

$$\frac{d}{dy}F(y) = <f(x), x\frac{\partial}{\partial y}J_\mu(xy)>, \text{ para cada } y > 0 . \blacktriangle$$

Es de interés la siguiente acotación:

TEOREMA 3. *Existe una constante positiva C y un entero no negativo r de manera que*

$$|F(y)| \leqslant \begin{cases} Cy^{-1/2}, & \text{para } y \in (0,1) \\ Cy^{2r-1/2}, & \text{para } y \geqslant 1 . \end{cases}$$

Demostración. Ateniéndonos a la proposición 5, existe una constante positiva M y un entero no negativo r de manera que:

$$|F(y)| = |\langle f(x), xJ_\mu(xy)\rangle| \leqslant M \max_{0\leqslant m\leqslant r} \sup_{x\in I} |\xi(x) B_\mu^m J_\mu(xy)|$$

$$= M \max_{0\leqslant m\leqslant r} \sup_{x\in I} |\xi(x) y^{2m-1/2} x^{-1/2} (xy)^{1/2} J_\mu(xy)| \leqslant C \max_{0\leqslant m\leqslant r} y^{2m-1/2},$$

de donde se sigue ya el aserto. ▲

Si r es el menor entero para el cual se verifica la acotación indicada en el Teorema 3, coincide con el orden de la función generalizada f.

Si $\mu \geqslant -\frac{1}{2}$,, en virtud de la Proposición 7, podemos garantizar que si $f \in T'_{\mu,\delta,\beta}$, entonces $f \in H'_\mu$.. Por ello tiene sentido definir para f su transformación generalizada como elemento de H'_μ, siguiendo a J.M. Méndez [7], y como elemento de $T'_{\mu,\delta,\beta}$, por (6). Estamos en condiciones de probar que ambas definiciones coinciden sobre H_μ.

TEOREMA 4. *Si* $\mu \geqslant -\frac{1}{2}$, *para cada* $f \in T'_{\mu,\delta,\beta}$, *y* $\psi \in H_\mu$, *se tiene:*

$$\langle\langle f(x), xJ_\mu(xy)\rangle, \psi(y)\rangle = \langle f(x), \mathcal{H}_\mu\{\psi(y)\}(x)\rangle .$$

Demostración. En virtud del teorema 2, la función $F(y) = \langle f(x), xJ_\mu(xy)\rangle$ genera una distribución regular en H'_μ, por medio de:

$$\langle F(y), \psi(y)\rangle = \int_0^\infty F(y)\psi(y)\,dy = \int_0^\infty \langle f(x), xJ_\mu(xy)\rangle \psi(y)\,dy$$

Nuestro propósito es probar que:

$$\int_0^\infty \langle f(x), xJ_\mu(xy)\rangle \psi(y)\,dy = \langle f(x), x\int_0^\infty J_\mu(xy)\psi(y)\,dy\rangle \qquad (7)$$

para cada $\psi \in H_\mu$, igualdad que será establecida empleando técnicas basadas en sumas de Riemann. Sean $0 < a < b$ y $\{y_\nu^{(n)}\}_{\nu=0}^n$, una partición del intervalo $[a,b]$, donde $d_n = y_\nu^{(n)} - y_{\nu-1}^{(n)}$, para cada $n \in N$ y cada $\nu = 1,2,\dots,n$, tal que $d_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Se tiene:

$$\int_a^b <f(x),xJ_\mu(xy)>\psi(y)dy = <f(x),x \lim_{n\to\infty} d_n \sum_{\nu=0}^{n} J_\mu(xy_\nu^{(n)})\psi(y_\nu^{(n)})> .$$

Además:

$$\lim_{n\to\infty} d_n \sum_{\nu=0}^{n} xJ_\mu(xJ_\nu^{(n)})\psi(y_\nu^{(n)}) = x\int_a^b J_\mu(xy)\psi(y)dy, \qquad n\to\infty,$$

en el sentido de la convergencia en $T_{\mu,\delta,\beta}$. Por otra parte, en las condiciones indicadas:

$$x\int_0^\eta J_\mu(xy)\psi(y)dy \to 0, \quad \text{cuando } \eta\to 0^+ \text{ en } T_{\mu,\delta,\beta}.$$

En efecto, para cada $m \in N$, existe una constante $C > 0$ tal que:

$$\tau^m_{\mu,\delta,\beta}(x\int_0^\eta J_\mu(xy)\psi(y)dy) \leqslant C\int_0^\eta y^{2m-1/2}|\psi(y)|dy \to 0, \quad \text{cuando } \eta\to 0^+$$

pues $\psi \in H_\mu$ y $\mu > -\frac{1}{2}$.

