Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXIII (1989) págs. 47-92

DETERMINACION DE LA MEDIBILIDAD DE ALGUNAS FAMILIAS DE SUBESPACIOS DEL ESPACIO PROYECTIVO P_3 RESPECTO DEL GRUPO PROYECTIVO

por

A.B. GUERRERO G.

§1. Introducción. La Geometría Integral en el espacio proyectivo P_n ha sido estudiada por L.A. Santaló en [6] y [8], por M. Stoka en [9] y [10] y por I. Maniscalco y A. Potolano en [5]. Ellos han determinado la medibilidad de algunas familias de subespacios del espacio proyectivo P_3. En este trabajo se estudia la medibilidad de otras familias del espacio proyectivo P_3, no contempladas en los artículos mencionados.

L.A. Santaló en [6] demuestra dos teoremas importantes sobre la medibilidad de subespacios respecto del grupo proyectivo, ellos son:

TEOREMA 1. *Los subespacios lineales no tienen densidad invariante respecto del grupo proyectivo.*

TEOREMA 2. *Dado un conjunto de m subespacios lineales sin puntos comunes, $S_{h_1}, S_{h_2} \ldots S_{h_m}$, de dimensiones h_1, $h_2, \ldots$, h_m respectivamente, con $h_1+h_2+h_3+\ldots+h_m+m \leqslant n+1$, en el espacio proyectivo P_n, una condición necesaria y suficiente para que la familia $S_{h_1}+S_{h_2}+\ldots+S_{h_m}$ tenga una densidad invariante respecto del grupo proyectivo es que*

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_m + m = n+1 .$$

Por el Teorema 1 los siguientes subespacios del espacio proyectivo P_3 *no* son medibles.

1.1) Conjunto de Puntos (P)

1.2) Conjunto de Planos (E)

1.3) Conjunto de Rectas (G).

Por el Teorema 2 *no* son medibles los siguientes subespacios del espacio proyectivo P_3

1.4) Punto + Recta $(P+G), P \not\in G$

1.5) Punto + Punto (P_1+P_2)

1.6) Punto + Punto + Punto $(P_1+P_2+P_3)$.

Mientras que por el Teorema 2 *son medibles* los siguientes subespacios sin puntos comunes de P_3

2.1) Plano + Punto $(E+P)$

2.2) Recta + Recta (G_1+G_2)

2.3) Punto + Punto + Recta (P_1+P_2+G)

2.4) Punto + Punto + Punto + Punto $(P_1+P_2+P_3+P_4)$.

Mariscalco y Potolano prueban en [5] que los siguientes subespacios que no se pertenecen de P_3 *son medibles*

2.5) Plano + Plano + Recta (E_1+E_2+G)

2.6) Plano + Plano + Recta + Recta $(E_1+E_2+G_1+G_2)$

2.7) Recta + Recta + Recta $(G_1+G_2+G_3)$.

M. Stoka prueba en [10] que las siguientes familias en P_3 *no* admiten medida invariante

1.7 Pares de rectas concurrentes (G_1+G_2) con $G_1 \cap G_2 \neq 0$.

1.8 Triplas de rectas concurrentes $(G_1+G_2+G_3)$ con $G_1 \cap G_2 \cap G_3 \neq 0$.

1.9 Recta más plano $(G+E)$.

Aquí se estudiará la medibilidad de algunos subespacios con y sin puntos comunes respecto del grupo proyectivo, clasificados según el número de parámetros del cual dependen. A continuación resumimos la teoría necesaria para nuestro propósito.

§2. Preliminares. Sea P_3 el espacio proyectivo 3-dimensional de coordenadas homogéneas x_i . El *grupo proyectivo* G_{15} está dado por las ecuaciones:

$$(x_k)' = \sum_{i=0}^{3} a_i^k x_i \quad \text{con } k = 0,1,2,3 \tag{5}$$

con la condición

$$|a_i^k| = 1 . \tag{6}$$

El determinante $|a_i^k|$ lo podemos expresar en la forma $|a_0a_1a_2a_3|$ donde cada a_i, $i = 0,1,2,3$ es un punto analítico de coordenadas $a_i^0, a_i^1, a_i^2, a_i^3$. Esto significa que cada transformación proyectiva de G_{15} está determinada por 4 puntos analíticos a_0, a_1, a_2, a_3 que cumplen $|a_0a_1a_2a_3| = 1$.

Las componentes relativas del grupo proyectivo G_{15} están dadas por las ecuaciones

$$da_i = \sum_{k=0}^{3} \omega_{ik} a_k \quad \text{con } i = 0,1,2,3 \tag{7}$$

(ver Cartan [1]), con la condición $\sum_{i=0}^{3} \omega_{ii} = 0$ obtenida al diferenciar el determinante (6).

Las ecuaciones de estructura del grupo G_{15} se obtienen derivando exteriormente las ecuaciones (7). Resulta:

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=0}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \qquad i,j = 0,1,2,3. \tag{8}$$

Si H es un subespacio del espacio proyectivo P_3, el cual determina el sistema:

$$\omega_{i_1 j_1} = 0,\ \omega_{i_2 j_2} = 0, \ldots, \omega_{i_n j_n} = 0,\ i_k, j_k = 0,\ldots 3, \tag{9}$$

L.A. Santaló prueba en [6] que $\Omega = \omega_{i_1 j_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_n j_n}$ es la densidad de H respecto del grupo proyectivo, si sólo si, $d\Omega = 0$.

Si H tiene densidad invariante decimos que H es *medible*, su medida está dada por $\int_H d\Omega$.

Utilizamos para la determinación de las familias a estudiar los puntos analíticos a_0, a_1, a_2, a_3 antes mencionados.

§3. Familias de Subespacios que no se pertenecen.

3.1. FAMILIAS DEPENDIENTES DE SEIS PARAMETROS.

3.1.1. Plano más plano $E_1 + E_2$.

Tomamos el plano E_1 generado por los puntos a_0, a_1, a_2, y el plano E_2 generado por los puntos a_0, a_2, a_3. Por (7) para que E_1 permanezca fijo se debe tener que $\omega_{03} = 0$, $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$. Por (7) para que E_2 permanezca fijo se debe tener que $\omega_{01} = 0$, $\omega_{21} = 0$, $\omega_{31} = 0$. Luego $\Omega = \omega_{03}\omega_{13}\omega_{23}\omega_{01}\omega_{21}\omega_{31}$ (*) es la densidad de $E_1 + E_2$, si sólo si $d\Omega = 0$.

Por (8)

$$d\Omega = 2(\omega_{00} - \omega_{33} - \omega_{11} + \omega_{22}) \wedge \Omega.$$

Puesto que $\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} = 0$ resulta

$$d\Omega = -4(\omega_{00} + \omega_{33}) \wedge \Omega$$

de donde $d\Omega \neq 0$, y por lo tanto la densidad invariante para el subespacio $E_1 + E_2$ no existe respecto del grupo proyectivo. Es decir, el subespacio $E_1 + E_2$ no tiene medida invariante respecto de ese grupo.

3.2. FAMILIAS DE SUBESPACIOS DEPENDIENTES DE NUEVE PARAMETROS.

3.2.1. $E_1 + E_2 + P$.

Tomando(**)

$$E_1 : a_0 a_1 a_2$$

$$E_2 : a_0 a_2 a_3$$

$$P : a_1 + a_3$$

E_1 permanece fijo si (ver (7))

(*) Aquí hemos suprimido el símbolo del producto exterior ($\wedge$) para facilitar la escritura, entendiendo que se trata de productos de 1-formas. Se continuará en este capítulo con esta notación.

(**) En lo que sigue esta notación significa espacio E_1 generado por los puntos analíticos a_0, a_1, a_2; espacio E_2 generado por los puntos a_0, a_2, a_3; punto P generado por el punto $a_1 + a_3$.

$$\omega_{03} = 0, \omega_{13} = 0, \omega_{23} = 0,$$

E_2 permanece fijo si (por (7))

$$\omega_{01} = 0, \omega_{21} = 0, \omega_{31} = 0,$$

P permanece fijo si (por (7))

$$\omega_{10} + \omega_{30} = 0, \omega_{12} + \omega_{32} = 0, \omega_{33} - \omega_{11} = 0.$$

Llamamos $\Omega_1 = dE_1 = \omega_{03}\omega_{13}\omega_{23}$ y Ω_2 la densidad para $P + E_2$,

$$\Omega_2 = d(E_2+P) = \omega_{01}\omega_{21}\omega_{31}(\omega_{10}+\omega_{30})(\omega_{12}+\omega_{32})(\omega_{33}-\omega_{11})$$

Por ser el espacio $P + E_2$ medible (ver (2.1)) se tiene:

$$d\Omega_2 = 0.$$

Si $\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2 = d(E_1+E_2+P)$ entonces

$$d\Omega = 0, \text{ si sólo si, } d\Omega_1 \wedge \Omega_2 - \Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0,$$

esto es

$$d\Omega = 0, \text{ si sólo si, } d\Omega_1 \wedge \Omega_2 = 0.$$

Veamos, de (8)

$$\begin{aligned} d\Omega &= d(\omega_{03} \wedge \omega_{13} \wedge \omega_{23}) \wedge \Omega_2 \\ &= (\omega_{00} - 3\omega_{33} + \omega_{11} + \omega_{22}) \wedge \Omega_1 \wedge \Omega_2 \\ &= -4\omega_{33} \wedge \Omega_1 \wedge \Omega_2 = -4\omega_{33} \wedge \Omega . \end{aligned}$$

Luego $d\Omega \neq 0$ y por tanto el subespacio $E_1 + E_2 + P$ no tiene medida invariante respecto del grupo proyectivo.

3.2.2. $P_1 + P_2 + E$.