De aquí se deduce que:

$$\int_0^b <f(x),xJ_\mu(xy)>\psi(y)dy = <f(x),x\int_0^b J_\mu(xy)\psi(y)dy>$$

Por último, para cada $m \in N$, $y > 0$:

$$\tau^m_{\mu,\delta,\beta}(x\int_y^\infty J_\mu(xy)\psi(y)dy) \leqslant C\int_y^\infty y^{2m}|\psi(y)|dy \to 0, \quad \text{cuando } y\to\infty,$$

donde $C > 0$, pues ψ es de rápido descenso cuando $x \to \infty$. Se concluye así (7) quedando probado el teorema. ▲

Se presenta ahora un teorema de inversión para la transformación generalizada introducida.

TEOREMA 5. *Sea* $f \in T'_{\mu,\delta,\beta}$ *y* $F(y) = (h'_\mu f)(y)$. *Entonces para cada* $\psi \in \mathcal{D}(I)$:

$$\lim_{N\to\infty} <\int_0^N F(y)yJ_\mu(xy)dy,\psi(x)> = <f(x),\psi(x)>, \ si \ \mu \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Demostración. Para cada $N > 0$, la función $H_N(x) = \int_0^N F(y)yJ_\mu(xy)dy$ es localmente integrable en $(0,\infty)$, siempre que $\mu \geqslant -\frac{1}{2}$, a tenor del teorema 2. Por tanto, $H_N(x)$ define una distribución regular en $\mathcal{D}'(I)$, para cada $N > 0$, por:

$$<H_N(x),\psi(x)> = \int_K \psi(x)\int_0^N F(y)yJ_\mu(xy)\,dy\,dx = \int_0^N F(y)y\int_K J_\mu(xy)\psi(x)\,dx$$

$$= \int_0^N F(y)\mathscr{H}_\mu\{\psi(x)\}(y)\,dy = \int_0^N F(y)\phi(y)\,dy$$

siendo $K = \mathrm{sop}\psi$ y $\phi(y) = \mathscr{H}_\mu\{\psi(x)\}(y)$. Se tiene así:

$$<H_N(x),\psi(x)> = \int_0^N <f(x),xJ_\mu(xy)>\phi(y)\,dy .$$

Siguiendo un procedimiento análogo al empleado en el teorema anterior puede probarse que:

$$\int_0^N <f(x),xJ_\mu(xy)>\phi(y)\,dy = <f(x),x\int_0^N J_\mu(xy)\phi(y)\,dy>$$

Consideremos la función:

$$G_N(t,x) = \int_0^N yJ_\mu(ty)J_\mu(xy)\,dy, \quad N \in \mathbb{N}$$

Dados $0 < a < b$, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b G_N(t,x)x\,dx = \begin{cases} 1 , & t \in (a,b) \\ \frac{1}{2} , & t = a \text{ o } t = b \\ 0 , & t \notin [a,b] \end{cases}$$

en virtud del teorema de inversión establecido por G.N. Watson (Teorema 1). Por otra parte, para cada $m \in N$:

$$B_\mu^m\{\int_a^b G_N(t,x)\phi(x)\,dx - \phi(t)\} = \int_a^b xG_N(t,x)\{\phi_m(x) - \phi_m(t)\}\,dx$$

donde $\phi_m(x) = B_\mu^m\{x^{-1}\phi(x)\}$, para cada $m \in N$. Teniendo en cuenta que:

$$G_N(t,x) = \frac{N}{t^2-x^2}\{tJ_{\mu+1}(tN)J_\mu(xN) - xJ_{\mu+1}(xN)J_\mu(tN)\}$$

y aplicando el Lema de Riemann-Lebesgue (véase G.N. Watson [11]), se sigue:

$$\xi(t)\int_a^b xG_N(t,x)\{\psi(x) - \psi(t)\}\,dx \to 0 , \quad \text{cuando } N \to \infty ,$$

uniformemente en $t \in (0,\infty)$, para cada $\psi \in \mathcal{D}(I)$, cuyo soporte está contenido en $[a,b]$. Se tiene así que:

$$t\int_a^b G_N(t,x)\psi(x)\,dx \to \psi(t) , \quad \text{cuando } N \to \infty$$

en el sentido de la convergencia en $T_{\mu,\delta,\beta}$. Por tanto

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle \int_0^N F(y) y J_\mu(xy)dy, \psi(x) \right\rangle = \langle f(x), \psi(x) \rangle$$

para cada $\psi \in \mathcal{D}(I)$. ▲

El siguiente teorema de unicidad se deduce inmediatamente.