Tomando

$$E : a_0 a_1 a_2$$

$$P_1 : a_3$$

$$P_2 : a_2 + a_3$$

Por (7), E permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0,$$

P_1 permanece fijo si

$$\omega_{30} = 0,\ \omega_{31} = 0,\ \omega_{32} = 0$$

P_2 permanece fijo si

$$\omega_{20} = 0,\ \omega_{21} = 0,\ \omega_{33} - \omega_{22} = 0.$$

Llamando

$$\Omega_1 = d(P_2+E) = \omega_{20}\omega_{21}(\omega_{33}-\omega_{22})\omega_{03}\omega_{13}\omega_{23}$$

y

$$\Omega_2 = dP_1 = \omega_{30}\omega_{31}\omega_{32}$$

entonces si

$$\Omega = d(P_1+P_2+E) = \Omega_2 \wedge \Omega_1\ ,$$

$$d\Omega = 0, \text{ si sólo si}$$

$$d\Omega_2 \wedge \Omega_1 - \Omega_2 \wedge d\Omega_1 = 0.$$

Por (2.1), $d\Omega_1 = 0$. Luego, la densidad $d(P_1+P_2+E)$ existe si sólo si,

$$d\Omega_2 \wedge \Omega_1 = 0.$$

Pero de (8)

$$d\Omega_2 \wedge \Omega_1 = d(\omega_{30}\omega_{31}\omega_{32}) \wedge [(\omega_{20}\omega_{21}\omega_{03}\omega_{13}\omega_{23}(\omega_{33}-\omega_{22}))]$$

$$= -(\omega_{00}+\omega_{11})\omega_{30}\omega_{31}\omega_{32} \wedge \Omega_1 \neq 0.$$

Luego $d(P_1+P_2+E)$ no existe, y el subespacio $P_1 + P_2 + E$ no es medible.

3.2.3. $E_1 + E_2 + E_3$.

Tomando

$$E_1 : a_0 a_1 a_3$$

$$E_2 : a_0 a_2 a_3$$

$$E_3 : a_0 a_1 a_2$$

De (7) el subespacio $E_1 + E_2 + E_3$ permanece fijo si

$$\omega_{02} = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{32} = 0,\ \omega_{01} = 0,\ \omega_{21} = 0,\ \omega_{31} = 0,$$

$$\omega_{03} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0.$$

Llamando $\Omega = \omega_{02}\omega_{12}\omega_{32}\omega_{01}\omega_{21}\omega_{31}\omega_{03}\omega_{13}\omega_{23}$, la densidad invariante para $E_1 + E_2 + E_3$ existe si sólo si $d\Omega = 0$.

Pero de (8)

$$d\Omega = (3\omega_{00}-\omega_{11}-\omega_{22}-\omega_{33}) \wedge \Omega = 4\omega_{00} \wedge \Omega \neq 0.$$

Luego, el subespacio $E_1 + E_2 + E_3$ no es medible respecto del grupo proyectivo.

3.3. FAMILIAS DEPENDIENTES DE DIEZ PARAMETROS.

3.3.1. $P + E + G$.

Tomando

$$E : a_0 a_1 a_2$$

$$G : a_2 a_3$$

$$P : a_0 + a_3$$

De (7), E permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0,$$

G permanece fijo si

$$\omega_{20} = 0,\ \omega_{21} = 0,\ \omega_{30} = 0,\ \omega_{31} = 0,$$

P permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} + \omega_{32} = 0,\ \omega_{33} - \omega_{00} = 0.$$

Llamando $\Omega_2 = dG = \omega_{20}\omega_{21}\omega_{30}\omega_{31}$ y

$$\Omega_1 = d(P+E) = \omega_{01}(\omega_{02}+\omega_{32})(\omega_{33}-\omega_{00})\omega_{03}\omega_{13}\omega_{23}$$

por (2.1), $d\Omega_1 = 0$ y puesto que

$$\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2 = d(P+E+G)$$

la densidad $d(P+E+G)$ existe si sólo si $\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0$.

Pero

$$\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = \Omega_1 \wedge [-2\omega_{11}\omega_{20}\omega_{21}\omega_{30}\omega_{31}+2\omega_{22}\omega_{20}\omega_{21}\omega_{30}\omega_{31}]$$

$$= -2\Omega_1 \wedge (\omega_{11}-\omega_{22}) \wedge \Omega_2 \neq 0.$$

Luego la densidad $d(P+E+G)$ no existe.

3.4. FAMILIAS DEPENDIENTES DE ONCE PARAMETROS.

3.4.1. $G_1 + G_2 + P$.

Tomando

$$G_1 : a_0 a_3$$

$$G_2 : a_1 a_2$$

$$P : a_1 + a_3$$

De (7), G_1 permanece fija si

$$\omega_{01} = 0, \ \omega_{02} = 0, \ \omega_{31} = 0, \ \omega_{32} = 0,$$

G_2 permanece fija si

$$\omega_{10} = 0, \ \omega_{13} = 0, \ \omega_{20} = 0, \ \omega_{23} = 0,$$

P permanece fijo si

$$\omega_{30} = 0, \ \omega_{12} = 0, \ \omega_{33} - \omega_{11} = 0.$$

Llamando

$$\Omega_1 = d(G_1+G_2) = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{31}\omega_{32}\omega_{10}\omega_{13}\omega_{20}\omega_{23},$$

por (2.2), $d\Omega_1 = 0$ ($G_1 + G_2$ admite una medida invariante) llamando, $\Omega_2 = dP = \omega_{30}\omega_{12}(\omega_{33}-\omega_{11})$ resulta

$$\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2 = d(G_1+G_2+P),$$

luego la densidad $d(G_1+G_2+P)$ existe, si sólo si,

$$\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0.$$

Pero

$$\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = \Omega_1 \wedge [2\omega_{11}\omega_{33} - (\omega_{00}+\omega_{22})(\omega_{33}-\omega_{11})]\omega_{30}\omega_{12}$$

$$= \Omega_1 \wedge (2\omega_{11}\omega_{33}) + (\omega_{00}+\omega_{22}) \wedge \Omega \neq 0.$$

Por tanto la densidad para $G_1 + G_2 + P$ no existe.

3.4.2. $G_1 + G_2 + E$.

Tomando

$$G_1 : a_0a_3$$

$$G_2 : a_2 + a_3a_1 + a_3$$

$$E : a_0a_1a_2.$$

De (7) G_1 permanece fija si

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{31} = 0,\ \omega_{32} = 0,$$

G_2 permanece fija si

$$\omega_{10} + \omega_{30} = 0,\ \omega_{33} - \omega_{11} - \omega_{12} = 0,\ \omega_{20} + \omega_{30} = 0,\ \omega_{33} - \omega_{21} - \omega_{22} = 0,$$

E permanece fija si

$$\omega_{03} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0.$$

Llamando

$$\Omega_1 = d(G_1+G_2)$$

$$= \omega_{01}\omega_{02}\omega_{31}\omega_{32}(\omega_{10}+\omega_{30})(\omega_{33}-\omega_{11}-\omega_{12})(\omega_{20}+\omega_{30})(\omega_{33}-{}_{21}-\omega_{22})$$

y $\Omega_2 = dE = \omega_{03}\omega_{13}\omega_{23}$, entonces $\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2 = d(G_1+G_2+E)$ es una densidad, si sólo si

$$d\Omega = d\Omega_1 \wedge \Omega_2 - \Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0.$$

Por (2.2), $d\Omega_1 = 0$, luego Ω es una densidad si sólo si

$$\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0.$$

Pero

$$\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = \Omega_1 \wedge (-3\omega_{33}+\omega_{00}+\omega_{11}+\omega_{22})\omega_{03}\omega_{13}\omega_{23}$$

$$= 2\Omega_1 \wedge \omega_{33} \wedge \Omega_2 = 2\omega_{33} \wedge \Omega \neq 0.$$

Luego, la densidad $d(G_1+G_2+E)$ no existe.

3.5. FAMILIAS DE SUBESPACIOS DEPENDIENTES DE DOCE PARAMETROS.

3.5.1. $E_1 + E_2 + E_3 + E_4$.

Tomando

$$E_1 : a_0 a_1 a_2$$

$$E_2 : a_1 a_2 a_3$$

$$E_3 : a_0 a_2 a_3$$

$$E_4 : a_0 a_1 a_3$$

De (7), E_1 permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0, \ \omega_{13} = 0, \ \omega_{23} = 0,$$

E_2 permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0, \ \omega_{20} = 0, \ \omega_{30} = 0,$$

E_3 permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0, \ \omega_{21} = 0, \ \omega_{31} = 0,$$

E_4 permanece fijo si

$$\omega_{02} = 0, \ \omega_{12} = 0, \ \omega_{32} = 0.$$

Entonces

$$\Omega = \omega_{03}\omega_{13}\omega_{23}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{30}\omega_{01}\omega_{21}\omega_{31}\omega_{02}\omega_{12}\omega_{32}$$

es la densidad de $E_1 + E_2 + E_3 + E_4$ si sólo si $d\Omega = 0$.

Veamos, de (8)

$$d\Omega = 0$$

luego la densidad $d(E_1+E_2+E_3+E_4)$ existe, está dada por

$$\Omega = \omega_{03}\omega_{13}\omega_{23}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{30}\omega_{01}\omega_{21}\omega_{31}\omega_{02}\omega_{12}\omega_{32}.$$

El espacio dual $P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ también tiene densidad invariante respecto del grupo proyectivo (ver [4]).

3.5.2. $E_1 + E_2 + E_3 + P$.

Tomando

$$E_1 : a_0 a_1 a_2$$

$$E_2 : a_0 a_1 a_3$$

$$E_3 : a_0 a_2 a_3$$

$$P : a_1 + a_2 + a_3$$

De (7), E_1 permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0,$$

E_2 permanece fijo si

$$\omega_{02} = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{32} = 0,$$

E_3 permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{21} = 0,\ \omega_{31} = 0,$$

P permanece fijo si

$$\omega_{10} + \omega_{20} + \omega_{30} = 0,\ \omega_{22} - \omega_{11} = 0,\ \omega_{33} - \omega_{11} = 0.$$

Luego

$$\Omega = \omega_{03}\omega_{13}\omega_{23}\omega_{02}\omega_{12}\omega_{32}\omega_{01}\omega_{21}\omega_{31}(\omega_{10}+\omega_{20}+\omega_{30})(\omega_{22}-\omega_{11})(\omega_{33}-\omega_{11})$$

es la densidad de $P + E_1 + E_2 + E_3$ si sólo si $d\Omega = 0$.

Llamando

$$\Omega_1 = d(P+E_1) = \omega_{03}\omega_{13}\omega_{23}(\omega_{10}+\omega_{20}+\omega_{30})(\omega_{22}-\omega_{11})(\omega_{33}-\omega_{11})$$

y

$$\Omega_2 = \omega_{02}\omega_{12}\omega_{32}\omega_{01}\omega_{21}\omega_{31}$$

por (2.1), $d\Omega_1 = 0$, y si $\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2$

$$d\Omega = d\Omega_1 \wedge \Omega_2 - \Omega_1 \wedge d\Omega_2 = -\Omega_1 \wedge d\Omega_2.$$

Luego, $d\Omega = 0$ si sólo si $\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0$. Pero de (8) $\Omega_1 \quad d\Omega_2 = 2\Omega \wedge (\omega_{00}+\omega_{33}) \neq 0$, por tanto la densidad $d(P+E_1+E_2+E_3)$ no existe.