TEOREMA 6. *Sean* $F(y) = (h'_\mu f)(y)$ *y* $G(y) = (h'_\mu g)(y)$, *donde* f *y* g *pertenecen a* $T'_{\mu,\delta,\beta}$. *Si* $F(y) = G(y)$, *para cada* $y > 0$, *entonces* $f = g$ *en el sentido de la igualdad en* $\mathcal{D}'(I)$.

§4. Teoremas abelianos para la transformación generalizada h'_μ

. Sea f una distribución regular en el intervalo (a,b). Es decir, existe una función medible $h(t)$ integrable Lebesgue sobre cada intervalo $(c,d) \subset (a,b)$, tal que

$$\langle f, \psi \rangle = \int_a^b h(t)\psi(t)dt$$

para cada función regular $\psi(t)$, cuyo soporte está contenido en (a,b). f es la representación distribucional de la clase ∇ que contiene las funciones definidas sobre (a,b) que coinciden con h salvo a lo sumo en un conjunto de medida nula. Si para alguna $h \in \nabla$, $\lim_{t\to a^+} h(t) = \alpha$, entonces para cada $g \in \nabla$, o $\lim_{t\to a^+} g(t) = \alpha$ o no existe límite de g cuando $t \to a^+$. Se dice que $\lim_{t\to a^+} f(t) = \alpha$, si $\lim_{t\to a^+} h(t) = \alpha$ para algún $h \in \nabla$.

J.L. Griffith [4] probó el siguiente teorema abeliano para la transformación clásica de Hankel.

TEOREMA 7. *Sea* f *una función continua, tal que:*

i) $x^{1/2} f(x) \to 0$, *cuando* $x \to \infty$,

ii) $x^a f(x)$ *es absolutamente continua en* $0 \leq x < \infty$,

iii) $x^{1/2 - a} \frac{d}{dx} x^a f(x))$ *es absolutamente integrable en* $0 < \eta < x < \infty$, *para cada* $\eta > 0$.

Si $\frac{1}{2} < a < 2 + \mu$, *entonces:*

$$u^{2-a}h_\mu\{f(x)\}(u) \to K\,\frac{\Gamma(\frac{\mu}{2}-\frac{a}{2}+1)}{2^{a-1}\Gamma(\frac{\mu}{2}+\frac{a}{2})} \quad \text{cuando } u \to \infty \tag{8}$$

donde $K = \lim_{x\to 0^+} x^a f(x)$.

Otro resultado de similar naturaleza se recoge a continuación.

TEOREMA 8. *Sea* $\frac{3}{2} < a < 2+\mu$ *y* $f(x)$ *una función medible tal que* $x^{1/2}f(x)$ *es integrable Lebesgue en cada intervalo de la forma* $X < x < \infty (X > 0)$. *Supongamos que el límite* $K = \lim_{x\to 0^+} x^a f(x)$ *existe. Entonces se verifica* (8).

Demostración. En virtud del comportamiento de la función J_μ en el origen y en el infinito y a tenor de las condiciones impuestas la transfomación $F(y)$ existe para cada $y > 0$. Por otra parte, dado que:

$$\int_0^\infty x^{1-a}J_\mu(x)\,dx = H(\mu,a) = \frac{\Gamma(\frac{\mu}{2}-\frac{a}{2}+1)}{2^{a-1}\Gamma(\frac{\mu+a}{2})}\ , \quad 1 < a < 2+\mu$$