3.5.3. $P_1 + P_2 + P_3 + E$.

Tomando

$$E : a_0 a_1 a_2$$

$$P_1 : a_3$$

$$P_2 : a_0 + a_3$$

$$P_3 : a_1 + a_3$$

Por (7), E permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0,$$

P_1 permanece fijo si

$$\omega_{30} = 0,\ \omega_{31} = 0,\ \omega_{32} = 0,$$

P_2 permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{33} - \omega_{00} = 0,$$

P_3 permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{33} - \omega_{11} = 0.$$

Luego, $E + P_1 + P_2 + P_3$ permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0,\ \omega_{30} = 0,\ \omega_{31} = 0$$

$$\omega_{32} = 0,\ \omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{33} - \omega_{00} = 0,\ \omega_{10} = 0$$

$$\omega_{12} = 0,\ \omega_{33} - \omega_{11} = 0.$$

Llamando

$$\Omega_1 = d(P_3+E) = \omega_{10}\omega_{12}(\omega_{33}-\omega_{11})\omega_{03}\omega_{13}\omega_{23}$$

y

$$\Omega_2 = \omega_{30}\omega_{31}\omega_{01}\omega_{02}(\omega_{33}-\omega_{00})\omega_{32} = d(P_1+P_2)$$

$$\Omega = d(P_1+P_2+P_3+E) = \Omega_2 \wedge \Omega_1.$$

Puesto que por (2.1) $d\Omega_1 = 0$, entonces $\Omega = \Omega_2 \wedge \Omega_1$ es una densidad si sólo si

$$d\Omega_2 \wedge \Omega_1 = 0.$$

De (8)

$$d\Omega_2 \wedge \Omega_1 = [2(\omega_{33}-\omega_{11}) + (\omega_{33}-\omega_{00}) + 2(\omega_{00}-\omega_{22})] \wedge \Omega_2 \wedge \Omega_1$$

$$= 2(\omega_{00}-\omega_{22}) \wedge \Omega \neq 0.$$

Luego, $P_1 + P_2 + P_3 + G$ no tiene densidad invariante.

3.6. FAMILIA DE SUBESPACIOS DEPENDIENTES DE TRECE PARAMETROS.

3.6.1. $P_1 + P_2 + P_3 + G$.

Tomando

$$P_1 : a_0$$

$$P_2 : a_1$$

$$P_3 : a_0 + a_1 + a_2$$

$$G : a_2 a_3$$

De (7), P_1 permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0, \; \omega_{02} = 0, \; \omega_{03} = 0,$$

P_2 permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0, \; \omega_{12} = 0, \; \omega_{13} = 0,$$

P_3 permanece fijo si

$$\omega_{23} = 0, \; (\omega_{11}-\omega_{00}) = 0, \; (\omega_{22}-\omega_{00}) = 0,$$

G permanece fija si

$$\omega_{20} = 0, \; \omega_{21} = 0, \; \omega_{30} = 0, \; \omega_{31} = 0.$$

Llamando

$$\Omega_1 = dP_1 = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}$$

$$\Omega_2 = d(P_2+P_3+G) = \omega_{10}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{23}(\omega_{11}-\omega_{00})(\omega_{22}-\omega_{00})\omega_{20}\omega_{21}\omega_{30}\omega_{31}$$

$$\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2 = d(P_1+P_2+P_3+G).$$

Por (2.3) $d\Omega_2 = 0$, luego Ω es una densidad si sólo si

$$d\Omega_1 \wedge \Omega_2 = 0.$$

De (8)

$$d\Omega_1 \wedge \Omega_2 = |-(\omega_{11}-\omega_{00}) - (\omega_{22}-\omega_{00}) - (\omega_{33}-\omega_{00})|$$

$$\omega_{01}\omega_{02}\omega_{03} \wedge \Omega_2$$

$$= (\omega_{33}-\omega_{00}) \wedge \Omega \neq 0$$

y $P_1 + P_2 + P_3 + G$ no tiene densidad invariante.

3.6.2. $E_1 + E_2 + E_3 + G$.

Tomando

$$E_1 : a_0a_1a_2$$

$$E_2 : a_0a_1a_3$$

$$E_3 : a_1a_2a_3$$

$$G : a_0 + a_3,\ a_2 + a_3.$$

De (7), E_1 permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0,$$

E_2 permanece fijo si

$$\omega_{02} = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{32} = 0,$$

E_3 permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0,\ \omega_{20} = 0,\ \omega_{30} = 0,$$

G permanece fijo si

$$\omega_{01} + \omega_{31} = 0,\ \omega_{33} - \omega_{22} = 0,\ \omega_{21} + \omega_{31} = 0,\ \omega_{33} - \omega_{00} = 0.$$

Llamando

$$\Omega_1 = dE_1 = \omega_{03}\omega_{13}\omega_{23}$$

$$\Omega_2 = d(E_2+E_3+G)$$

$$= \omega_{02}\omega_{12}\omega_{32}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{30}(\omega_{01}+\omega_{31})(\omega_{33}-\omega_{22})(\omega_{21}+\omega_{31})(\omega_{33}-\omega_{00})$$

por (2.5), $d\Omega_2 = 0$ y $\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2 = d(E_1+E_2+E_3+G)$ es una densidad si sólo si

$$d\Omega_1 \wedge \Omega_2 = 0.$$

De (8)

$$d\Omega_1 \wedge \Omega_2 = |\omega_{00} - 3\omega_{33} + \omega_{11} + \omega_{22}| \wedge \Omega_1 \wedge \Omega_2 = -4\omega_{33} \wedge \Omega \neq 0.$$

Luego, la densidad $d(E_1+E_2+E_3+G)$ no existe.

3.6.3. $P_1 + P_2 + G + E$.

Tomando

$$P_1 : a_0 + a_3$$

$$P_2 : a_2 + a_3$$

$$G : a_1 a_3$$

$$E : a_0 a_1 a_2$$

De (7), P_1 permanece fijo si

$$\omega_{02} = 0, \ (\omega_{01}+\omega_{31}) = 0, \ (\omega_{33}-\omega_{00}) = 0,$$

P_2 permanece fijo si

$$\omega_{20} = 0, \ (\omega_{21}+\omega_{31}) = 0, \ (\omega_{33}-\omega_{22}) = 0,$$

G permanece fija si

$$\omega_{10} = 0, \ \omega_{12} = 0, \ \omega_{30} = 0, \ \omega_{32} = 0,$$

E permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0, \ \omega_{13} = 0, \ \omega_{23} = 0.$$

Llamando

$$\Omega_2 = d(P_1+P_2+G) = \omega_{02}(\omega_{01}+\omega_{31})(\omega_{33}-\omega_{00})\omega_{20}(\omega_{21}+\omega_{31})(\omega_{33}-\omega_{22})$$

$$\Omega_1 = d(E) = \omega_{03}\omega_{13}\omega_{23}$$

por (2.3), $d\Omega_2 = 0$ y por tanto

$$\Omega = \Omega_2 \wedge \Omega_1 = d(P_1+P_2+G+E)$$

es una densidad si sólo si

$$\Omega_2 \wedge d\Omega_1 = 0.$$

Comparando con el caso anterior

$$\Omega_2 \wedge d\Omega_1 \neq 0$$

y por tanto la densidad invariante para $P_1 + P_2 + G + E$ no existe.

3.6.4. $E_1 + E_2 + G + P$.

Llamando

$$E_1 : a_0 a_1 a_2$$

$$E_2 : a_0 a_2 a_3$$

$$G : a_1 a_3$$

$$P : a_1 + a_2 + a_3$$

De (7), E_1 permanese fijo si

$$\omega_{03} = 0, \ \omega_{13} = 0, \ \omega_{23} = 0,$$

E_2 permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0, \ \omega_{21} = 0, \ \omega_{31} = 0,$$

G permanece fija si

$$\omega_{10} = 0, \ \omega_{12} = 0, \ \omega_{30} = 0, \ \omega_{32} = 0,$$

P permanece fijo si

$$(\omega_{22}-\omega_{11}) = 0, \ (\omega_{33}-\omega_{11}) = 0, \ \omega_{20} = 0.$$

Llamando

$$\Omega_1 = d(E_1+E_2+G) = \omega_{03}\omega_{13}\omega_{23}\omega_{10}\omega_{21}\omega_{31}\omega_{10}\omega_{12}\omega_{30}\omega_{32}$$

$$\Omega_2 = d(P) = (\omega_{22}-\omega_{11})(\omega_{33}-\omega_{11})\omega_{20} ,$$

por (2.6), $d\Omega_1 = 0$, por tanto $\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2 = d(E_1+E_2+G+P)$ es una densidad si sólo si

$$\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0.$$

Veamos:

$$\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = \Omega_1 \wedge |(\omega_{22}-\omega_{11})(\omega_{33}-\omega_{11})(\omega_{22}-\omega_{00})\omega_{20} = - \Omega \wedge (\omega_{22}-\omega_{00}) \neq 0.$$

Luego, la densidad invariante para $E_1 + E_2 + G + P$ no existe.

3.7. FAMILIAS DE SUBESPACIOS DEPENDIENTES DE CATORCE PARAMETROS.

3.7.1. $P_1 + P_2 + G_1 + G_2$.

Tomando

$$P_1 : a_0 + a_3$$

$$P_2 : a_1 + a_2$$

$$G_1 : a_0 a_1$$

$$G_2 : a_2 a_3$$

De (7), P_1 permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{32} = 0,\ (\omega_{33}-\omega_{00}) = 0,$$

P_2 permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0,\ \omega_{23} = 0,\ (\omega_{22}-\omega_{11}) = 0,$$

G_1 permanece fijo si

$$\omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{13} = 0,$$

G_2 permanece fijo si

$$\omega_{20} = 0,\ \omega_{21} = 0,\ \omega_{30} = 0,\ \omega_{31} = 0.$$

Llamando

$$\Omega_1 = d(P_1+P_2+G_1) = \omega_{01}\omega_{32}(\omega_{33}-\omega_{00})\omega_{10}\omega_{23}(\omega_{22}-\omega_{11})\omega_{02}\omega_{03}\omega_{12}\omega_{13}$$

$$\Omega_2 = dG_2 = \omega_{20}\omega_{21}\omega_{30}\omega_{31}$$

por (2.3), $d\Omega_1 = 0$, por tanto $\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2 = d(P_1+P_2+G_1+G_2)$ es una densidad, si sólo si

$$\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0.$$

Veamos, de (8)

$$\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = \Omega_1 \wedge |-2\omega_{00} + 2\omega_{33} - 2\omega_{11} + 2\omega_{22}| \wedge \Omega_2$$

$$= 2\Omega_1 \wedge |(\omega_{22}-\omega_{11}) + (\omega_{33}-\omega_{00})| \wedge \Omega_2 = 0.$$

Con lo cual la densidad invariante para $P_1 + P_2 + G_1 + G_2$ existe y está dada por

$$\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2$$

$$\Omega = \omega_{01}\omega_{32}(\omega_{33}-\omega_{00})\omega_{10}\omega_{23}(\omega_{22}-\omega_{11})\omega_{02}\omega_{03}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{20}\omega_{21}\omega_{30}\omega_{31} .$$

3.7.2. $P + E + G_1 + G_2$

Llamando

$$\Omega_1 = d(P+E)$$

$$\Omega_2 = d(G_1+G_2)$$

de (2.1), $d\Omega_1 = 0$; de (2.2), $d\Omega_2 = 0$;
por tanto $\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2 = d(P+E+G_1+G_2)$ es una densidad invariante ya que

$$d\Omega = 0.$$

Así, $P + E + G_1 + G_2$ es medible bajo el grupo proyectivo G_{15}.

§4. Conclusión. Como resultado del estudio anterior podemos enunciar los siguientes teoremas.

TEOREMA 1. *En el espacio proyectivo P_3 las siguientes familias de subespacios que no se pertenecen no admiten una medida invariante respecto del grupo proyectivo G_{15}.*

$E_1 + E_2$

$E_1 + E_2 + P$

$P_1 + P_2 + E$

$E_1 + E_2 + E_3$

$P + E + G$

$G_1 + G_2 + P$

$G_1 + G_2 + E.$

$P + E_1 + E_2 + E_3$

$P_1 + P_2 + P_3 + E$

$P_1 + P_2 + P_3 + G$

$E_1 + E_2 + E_3 + G$

$P_1 + P_2 + G + E$

$E_1 + E_2 + G + P$

TEOREMA 2. *En el espacio proyectivo P_3 las siguientes familias de subespacios, que no se pertenecen, tienen densidad invariante respecto del grupo proyectivo G_{15}.*

$E_1 + E_2 + E_3 + E_4$

$P_1 + P_2 + G_1 + G_2$

$P + E + G_1 + G_2.$

§5. Familias de Subespacios con alguna relación de pertenencia.

Los resultados de esta sección se basan en el siguiente teorema de Luccioni (Teorema 2 en [4]), al cual nos referiremos en adelante simplemente como "Luccioni":

TEOREMA (Luccioni). *Sea H un elemento geométrico del espacio proyectivo P_3 tal que el subgrupo que deja fijo a H define el sistema Ω:*

$$\Omega \quad \omega_{i_1j_1} = 0, \quad \omega_{i_2j_2} = 0, \ldots, \omega_{i_sj_s} = 0,$$

entonces H admite una medida invariante, si y sólo si, siempre que ω_{ij} esté en Ω también ω_{ji} está.

5.1. FAMILIAS DEPENDIENTES DE CINCO PARAMETROS.

5.1.1. $E + P$, con $P \in E$.

Tomamos

$$E : a_0 a_1 a_3$$

$$P : a_0$$

De (7), E permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0, \quad \omega_{13} = 0, \quad \omega_{23} = 0;$$

P permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0, \quad \omega_{02} = 0, \quad \omega_{03} = 0.$$

Luego $P + E$ permanece fijo si:

$$\omega_{03} = 0, \ \omega_{13} = 0, \ \omega_{23} = 0, \ \omega_{01} = 0, \ \omega_{02} = 0$$

y $\Omega = \omega_{03}\omega_{13}\omega_{23}\omega_{01}\omega_{02}$. Por Luccioni, $d\Omega \neq 0$, y $E + P$ no admite medida invariante.

5.1.2. $P + G$ con $P \in G$.

Tomamos

$$G : a_2 a_3$$

$$P : a_3$$

Por (7) G permanece fijo si:

$$\omega_{20} = 0, \quad \omega_{21} = 0, \quad \omega_{30} = 0, \quad \omega_{31} = 0$$

P permanece fijo si:

$$\omega_{30} = 0, \quad \omega_{31} = 0, \quad \omega_{32} = 0.$$

Luego $G + P$ permanece fijo si:

$$\omega_{20} = 0, \quad \omega_{21} = 0, \quad \omega_{30} = 0, \ \omega_{31} = 0, \ \omega_{32} = 0$$

y $\Omega = \omega_{20}\omega_{21}\omega_{30}\omega_{31}\omega_{32}$. Por Luccioni, $d\Omega \neq 0$ y $P + G$ no es medible.

5.1.3. $G + E$ con $G \subset E$.

Tomamos

$$G : a_0 a_1$$

$$E : a_0 a_1 a_2$$

G permanece fija si:

$$\omega_{02} = 0, \quad \omega_{03} = 0, \ \omega_{12} = 0, \ \omega_{13} = 0$$

E permanece fija si:

$$\omega_{03} = 0, \quad \omega_{13} = 0, \quad \omega_{23} = 0.$$

Luego, $G + E$ permanece fijo si:

$$\omega_{02} = 0, \quad \omega_{03} = 0, \quad \omega_{12} = 0, \quad \omega_{13} = 0, \quad \omega_{23} = 0$$

$\Omega = \omega_{02}\omega_{03}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{23}$ es la densidad para $G + E$ si y sólo si $d\Omega = 0$. Pero

$$d\Omega \neq 0 \text{ por } (8),$$

también por Luccioni, $E + G$ no admite una medida invariante.

5.2. FAMILIAS QUE DEPENDEN DE SEIS PARAMETROS.

5.2.1. $P + G + E$, $P \subset G$ y $G \subset E$

Tomamos para

$$P : a_0$$

$$G : a_0 a_1$$

$$E : a_0 a_1 a_2$$

Así definidos estos subespacios se tiene según (7):

P permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0, \ \omega_{02} = 0, \ \omega_{03} = 0,$$

G permanece fijo si

$$\omega_{02} = 0, \ \omega_{03} = 0, \ \omega_{12} = 0, \ \omega_{13} = 0,$$

E permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0, \ \omega_{13} = 0, \ \omega_{23} = 0,$$

Luego $P + G + E$ permanece fijo si:

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0$$

si $\Omega = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{23}$, por Luccioni $P + G + E$ no admite una medida invariante.

5.3. FAMILIAS QUE DEPENDEN DE SIETE PARAMETROS.

5.3.1. $P_1 + P_2 + E$ con $P_1 \in E$, $P_2 \in E$.

Tomamos

$$P_1 : a_0,\ P_2 : a_1,\ E : a_0 a_1 a_2$$

De (7), P_1 permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,$$

P_2 permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{13} = 0,$$

E permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0.$$

Luego $P_1 + P_2 + E$ permanece fijo si:

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,\ \omega_{10} = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0$$

$$\Omega = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{10}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{23}.$$

Por Luccioni $d\Omega \neq 0$, y $P_1 + P_2 + E$ no admite densidad invariante.

5.4. FAMILIAS DE SUBESPACIOS DE OCHO PARAMETROS.

5.4.1. $P + G + E$ con $P \in G$ y $G \not\subset E$

Tomamos

$$P : a_0$$

$$G : a_0 a_1$$

$$E : a_1 a_2 a_3$$

De (7), P permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,$$

G permanece fija si

$$\omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{13} = 0,$$

E permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0,\ \omega_{20} = 0,\ \omega_{30} = 0.$$

Así, $P + G + E$ permanece fijo si:

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{13} = 0,$$

$$\omega_{10} = 0,\ \omega_{20} = 0,\ \omega_{30} = 0.$$

$$\Omega = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{30}.$$

Por Luccioni $P + E + G$ no tiene densidad invariante.

5.4.2. $P + G + E$ con $G \subset E$, $P \notin E$.

Tomamos

$$P : a_0$$

$$G : a_1 a_2$$

$$E : a_1 a_2 a_3$$

De (7), P permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,$$

G permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{20} = 0,\ \omega_{23} = 0,$$

E permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0,\ \omega_{20} = 0,\ \omega_{30} = 0.$$

Luego $P + G + E$ con $G \subset E$ permanece fijo si:

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,\ \omega_{10} = 0,\ \omega_{13} = 0,$$

$$\omega_{20} = 0,\ \omega_{23} = 0,\ \omega_{30} = 0.$$

Por tanto:

$$\Omega = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{30}\omega_{13}\omega_{23}.$$

Por Luccioni $P + G + E$ con $G \subset E$ no tiene densidad invariante.

5.4.3. $P + E_1 + E_2$ con $P \in E_1$, $P \notin E_2$.

Tomamos

$$P : a_0$$

$$E_1 : a_0 a_1 a_2$$

$$E_2 : a_1 a_2 a_3$$

De (7), P permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0, \ \omega_{02} = 0, \ \omega_{03} = 0,$$

E_1 permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0, \ \omega_{13} = 0, \ \omega_{23} = 0,$$

E_2 permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0, \ \omega_{20} = 0, \ \omega_{30} = 0.$$

Luego, $P + E_1 + E_2$ permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0, \ \omega_{02} = 0, \ \omega_{03} = 0, \ \omega_{13} = 0, \ \omega_{23} = 0,$$

$$\omega_{10} = 0, \ \omega_{20} = 0, \ \omega_{30} = 0,$$

y

$$\Omega = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{30}\omega_{13}\omega_{23}.$$

Por Luccioni $P + E_1 + E_2$ no tiene densidad invariante.

5.4.4. $P_1 + P_2 + E$ con $P_2 \in E$, $P_1 \notin E$.

Tomando

$$P_1 : a_0, \ P_2 : a_1, \ E : a_1 a_2 a_3$$

$P_1 + P_2 + E$ permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,\ \omega_{10} = 0,\ \omega_{12} = 0,$$

$$\omega_{13} = 0,\ \omega_{20} = 0,\ \omega_{30} = 0.$$

Por Luccioni $P_1 + P_2 + E$ no tiene densidad invariante.

5.4.5. $G + E_1 + E_2$, $G \subset E_1$.