(Véase Erdelyi [2]), para $0 < X < \infty$, se sigue:

$$|y^{2-a}F(y)-KH(\mu,a)| \leqslant y\int_0^\infty |(xy)^{1-a}J_\mu(xy)|\,|x^a f(x)-K|\,dx$$

$$\leqslant \int_0^\infty |x^{1-a}J_\mu(x)|\,dx \sup_{0<x<X}|x^a f(x)-K| + \int_X^\infty |x^{1/2}f(x)-Kx^{a-1/2}|\,|(xy)^{1/2}J_\mu(xy)|\,dx\,y^{1/2-a}.$$

Por tanto, al ser $z^{1/2}J_\mu(z)$ una función acotada en $0 < z < \infty$, $x^{1/2}f$ integrable en $z \in (0,\infty)$, y $\frac{3}{2} < a < 2+\mu$, se deduce que:

$$\lim_{y\to\infty} y^{2-a}F(y) = KH(\mu,a)\ .$$

Un teorema inicial para la transformación generalizada de Hankel definida en (6) es el que sigue.

TEOREMA 9. *Sea* $f = f_1+f_2$, *donde* f_1 *es una función ordinaria y* $f_2 \in T'_{\mu,\delta,\beta}$. *Si* f_1 *satisface las condiciones del teorema 7, o del teorema 8,* f_2 *es una función generalizada de orden* r *y* $2r+\frac{3}{2} < a < 2+\mu$, *entonces:*

$$\lim_{y\to\infty} y^{2-a}(h'_\mu f)(y) = H(\mu,a)\lim_{x\to 0^+} x^a f_1(x)\ .$$

Demostración. Atendiendo a las definiciones adoptadas se sigue:

$$(h'_\mu f)(y) = \int_0^\infty xJ_\mu(xy) f_1(x)\,dx + <f_2(x), xJ_\mu(xy)> .$$

Dado que:

$$|(h'_\mu f_2)(y)| < y^{2r-1/2}C, \quad \text{para cada } y > 1 ,$$

entonces $\lim y^{2-a}(h'_\mu f_2)(y) = 0$ si $\frac{3}{2} + 2r < a$. Por tanto, una aplicación de los teoremas 1 o 2 nos conduce ya al resultado requerido. ▲

Un último teorema para la transformación clásica de Hankel puede ser enunciado de la forma siguiente:

TEOREMA 10. *Sea* $\frac{3}{2} < a < 2+\mu$ *y* $f(x)$ *una función medible sobre* $0 < x < \infty$ *que satisface:*

i) $x^{\mu+1} f(x)$ *es integrable Lebesgue en cada intervalo* $(0,X)$, *con* $X > 0$,

ii) *Existe un número complejo* α *tal que* $\lim_{x\to\infty} x^a f(x) = \alpha$.

Entonces $\lim_{y\to 0^+} y^{2-a}F(y) = \alpha H(\mu,a)$, *donde* $H(\mu,a)$ *viene dado como en el teorema* 7.

La demostración es similar a la presentada A.H. Zemanian en [12] .

Una extensión del teorema anterior a distribuciones es presentado ahora.

TEOREMA 11. *Sea* $\frac{3}{2} < a < 2+\mu$, $-\frac{1}{2} < \mu < \frac{3}{2}$, *y* f *una función generalizada que se puede descomponer como* $f = f_1 + f_2$, *donde* f_1 *es una función ordinaria que satisface las hipótesis del teorema* 10 *y* $f_2 \subset T'_{\mu,\delta,\beta}$. *Entonces:*

$$\lim_{y\to 0^+} y^{2-a}(h'_\mu f)(y) = H(\mu,a) \lim_{x\to\infty} x^a f_1(x)$$

Demostración. Al ser la función $z^{-\mu}J_\mu(z)$ una función acotada en $0 < z < \infty$ puede inferirse que:

$$|(h'_\mu f)(y)| < Cy^\mu, \quad \text{para } o < y < 1 ,$$

de donde se sigue: $\lim_{y\to 0} y^{2-a}(h'_\mu f_2)(y) = 0$, si $a < 2+\mu$. Nuestra conclusión se deduce en virtud del teorema 10.

NOTA 2. Los resultados recogidos en esta sección suponen una extensión de los probados por A.H. Zemanian [12], pues este autor consideró funciones generalizadas f que puedan representarse por $f = f_1 + f_2$, donde f_1 es una función ordinaria y $f_2 \in E'(I)$. En nuestro caso f_2 es un elemento de $T'_{\mu,\delta,\beta}$, siendo $E'(I) \subset T'_{\mu,\delta,\beta}$.