Tomamos

$$G : a_0a_1,\ E_1 : a_0a_1a_2,\ E_2 : a_1a_2a_3 \text{ con } G \subset E_1,\ G \not\subset E_2.$$

G permanece fija si

$$\omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{13} = 0,$$

E_1 permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0,$$

E_2 permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0,\ \omega_{20} = 0,\ \omega_{30} = 0.$$

Luego $G + E_1 + E_2$ permanece fijo si

$$\omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0,$$

$$\omega_{10} = 0,\ \omega_{20} = 0,\ \omega_{30} = 0$$

y

$$\Omega = \omega_{02}\omega_{03}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{23}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{30}.$$

Pero por Luccioni $G + E_1 + E_2$ no tiene densidad invariante.

5.4.6. $P_1 + P_2 + G$ con $P_2 \in G$, $P_1 \notin G$.

Tomamos

$$P_1 : a_0;\ P_2 : a_1;\ G : a_1a_2$$

P_1 permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,$$

P_2 permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0, \ \omega_{12} = 0, \ \omega_{13} = 0,$$

E permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0, \ \omega_{13} = 0, \ \omega_{20} = 0, \ \omega_{23} = 0.$$

$P_1 + P_2 + G$ permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0, \ \omega_{02} = 0, \ \omega_{03} = 0, \ \omega_{10} = 0, \ \omega_{12} = 0,$$

$$\omega_{13} = 0, \ \omega_{20} = 0, \ \omega_{23} = 0.$$

Luego:

$$\Omega = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{10}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{20}\omega_{23}.$$

Por Luccioni $P_1 + P_2 + G$ no tiene densidad invariante.

5.5. FAMILIAS QUE DEPENDEN DE NUEVE PARAMETROS.

5.5.1. $G_1 + G_2 + E$ con $G_2 \subset E$.

Tomamos

$$G_1 : a_0a_1; \ G_2 : a_2a_3; \ E : a_1a_2a_3,$$

G_1 permanece fija si

$$\omega_{02} = 0, \ \omega_{03} = 0, \ \omega_{12} = 0, \ \omega_{13} = 0,$$

G_2 permanece fija si

$$\omega_{20} = 0, \ \omega_{21} = 0, \ \omega_{30} = 0, \ \omega_{31} = 0,$$

E permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0, \ \omega_{20} = 0, \ \omega_{30} = 0.$$

$$\Omega = \omega_{02}\omega_{03}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{20}\omega_{21}\omega_{30}\omega_{31}\omega_{10}.$$

Por Luccioni $G_1 + G_2 + E$ no tiene densidad invariante.

5.5.2. $P + E + G$ con $P \in E$.

Tomamos

$$P : a_1; \ E : a_0a_1a_2; \ G : a_0a_3,$$

P permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0, \omega_{12} = 0, \omega_{13} = 0,$$

E permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0, \omega_{13} = 0, \omega_{23} = 0,$$

G permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0, \omega_{02} = 0, \omega_{31} = 0, \omega_{32} = 0,$$

$\Omega = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{23}\omega_{10}\omega_{31}\omega_{32}$ es la densidad invariante para $P + E + G$, si sólo si, $d\Omega = 0$.

Por Luccioni P E G no tiene medida invariante.

5.5.3. $P_1 + P_2 + G + E$, $P_2 \in G$, $G \subset E$.

Tomamos

$$P_1 : a_0;\ P_2 : a_1;\ G : a_1a_2;\ E : a_1a_2a_3.$$

P_1 permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0, \omega_{02} = 0, \omega_{03} = 0,$$

P_2 permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0, \omega_{12} = 0, \omega_{13} = 0,$$

G permanece fija si

$$\omega_{10} = 0, \omega_{13} = 0, \omega_{20} = 0, \omega_{23} = 0.$$

E permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0, \omega_{20} = 0, \omega_{30} = 0 .$$

$$\Omega = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{30}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{23}.$$

Por Luccioni $\Omega \neq 0$, luego la densidad de $P_1 + P_2 + G + E$ no existe.

5.5.4. $P_1 + G_1 + P_2 + G_2$ con $P_1 \in G_1$, $P_2 \in G_2$, $G_1 \cap G_2 \neq 0$.

Tomamos

$$P_1 : a_0;\ P_2 : a_2$$

$$G_1 : a_0a_1;\ G_2 : a_1a_2$$

$P_1 + G_1 + P_2 + G_2$ permanece fijo si:

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,\ \omega_{10} = 0,\ \omega_{12} = 0,$$

$$\omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0,\ \omega_{21} = 0,\ \omega_{20} = 0.$$

Por Luccioni $P_1 + G_1 + P_2 + G_2$ no tiene medida invariante respecto a G_{15}.

5.5.5. $P + G_1 + G_2$ con $P \in G_1$, $G_1 \cap G_2 = 0$.

Tomamos

$$P : a_0$$

$$G_1 : a_0 a_1$$

$$G_2 : a_2 a_3$$

$P + G_1 + G_2$ permanece fijo si:

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{13} = 0,$$

$$\omega_{20} = 0,\ \omega_{21} = 0,\ \omega_{30} = 0,\ \omega_{31} = 0.$$

Por el mismo caso anterior $P + G_1 + G_2$ no admite medida invariante.

5.6. FAMILIAS QUE DEPENDEN DE DIEZ PARAMETROS.

5.6.1. $G_1 + E + P + G_2$, $G_1 \subset E$, $P \in G_2$, $G_1 \cap G_2 = 0$.

Tomamos

$$G_1 : a_0 a_1$$

$$G_2 : a_2 a_3$$

$$E : a_0 a_1 a_2$$

$$P : a_3$$

$G_1 + G_2 + E + P$ permanece fijo si:

$$\omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{20} = 0,$$

$$\omega_{21} = 0,\ \omega_{30} = 0,\ \omega_{31} = 0,\ \omega_{32} = 0,\ \omega_{23} = 0.$$

Luego:

$$\Omega = \omega_{02}\omega_{03}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{20}\omega_{21}\omega_{30}\omega_{31}\omega_{32}\omega_{23}.$$

Por Luccioni $d\Omega = 0$, luego la densidad para $G_1 + G_2 + E + P$ existe, y es

$$\Omega = \omega_{02}\omega_{03}\omega_{13}\omega_{12}\omega_{20}\omega_{21}\omega_{30}\omega_{31}\omega_{32}\omega_{23}.$$

5.6.2. $P_1 + E_1 + P_2 + E_2$ con $P_1 \in E_1$, $P_2 \in E_2$.

Tomando

$$P_1 : a_0;\ E_1 : a_0a_1a_2$$

$$P_2 : a_3;\ E_2 : a_1a_2a_3$$

P_1 permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,$$

E_1 permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0,$$

P_2 permanece fijo si

$$\omega_{30} = 0,\ \omega_{31} = 0,\ \omega_{32} = 0,$$

E_2 permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0,\ \omega_{20} = 0,\ \omega_{30} = 0.$$

Luego:

$$\Omega = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{30}\omega_{31}\omega_{32}\omega_{13}\omega_{23}.$$

Por Luccioni $P_1 + E_1 + P_2 + E_2$ *admite* una medida invariante, está dada por el producto exterior

$$\Omega = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{30}\omega_{31}\omega_{32}\omega_{13}\omega_{23}.$$

5.6.3. $P_1 + E + P_2 + G$, $P_1 \in E$, $P_2 \in G$.

Tomamos

$$P_1 : a_0;\ E : a_0a_1a_2$$

$$P_2 : a_3;\ G : a_2a_3$$

P_1 permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,$$

E permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0,$$

P_2 permanece fijo si

$$\omega_{30} = 0,\ \omega_{31} = 0,\ \omega_{32} = 0,$$

G permanece fija si

$$\omega_{20} = 0,\ \omega_{21} = 0,\ \omega_{30} = 0,\ \omega_{31} = 0.$$

Luego:

$$\Omega = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{20}\omega_{21}\omega_{03}\omega_{13}\omega_{23}\omega_{30}\omega_{31}\omega_{32}$$

Por Luccioni la densidad para $P_1 + E + P_2 + G$ no existe.

5.6.4. $G_1 + E_1 + G_2 + E_2$ con $G_1 \subset E_1$, $G_2 \subset E_2$.
Tomamos

$$G_1 : a_0a_3;\ E_1 : a_0a_1a_3$$

$$G_2 : a_1a_2;\ E_2 : a_0a_1a_2.$$

G_1 permanece fija si

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{31} = 0,\ \omega_{32} = 0,$$

G_2 permanece fija si

$$\omega_{10} = 0,\ \omega_{20} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0,$$

E_1 permanece fijo si

$$\omega_{02} = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{32} = 0,$$

E_2 permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0.$$

$$\Omega = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{31}\omega_{32}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{13}\omega_{23}\omega_{12}\omega_{03}$$

Por Luccioni la densidad invariante para $G_1 + E_1 + E_2 + G_2$ con $G_1 \subset E_1$, $G_2 \subset E_2$ no existe.

5.6.5. $P_1 + G_1 + P_2 + G_2$ con $P_1 \in G_1$, $P_2 \in G_2$, $G_1 \cap G_2 = 0$.

Tomamos

$$P_1 : a_0;\ P_2 : a_2$$

$$G_1 : a_0a_3;\ G_2 : a_1a_2$$

Para que P_1 permanezca fijo se debe tener que:

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0.$$

G_1 permanece fija si

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{31} = 0,\ \omega_{32} = 0$$

P_2 permanece fijo si

$$\omega_{20} = 0,\ \omega_{21} = 0,\ \omega_{23} = 0$$

G_2 permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{20} = 0,\ \omega_{23} = 0$$

Luego, $P_1 + G_1 + P_2 + G_2$ permanece fijo si:

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,\ \omega_{31} = 0,\ \omega_{32} = 0,$$

$$\omega_{20} = 0,\ \omega_{21} = 0,\ \omega_{23} = 0,\ \omega_{10} = 0,\ \omega_{13} = 0.$$

Entonces

$$\Omega = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{31}\omega_{32}\omega_{20}\omega_{21}\omega_{23}\omega_{10}\omega_{13}.$$

Por Luccioni la densidad para $P_1 + G_1 + P_2 + G_2$ no existe.

5.7. FAMILIAS QUE DEPENDEN DE ONCE PARAMETROS.

5.7.1. $P_1 + P_2 + E + G$ con $P_1 \in E$, $P_2 \in E$.

Tomamos

$$P_1 : a_0;\ P_2 : a_1;\ E : a_0a_1a_3;\ G : a_2a_3.$$

$P_1 + P_2 + G$ permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,\ \omega_{10} = 0,\ \omega_{12} = 0,$$

$$\omega_{13} = 0,\ \omega_{20} = 0,\ \omega_{21} = 0,\ \omega_{30} = 0,\ \omega_{31} = 0,$$

E permanece fijo si

$$\omega_{02} = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{32} = 0,$$

luego

$$\Omega = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{30}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{21}\omega_{31}\omega_{32}\omega_{10}\omega_{20}.$$

Por Luccioni $P_1 + P_2 + E + G$ no admite una medida invariante.