§5. Aplicaciones.

El siguiente resultado será útil en la aplicación estudiada en este párrafo.

TEOREMA 12. *Si* $f \in T'_{\mu,\delta,\beta}$ *y* P *es un polinomio:*

$$h'_\mu(P(B_\mu)f)(y) = P(-y^2)(h'_\mu f)(y), \quad \textit{para cada } y > 0 .$$

Demostración. Para cada $y > 0$:

$$(h'_\mu(P(B_\mu)f))(y) = \langle P(B_\mu)f(x), xJ_\mu(xy)\rangle = \langle f(x), P(-y^2)xJ_\mu(xy)\rangle$$
$$= P(-y^2)(h'_\mu f)(y) .$$

Consideremos la ecuación:

$$P(B_\mu)u = g, \quad \text{para } \mu \geqslant -\frac{1}{2}, \tag{9}$$

donde $g \in T'_{\mu,\delta,\beta}$ y P es un polinomio sin ceros en el eje real negativo. Nos proponemos buscar una función generalizada $u \in T'_{\mu,\delta,\beta}$ que verifique (9). Una aplicación de la transformación generalizada h'_μ a (9), nos conduce, de acuerdo con el teorema 12, a:

$$P(-y^2)U(y) = G(y)$$

donde $U(y) = (h'_\mu u)(y)$ y $G(y) = (h'_\mu g)(y)$. Por tanto, la solución buscada $u \in T'_{\mu,\delta,\beta}$ deberá verificar:

$$(h'_\mu u)(y) = G(y) / P(-y^2)$$

Una aplicación formal de la fórmula de inversión nos permite escribir:

$$\langle u,\psi\rangle = \lim_{N\to\infty}\left\langle \int_0^N \frac{G(y)}{P(-y^2)}\, yJ_\mu(xy)dy, \psi(x)\right\rangle$$

para cada $\psi \in \mathcal{D}(I)$.

Justificamos a continuación el anterior proceso formal. Como se sabe (véase Teorema 3):

$$|G(y)| \leqslant Cy^{-1/2}, \quad \text{para cada } y \in (0,1) ,$$

donde C es una constante positiva que depende de g. Luego, si $\mu \geqslant -\frac{1}{2}$ y P es un polinomio sin raíces en el semieje real negativo, la función $\frac{G(y)}{P(-y^2)}\, yJ_\mu(xy)$ es integrable en $y \in (0,N)$. Por ello,

$$\int_0^N \frac{G(y)}{P(-y^2)}\, yJ_\mu(xy)\,dy$$

es localmente integrable en $(0,\infty)$ y define un elemento regular en $\mathcal{D}'(I)$. Además, existe un entero no negativo r de manera que:

$$|G(y)| \leqslant Cy^{2r-1/2}, \quad \text{para } y \geqslant 1 .$$

Consideremos ahora el polinomio de grado $r+1$:

$$Q(x) = x^{r+1} - 1, \quad \text{si } r \text{ es par},$$

$$Q(x) = x^{r+1} + 1, \quad \text{si } r \text{ es impar}.$$

Se tiene

$$<\int_0^N \frac{G(y)}{P(-y^2)}\, yJ_\mu(xy)\,dy,\psi(x)> = <Q(B_{\mu,x})\int_0^N \frac{G(y)}{P(-y^2)Q(-y^2)}\, yJ_\mu(xy)\,dy,\psi(x)>$$

$$= <\int_0^N \frac{G(y)}{P(-y^2)Q(-y^2)}\, yJ_\mu(xy)\,dy, Q(xB_{\mu,x}x^{-1})\psi(x)>, \quad \text{para cada } \psi \in \mathcal{D}(I) .$$