5.7.2. $P_1 + G + E_1 + P_2 + E_2$ con $P_1 \in G$, $G \subset E_1$, $P_2 \in E_2$.

Tomamos

$$P_1 : a_0;\ G : a_0a_1;\ E_1 : a_0a_1a_2$$

$$P_2 : a_3;\ E_2 : a_1a_2a_3$$

$P_1 + G + E_1 + P_2 + E_2$ permanece fijo si:

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,\ \omega_{10} = 0,\ \omega_{20} = 0,\ \omega_{30} = 0,$$

$$\omega_{13} = 0,\ \omega_{31} = 0,\ \omega_{23} = 0,\ \omega_{32} = 0,\ \omega_{12} = 0,$$

$$\Omega = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{30}\omega_{13}\omega_{31}\omega_{23}\omega_{32}\omega_{12}.$$

Por Luccioni la densidad para $P_1 + G + E_1 + P_2 + E_2$. no existe.

5.7.3. $P_1 + G_1 + E_1 + G_2 + E_2$ con $P_1 \in G_1$, $G_1 \subset E_1$, $G_2 \subset E_2$.

Llamando

$$P_1 : a_0;\ G_1 : a_0a_1;\ E_1 : a_0a_1a_2$$

$$G_2 : a_2a_3;\ E_2 : a_0a_2a_3$$

$P_1 + G_1 + E_1 + G_2 + E_2$ permanece fijo si:

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0,$$

$$\omega_{20} = 0,\ \omega_{30} = 0,\ \omega_{21} = 0,\ \omega_{31} = 0,\ \omega_{10} = 0.$$

Por Luccioni no existe la densidad invariante para este conjunto.

5.7.4. $G_1 + E_1 + E_2 + E_3$ con $G_1 \subset E_1$.

Tomamos

$$G_1 : a_0a_1;\ E_1 : a_0a_1a_2;\ E_2 : a_1a_2a_3;\ E_3 : a_0a_2a_3.$$

G_1 permanece fija si

$$\omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{13} = 0,$$

E_1 permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0,$$

E_2 permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0,\ \omega_{20} = 0,\ \omega_{30} = 0,$$

E_3 permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{21} = 0,\ \omega_{31} = 0.$$

Por Luccioni la densidad invariante para $G_1 + E_1 + G_2 + E_3$ no existe.

5.8. FAMILIAS QUE DEPENDEN DE DOCE PARAMETROS.

5.8.1. $G_1 + E_1 + G_2 + P$ con $G_1 \subset E_1$.

Tomamos

$$G_1 : a_0a_1;\ E_1 : a_0a_1a_2$$

$$G_2 : a_2a_3;\ P : a_1 + a_3.$$

G_1 permanece fijo si

$$\omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{13} = 0,$$

G_2 permanece fijo si

$$\omega_{20} = 0,\ \omega_{30} = 0,\ \omega_{21} = 0,\ \omega_{31} = 0,$$

E_1 permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0,$$

P permanece fijo si

$$\omega_{10} + \omega_{30} = 0,\ \omega_{12} + \omega_{32} = 0,\ \omega_{33} - \omega_{11} = 0.$$

Llamando

$$\Omega = \omega_{02}\omega_{03}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{20}\omega_{30}\omega_{21}\omega_{31}\omega_{23}\omega_{10}\omega_{32}(\omega_{33}-\omega_{11})$$

$$\Omega_1 = d(G_1+G_2) = \omega_{02}\omega_{03}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{20}\omega_{30}\omega_{21}\omega_{31}$$

$$\Omega_2 = \omega_{23}\omega_{10}\omega_{32}(\omega_{33}-\omega_{11})$$

se tiene $\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2$ con $d\Omega_1 = 0$ (ver (2.2)), luego $d\Omega = 0$ si sólo si $\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0$.

Pero

$$\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = \Omega_1 \wedge (\omega_{11}-\omega_{00}) \wedge \Omega_2 = \Omega \wedge (\omega_{11}-\omega_{00}) \neq 0$$

y por tanto la densidad para $G_1 + E_1 + G_2 + P$ no existe.

5.8.2. $P_1 + E_1 + P_2 + G$ con $P_1 \in E_1$.

Tomamos

$$P_1 : a_0; \; E_1 : a_0 a_1 a_2$$

$$P_2 : a_1 + a_3; \; G : a_2 a_3.$$

P_1 permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0, \; \omega_{02} = 0, \; \omega_{03} = 0,$$

E_1 permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0, \; \omega_{13} = 0, \; \omega_{23} = 0,$$

P_2 permanece fijo si

$$\omega_{10} + \omega_{30} = 0, \; \omega_{12} + \omega_{32} = 0, \; \omega_{33} - \omega_{11} = 0,$$

G permanece fija si

$$\omega_{20} = 0, \; \omega_{30} = 0, \; \omega_{21} = 0, \; \omega_{31} = 0;$$

$$\Omega = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{13}\omega_{23}\omega_{10}(\omega_{12}+\omega_{32})(\omega_{33}-\omega_{11})\omega_{20}\omega_{30}\omega_{21}\omega_{31}$$

es la densidad de $P_1 + E_1 + P_2 + G$, si sólo si $d\Omega = 0$.

Llamando

$$\Omega_1 = d(P_1+P_2+G) = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}(\omega_{12}+\omega_{32})(\omega_{33}-\omega_{11})\omega_{10}\omega_{20}\omega_{30}\omega_{21}\omega_{31}$$

$d\Omega_1 = 0$ (la densidad Ω_1 existe, ver (2.3)).

Si $\Omega_2 = \omega_{13}\omega_{23}$, $\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2$ y $d\Omega = 0$, si sólo si, $\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0$.

$$\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = \Omega_1 \wedge (\omega_{11}-2\omega_{33}+\omega_{22}) \wedge \Omega_2 = -\Omega \wedge (\omega_{33}-\omega_{22}) \neq 0.$$

Luego, la densidad para 5.8.2 no existe.

5.8.3. $P_1 + E_1 + G_1 + G_2$ con $P_1 \in E_1$, $G_1 \cap G_2 \neq 0$.
Tomamos

$$P_1 : a_3;\ E_1 : a_0 a_2 a_3$$

$$G_1 : a_0 a_1;\ G_2 : a_1 a_2$$

P_1 permanece fijo si

$$\omega_{30} = 0,\ \omega_{31} = 0,\ \omega_{32} = 0,$$

E permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{21} = 0,\ \omega_{31} = 0,$$

G_1 permanece fija si

$$\omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{13} = 0,$$

G_2 permanece fija si

$$\omega_{10} = 0,\ \omega_{20} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0.$$

$P_1 + E + G_1 + G_2$ permanece fijo si:

$$\omega_{30} = 0,\ \omega_{31} = 0,\ \omega_{32} = 0,\ \omega_{01} = 0,\ \omega_{21} = 0,\ \omega_{23} = 0,$$

$$\omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{10} = 0,\ \omega_{20} = 0.$$

$$\Omega = \omega_{30}\omega_{31}\omega_{32}\omega_{01}\omega_{21}\omega_{23}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{10}\omega_{20}.$$

Por Luccioni la densidad para la familia $P_1 + E_1 + G_1 + G_2$ con $P_1 \in E$, $G_1 \cap G_2 \neq 0$ existe, es

$$\Omega = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{30}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{21}\omega_{31}\omega_{23}\omega_{32}.$$

5.8.4. $P_1 + G_1 + G_2 + G_3$ con $P_1 \in G_1$, $G_2 \cap G_3 \neq 0$.
Tomando

$$P_1 : a_2 + a_3$$

$$G_1 : a_0 + a_1,\ a_2 + a_3$$

$$G_2 : a_1 a_3$$

$$G_3 : a_0 a_3$$

$P_1 + G_1$ permanece fijo si

$$\omega_{20} - \omega_{31} = 0, \ \omega_{23} + \omega_{32} = 0, \ \omega_{33} - \omega_{22} = 0,$$

$$\omega_{11} - \omega_{00} = 0, \ \omega_{03} - \omega_{12} = 0,$$

$G_2 + G_3$ permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0, \ \omega_{30} = 0, \ \omega_{12} = 0, \ \omega_{32} = 0, \ \omega_{01} = 0, \ \omega_{31} = 0, \ \omega_{02} = 0.$$

Luego $P_1 + G_1 + G_2 + G_3$ permanece fijo si:

$$\omega_{20} = 0, \ \omega_{23} = 0, \ \omega_{33} - \omega_{22} = 0, \ \omega_{11} - \omega_{00} = 0, \ \omega_{03} = 0, \ \omega_{10} = 0,$$

$$\omega_{12} = 0, \ \omega_{32} = 0, \ \omega_{01} = 0, \ \omega_{31} = 0, \ \omega_{02} = 0, \ \omega_{30} = 0.$$

Llamando

$$\Omega = \omega_{20}\omega_{23}(\omega_{33}-\omega_{22})(\omega_{11}-\omega_{00})\omega_{03}\omega_{10}\omega_{30}\omega_{12}\omega_{32}\omega_{01}\omega_{31}\omega_{02}.$$

$$\Omega_1 = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{30}$$

por (8), $d\Omega_1 = 0$, y si

$$\Omega_2 = (\omega_{33}-\omega_{22})(\omega_{11}-\omega_{00})\omega_{12}\omega_{31}\omega_{32}\omega_{23}$$

entonces $\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2$ y $d\Omega = 0$, si sólo si, $\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0$. Veamos:

$$\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = \Omega_1 \wedge \Omega_2 \wedge (\omega_{33}-\omega_{22}),$$

luego $\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0$. Por tanto la densidad invariante para $P_1 + G_1 + G_2 + G_3$ existe, está dada por

$$\Omega = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{30}(\omega_{33}-\omega_{22})(\omega_{11}-\omega_{00})\omega_{12}\omega_{31}\omega_{32}\omega_{23}.$$

5.8.5. $P_1 + G_1 + E_1 + P_2 + G_2 + E_2$ con $P_1 \in G_1 \in E_1$, $P_2 \in G_2 \in E_2$.
Tomamos

$$P_1 : a_0; \ G_1 : a_0 a_1; \ E_1 : a_0 a_1 a_2$$

$$P_2 : a_3; \ G_2 : a_2 a_3; \ E_2 : a_1 a_2 a_3.$$

$P_1 + G_1 + E_1$ permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0, \ \omega_{02} = 0, \ \omega_{03} = 0, \ \omega_{12} = 0, \ \omega_{13} = 0, \ \omega_{23} = 0,$$

$P_2 + G_2 + E_2$ permanece fijo si

$$\omega_{30} = 0,\ \omega_{31} = 0,\ \omega_{32} = 0,\ \omega_{20} = 0,\ \omega_{10} = 0,\ \omega_{21} = 0;$$

$$\Omega = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{23}\omega_{30}\omega_{31}\omega_{32}\omega_{20}\omega_{10}\omega_{21}.$$

Por Luccioni la densidad invariante para $P_1 + G_1 + E_1 + P_2 + G_2 + E_2$ existe, es

$$d(P_1+G_1+E_1+P_2+G_2+E_2) = \Omega.$$

5.9. FAMILIAS QUE DEPENDEN DE TRECE PARAMETROS.

5.9.1. $P + E_1 + G + E_2 + E_3$ con $P \in E_1$, $G \in E_2$, $P \notin G$.