Dado que $Q(-y^2)$ no se anula para $y > 0$,

$$\int_0^N \frac{G(y)}{P(-y^2)Q(-y^2)}\, yJ_\mu(xy)\,dy$$

define una distribución regular en $\mathcal{D}'(I)$, para cada $N \in \mathbb{N}$. Además, para cada $\psi \in \mathcal{D}(I)$, $N_1,N_2 \in \mathbb{N}$, con $N_1 < N_2$, se tiene:

$$|<\int_{N_1}^{N_2} \frac{G(y)}{P(-y^2)Q(-y^2)}\, yJ_\mu(xy)\,dy,\psi(x)>| = |\int_K \psi(x)\int_{N_1}^{N_2} \frac{G(y)y}{P(-y^2)Q(-y^2)}\, J_\mu(xy)\,dy\,dx|$$

$$\leqslant M\int_{N_1}^{N_2} \frac{y^{2r}}{|P(-y^2)|\,|1+y^{2(r+1)}|}\,dy ,$$

donde $K=$ sopψ y M es una constante positiva adecuada. Por tanto, para cada $\psi \in \mathcal{D}(I)$, la sucesión:

$$\{<\int_0^N \frac{G(y)}{P(-y^2)}\, yJ_\mu(xy)\,dy, \psi(x)>\}_{N\in\mathbb{N}}$$

es de Cauchy, o lo que es lo mismo:

$$\{\int_0^N \frac{G(y)}{P(-y^2)}\, yJ_\mu(xy)\,dy\}_{N\in\mathbb{N}}$$

es débilmente de Cauchy en $\mathcal{D}'(I)$. Al ser $\mathcal{D}'(I)$ completo, existe $f \in \mathcal{D}'(I)$ tal que:

$$\lim_{N\to\infty} <\int_0^N \frac{G(y)}{P(-y^2)}\, yJ_\mu(xy)\,dy, \psi(x)> = <f(x), \psi(x)>, \quad \text{para cada } \psi \in \mathcal{D}(I).$$

Esta distribución f es la restricción a $\mathcal{D}(I)$ de una cierta $u \in T'_{\mu,\delta,\beta}$. Además, la función generalizada f satisface (9) sobre $\mathcal{D}(I)$. En efecto, para cada $\psi \in \mathcal{D}(I)$:

$$<P(B_\mu)f, \psi> = \lim_{N\to\infty} <\int_0^N \frac{G(y)}{P(-y^2)}\, P(B_{\mu,x})\{yJ_\mu(xy)\}\,dy, \psi(x)>$$

$$= \lim_{N\to\infty} <\int_0^N G(y)\, yJ_\mu(xy)\,dy, \psi(x)> = <g(x), \psi(x)>\ ,$$

en virtud del teorema de inversión.

*

BIBLIOGRAFIA

[1] Dube, L.S. y Pandey, J.N., *On the Hankel transform of distributions*, Tohoku Math. Journal **27**, (1975), 337-354.

[2] Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhenttinger, F. y Tricomi, F., *Higher Transcendental Functions*, Vol.II. Mac Graw-Hill, New York, 1953.

[3] Griffith, J.L., *A theorem concerning the asymptotic behaviour of Hankel transform*, J. Proc. Roy. Soc. New South Wales, **88**, (1955), 61-65.

[4] Griffith, J.L., *On the asymptotic behaviour on Hankel transform*, J. Proc. Roy. Soc. New Wales, **88**, (1955), 71-76.

[5] Koh, E.L. y Zemanian, A.H., *The complex Hankel and I-transformations of generalized functions*, SIAM J. Appl. Math., **16**, (1968), 945-957.

[6] Macaulay-Owen, P., *Parseval's theorem for Hankel transforms*, Proc. London Math. Soc., **45**, (1939), 458-474.

[7] Méndez, J.M., *A mixed Parseval equation and the generalized Hankel transformation*. Proc. Amer. Math. Soc., 102 (1988), 619-624.

[8] Namias, V., *Fractionalization of Hankel transforms*, J. Inst. Maths. Applies, 26,(1980), 187-197.

[9] Schwartz, L., *Théorie des Distributions*, Vols.I y II. Hermann, Paris, 1957 y 1959.

[10] Sneddon, I.N., *The use of integral transforms*, Tata-McGraw-Hill Publishing Company Ltd. (New Delhi), 1979.

[11] Watson, G.N., *The theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1958

[12] Zemanian, A.H., *Some Abelian theorems for the distributional Hankel and K-transformation*, SIAM.J. Appl. Math., **14**,(1966), 1255-1265.

[13] Zemanian, A.H., *Generalized Integral transformations*. Interscience Publishers, New York, 1968.

* *

Departmento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad de La Laguna
La Laguna, Tenerife
Islas Canarias, España.

(Recibido en diciembre de 1987, versión revisada en agosto de 1988)