Tomamos

$$P : a_0 + a_1 + a_2;\ G : a_3a_1$$

$$E_1 : a_0a_1a_2;\ E_2 : a_1a_2a_3$$

$$E_3 : a_0a_2a_3$$

E_3 permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{21} = 0,\ \omega_{31} = 0,$$

$G + E_2$ permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0,\ \omega_{30} = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{32} = 0,\ \omega_{20} = 0,$$

$P + E_1$ permanece fijo si

$$\omega_{11} - \omega_{00} = 0,\ \omega_{02} + \omega_{22} - \omega_{00} = 0,\ \omega_{03} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0.$$

Luego:

$$\Omega = \omega_{01}\omega_{21}\omega_{31}\omega_{10}\omega_{30}\omega_{12}\omega_{32}\omega_{20}\omega(\omega_{11}-\omega_{00})(\omega_{02}+\omega_{22}-\omega_{00})\omega_{03}\omega_{13}\omega_{23}$$

es la densidad de 5.9.1, si sólo si, $d\Omega = 0$. Reordenando, podemos escribir

$$\Omega = (\omega_{11}-\omega_{00})\omega_{02}\omega_{03}\omega_{01}\omega_{20}\omega_{30}\omega_{10}\omega_{12}\omega_{21}\omega_{13}\omega_{31}\omega_{23}\omega_{32}$$

$$+ (\omega_{11}-\omega_{00})(\omega_{22}-\omega_{00})\omega_{03}\omega_{01}\omega_{30}\omega_{10}\omega_{12}\omega_{21}\omega_{13}\omega_{31}\omega_{23}\omega_{32}\omega_{20}$$

El primer sumando tiene diferencial igual a cero por Luccioni, luego $d\Omega = 0$, si sólo si

$$d[(\omega_{11}-\omega_{00})(\omega_{22}-\omega_{00})\omega_{03}\omega_{01}\omega_{30}\omega_{10}\omega_{12}\omega_{21}\omega_{13}\omega_{31}\omega_{23}\omega_{32}\omega_{20}] = 0.$$

Pero

$$d[(\omega_{11}-\omega_{00})(\omega_{22}-\omega_{00})\omega_{03}\omega_{01}\omega_{30}\omega_{10}\omega_{12}\omega_{21}\omega_{13}\omega_{31}\omega_{23}\omega_{32}\omega_{20}]$$

$$= (\omega_{11}-\omega_{00})(\omega_{22}-\omega_{00})\omega_{03}\omega_{01}\omega_{30}\omega_{10}\omega_{12}\omega_{21}\omega_{13}\omega_{31}\omega_{23}\omega_{32}\omega_{20}(\omega_{00}-\omega_{22}).$$

Luego, la diferencial del segundo sumando de Ω es cero, así $d\Omega = 0$, y esto asegura que la densidad invariante para

$$P_1 + E_1 + G + E_2 + E_3 \text{ existe, y es } \Omega.$$

5.9.2. $G_1 + G_2 + P + E$ con $G_1 \cap G_2 \neq 0$, $P \notin E$.

Tomamos

$$G_1 : a_0a_2;\ P : a_0 + a_3$$

$$G_2 : a_0a_1;\ E : a_1a_2a_3$$

$G_1 + G_2$ permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{03} = 0,\ \omega_{21} = 0,\ \omega_{23} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{13} = 0,$$

P permanece fijo si

$$\omega_{31} = 0,\ \omega_{32} = 0,\ \omega_{33} = 0,\ \omega_{00} = 0,$$

E permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0,\ \omega_{20} = 0,\ \omega_{30} = 0.$$

$$\Omega = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{30}\omega_{21}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{31}\omega_{23}\omega_{32}(\omega_{33}-\omega_{00})$$

será la densidad para 5.9.2, si sólo si, $d\Omega = 0$. Llamando $\Omega_1 = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{30}\omega_{21}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{31}\omega_{23}\omega_{32}$ por (8) se tiene $d\Omega_1 = 0$. Luego $d\Omega = 0$, si sólo si, $\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0$ con $\Omega_2 = (\omega_{33}-\omega_{00})$ y puesto que por (8) $\Omega_1 \wedge d\Omega_2 = 0$, la densidad para $G_1 + G_2 + P_1 + E$ existe, es:

$$d(G_1+G_2+P+E) = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{30}\omega_{21}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{31}\omega_{23}\omega_{32}(\omega_{33}-\omega_{00}).$$

5.9.3. $G_1 + G_2 + G_3 + E$, $G_3 \subset E$.

Tomando

$$G_1 : a_0a_3;\ G_2 : a_0 + a_1,\ a_2 + a_3$$

$$G_3 : a_1a_2;\ E : a_0a_1a_2$$

G_1 permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{31} = 0,\ \omega_{32} = 0,$$

G_2 permanece fija si

$$\omega_{21} - \omega_{30} = 0,\ \omega_{33} - \omega_{22} = 0,\ \omega_{11} - \omega_{00} = 0,\ \omega_{03} - \omega_{12} = 0,$$

$G_3 + E$ permanece fijo si

$$\omega_{03} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0,\ \omega_{10} = 0,\ \omega_{20} = 0;$$

$$\Omega = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{31}\omega_{32}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{13}\omega_{23}\omega_{03}\omega_{12}(\omega_{21}-\omega_{30})(\omega_{33}-\omega_{22})(\omega_{11}-\omega_{00})$$

será la densidad de 5.9.3, si sólo si, $d\Omega = 0$. Veamos: llamando

$$\Omega_1 = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{31}\omega_{32}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{13}\omega_{23}(\omega_{21}-\omega_{30})(\omega_{33}-\omega_{22})(\omega_{11}-\omega_{00})(\omega_{03}-\omega_{12})$$

$$= d(G_1+G_2+G_3) \text{ con } G_i \cap G_j = 0,\ i,j = 1,2,3 \quad d\Omega_1 = 0.$$ Por tanto $d\Omega = 0$, si sólo si,

$$\Omega_1 \wedge d\omega_{03} = 0.$$

Pero

$$\Omega_1 \wedge d\omega_{03} = \Omega_1 \wedge (\omega_{00}-\omega_{33})\omega_{03}$$

$$= \Omega \wedge (\omega_{00}-\omega_{33}) \neq 0.$$

Luego, la densidad para 5.9.3 no existe.

5.9.4. $G_1 + E_1 + G_2 + E_2 + P,\ G_1 \subset E_1,\ G_2 \subset E_2.$

Tomando

$$G_1 : a_0a_3;\ E_1 : a_0a_1a_3;\ P : a_2 + a_3$$

$$G_2 : a_1a_2;\ E_2 : a_0a_1a_2$$

$G_1 + E_1$ permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{31} = 0,\ \omega_{32} = 0,\ \omega_{12} = 0,$$

$G_2 + E_2$ permanece fijo si

$$\omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0,\ \omega_{10} = 0,\ \omega_{20} = 0,\ \omega_{03} = 0,$$

P permanece fijo si

$$\omega_{30} = 0,\ \omega_{21} = 0,\ \omega_{33} - \omega_{22} = 0;$$

$$\Omega = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{31}\omega_{32}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{23}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{03}\omega_{30}\omega_{21}(\omega_{33}-\omega_{22})$$

será la densidad para 5.9.4, si y sólo si,

$$d\Omega = 0.$$

Llamando

$$\Omega_1 = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{30}\omega_{12}\omega_{21}\omega_{13}\omega_{31}\omega_{23}\omega_{32}$$

de (8) y [4], $d\Omega_1 = 0$, y también

$$\Omega_1 \wedge d(\omega_{33}-\omega_{22}) = 0.$$

Luego $d\Omega = 0$ y la densidad para 5.9.4 existe:

$$d(G_1+E_1+G_2+E_2+P) = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{30}\omega_{12}\omega_{21}\omega_{13}\omega_{31}\omega_{23}\omega_{32}(\omega_{33}-\omega_{22}).$$

5.10. FAMILIAS QUE DEPENDEN DE CATORCE PARAMETROS.

5.10.1. $G_1 + E_1 + G_2 + E_2 + G_3$, $G_1 \subset E_1$, $G_2 \subset E_2$.

$$G_1 : a_0a_3;\ E_1 : a_0a_2a_3$$

$$G_2 : a_1a_2;\ E_2 : a_0a_1a_2$$

$$G_3 : a_0 + a_1,\ a_2 + a_3$$

$G_1 + E_1$ permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{31} = 0,\ \omega_{32} = 0,\ \omega_{21} = 0,$$

$G_2 + E_2$ permanece fijo si

$$\omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0,\ \omega_{10} = 0,\ \omega_{20} = 0,\ \omega_{03} = 0,$$

G_3 permanece fijo si

$$\omega_{21} - \omega_{30} = 0,\ \omega_{33} - \omega_{22} = 0,\ \omega_{11} - \omega_{00} = 0,\ \omega_{03} - \omega_{12} = 0;$$

$$\Omega = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{31}\omega_{32}\omega_{21}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{13}\omega_{03}\omega_{30}\omega_{12}\omega_{23}(\omega_{33}-\omega_{22})(\omega_{11}-\omega_{00}).$$

Llamando

$$\Omega_1 = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{30}\omega_{13}\omega_{31}\omega_{12}\omega_{21}\omega_{23}\omega_{32},$$

por (8) y [4], $d\Omega_1 = 0$ y $d\Omega = 0$ si sólo si $\Omega_1 \wedge d[(\omega_{33}-\omega_{22})(\omega_{11} - \omega_{00})] = 0$. Pero ésto se cumple. Luego, $d\Omega = 0$ y la densidad para 5.10.1 existe

$$d(G_1+E_1+G_2+E_2+E_3)$$

$$= \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{30}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{23}\omega_{21}\omega_{31}\omega_{32}(\omega_{33}-\omega_{22})(\omega_{11}-\omega_{00}).$$

5.10.2. $P_1 + G_1 + P_2 + G_2 + G_3$, $P_1 \in G_1$, $P_2 \in G_2$.

Tomamos

$$P_1 : a_3;\ G_1 : a_0 a_3$$

$$P_2 : a_1;\ G_2 : a_1 a_2$$

$$G_3 : a_0 + a_1,\ a_2 + a_3$$

$P_1 + G_1$ permanece fijo si

$$\omega_{30} = 0,\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{01} = 0,\ \omega_{31} = 0,\ \omega_{32} = 0,$$

$P_2 + G_2$ permanece fijo si

$$\omega_{10} = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{20} = 0,\ \omega_{23} = 0,$$

G_3 permanece fijo si

$$\omega_{21} - \omega_{30} = 0,\ \omega_{33} - \omega_{22} = 0,\ \omega_{11} - \omega_{00} = 0,\ \omega_{03} - \omega_{12} = 0;$$

$$\Omega = \omega_{30}\omega_{02}\omega_{01}\omega_{31}\omega_{32}\omega_{10}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{20}\omega_{23}\omega_{21}\omega_{03}(\omega_{33}-\omega_{22})(\omega_{11}-\omega_{00})$$

será la densidad de 5.10.2, si sólo si, $d\Omega = 0$. Llamando

$$\Omega_1 = \omega_{30}\omega_{02}\omega_{01}\omega_{31}\omega_{32}\omega_{10}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{20}\omega_{23}\omega_{21}\omega_{03}$$

y comparando en 5.8.5 tenemos que $d\Omega_1 = 0$. Luego $d\Omega = 0$, si sólo si, $\Omega_1 \wedge d[(\omega_{33}-\omega_{22})(\omega_{11}-\omega_{00})] = 0$, pero esto se tiene al aparecer en la diferencial de ω_{ii} siempre uno de los términos Ω_1. Luego $d\Omega = 0$ y la densidad de 5.10.2 existe, es:

$$d(P_1 + G_1 + P_2 + G_2 + G_3)$$

$$= \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{10}\omega_{20}\omega_{30}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{23}\omega_{21}\omega_{31}\omega_{32}(\omega_{33}-\omega_{22})(\omega_{11}-\omega_{00}).$$

5.10.3. $G_1 + E_1 + P_2 + G_2 + E_2 + P_1$ con $G_1 \subset E_1$, $P_2 \in G_2 \subset E_2$ Tomando

$$G_1 : a_0a_1;\ E_1 : a_0a_1a_2;\ P_2 : a_3$$

$$G_2 : a_2a_3;\ E_2 : a_1a_2a_3;\ P_1 : a_0 + a_2 + a_3$$

se tiene:

$G_1 + E_1$ permanece fijo si

$$\omega_{02} = 0,\ \omega_{12} = 0,\ \omega_{03} = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{23} = 0,$$

$P_2 + G_2 + E_2$ permanece fijo si

$$\omega_{30} = 0,\ \omega_{31} = 0,\ \omega_{32} = 0,\ \omega_{20} = 0,\ \omega_{21} = 0,\ \omega_{10} = 0,$$

P_1 permanece fijo si

$$\omega_{01} = 0,\ \omega_{22} - \omega_{00} = 0,\ \omega_{33} - \omega_{00} = 0;$$

$$\Omega = \omega_{02}\omega_{12}\omega_{03}\omega_{13}\omega_{23}\omega_{30}\omega_{31}\omega_{32}\omega_{20}\omega_{21}\omega_{10}\omega_{01}(\omega_{22}-\omega_{00})(\omega_{33}-\omega_{00}),$$

será la densidad de 5.10.3, si sólo si, $d\Omega = 0$. Llamando

$$\Omega_1 = \omega_{02}\omega_{12}\omega_{03}\omega_{13}\omega_{23}\omega_{30}\omega_{31}\omega_{32}\omega_{20}\omega_{21}\omega_{10}\omega_{01}$$

se tiene el mismo caso que en 5.8.5, luego $d\Omega = 0$, y esta densidad existe, está dada por:

$$\Omega = d(G_1+E_1+P_2+G_2+E_2+P_1).$$

§6. Conclusión. Como resumen de lo anterior podemos enunciar los teoremas siguientes,

TEOREMA 3. *En el espacio proyectivo P_3 las siguientes familias de subespacios con alguna relación de pertenencia no tienen medida invariante respecto del grupo proyectivo:*

$$P + E \text{ con } P \in E$$

$$P + G \text{ con } P \in G$$

$$G + E \text{ con } G \subset E$$

$$P + G + E \text{ con } P \in G \subset E$$

$$P_1 + P_2 + E \text{ con } P_1 \in E,\ P_2 \in E$$

$$P + G + E \text{ con } P \in G,\ G \not\subset E$$

$$P + G + E \text{ con } G \subset E,\ P \notin E$$

$$P + E_1 + E_2 \text{ con } P \in E_1$$

$$P_1 + P_2 + E \text{ con } P_2 \in E$$

$$G + E_1 + E_2 \text{ con } G \subset E_1$$

$$P_1 + G_1 + P_2 + G_2 \text{ con } P_1 \in G_1,\ P_2 \in G_2$$

$$P_1 + P_2 + E \text{ con } P_1 \in E$$

$$G_1 + G_2 + E \text{ con } G_1 \subset E$$

$$P + E + G \text{ con } P \in E$$

$$P_1 + P_2 + G + E \text{ con } P_2 \in G \subset E$$

$$P_1 + G_1 + P_2 + G_2 \text{ con } P_1 \in G_1,\ P_2 \in G_2$$

$$P + G_1 + G_2 \text{ con } P \in G_1$$

$$P_1 + E + P_2 + G \text{ con } P_1 \in E,\ P_2 \in G$$

$$G_1 + E_1 + G_2 + E_2 \text{ con } G_1 \subset E_1,\ G_2 \subset E_2$$

$$P_1 + P_2 + E + G_1 \text{ con } P_1 \in E,\ P_2 \in E$$

$$P_1 + G + E_1 + P_2 + E_2 \text{ con } P_1 \in G \subset E,\ P_2 \in E_2$$

$$P_1 + G_1 + E_1 + G_2 + E_2 \text{ con } P_1 \in G_1 \subset E_1,\ G_2 \subset E_2$$

$$G_1 + E_1 + E_2 + E_3 \text{ con } G_1 \subset E_1$$

$$G_1 + E_1 + G_2 + P \text{ con } G_1 \subset E_1$$

$P_1 + E_1 + P_2 + G$ con $P_1 \in E_1$

$G_1 + G_2 + G_3 + E$ con $G_3 \subset E$.

TEOREMA 4. *En el espacio proyectivo P_3 las siguientes familias de subespacios con puntos comunes tienen densidad invariante respecto del grupo proyectivo:*

$G_1 + E + P + G_2$ con $G_1 \subset E$, $P \in G_2$

$P_1 + E_1 + P_2 + E_2$ con $P_1 \in E_1$, $P_2 \in E_2$

$P_1 + E_1 + G_1 + G_2$ con $P_1 \notin E_1$, $G_1 \cap G_2 \neq 0$

$P_1 + G_1 + G_2 + G_3$ con $P_1 \in G_1$, $G_2 \cap G_3 \neq 0$

$P_1 + G_1 + E_1 + P_2 + G_2 + E_2$ con $P_1 \in G_1 \subset E_1$, $P_2 \in G_2 \subset E_2$

$P + E_1 + G + E_2 + E_3$ con $P \in E_1$, $G \subset E_2$

$G_1 + G_2 + P + E$ con $G_1 \cap G_2 \neq 0$, $P \notin E$

$G_1 + E_1 + G_2 + E_2 + P$ con $G_1 \subset E_1$, $G_2 \subset E_2$

$G_1 + E_1 + G_2 + E_2 + G_3$ con $G_1 \subset E_1$, $G_2 \subset E_2$

$P_1 + G_1 + P_2 + G_2 + G_3$ con $P_1 \subset G_1$, $P_2 \subset G_2$

$G_1 + E_1 + P_2 + G_2 + E_2 + P_1$ con $G_1 \subset E_1$, $P_2 \in G_2 \subset E_2$.

Para subespacios *con* puntos comunes no se han encontrado condiciones que determinen su medibilidad o no respecto del grupo proyectivo. El estudio de algunos casos aislados, hace pensar que no existen estas condiciones generales.

BIBLIOGRAFIA

[1] Cartan, M.E., *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile.* Paris-Gauthier-Villars, 1937.

[2] Cartan, M.E., *La méthode du repere mobile, la théorie des groupes continues et les espaces generalises.* Paris, Hermann et Cie Editeurs, Act Sci et indus, Vol. V. Paris 1935.

[3] Cartan, M.E., *Les systemes differentiels exterieurs et leurs applications géometriques.* Actulités scientifiques et industrielles N° 994, Hermann, Paris, 1945.

[4] Luccioni, R.E., *Geometría Integral en Espacios Proyectivos.* Instituto de Matemática, Univ. Nac. de Tucumán, Vol. 15 (53-80), 1964.

[5] Maniscalco, I., Portolano, A., *Geometria Integrale nello spazio proiettivo P_3.* Atti Accad. Peloritana dei Pericolanti, Clase Ia. de Scienze Fis., Mat. e Nat., Vol. LX,(1982).

[6] Santalo, L.A., *Integral Geometry in Projective and Affine Spaces.* Ann. of Math. (2)(739-755), 1950.

[7] Santalo, L.A., *Introduction to Integral Geometry.* Hermann et Cie Editeurs, Paris, 1953.

[8] Santalo, L.A., *Integral Geometry and Geometric Probability.* Addison Wesley Publishing Company, USA, 1976.

[9] Stoka, M., *Géométrie Intégrale.* (Memorial de Sciences Mathematiques Fas. 165), Gauthier Villars Ed., Paris, 1968.

[10] Stoka, M., *Alcuni probleme di geometria integrale nello spazio proiettivo P_3.* Att. Accad. Peloritana di Pericolanti, Clase Ia. de Scienze Fis.,Mat. e Nat. Vol. LX, 1982

* *

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E. Colombia

(Recibido en marzo de 1988)