Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXIII (1989), págs. 93-102

ALGUNAS OBSERVACIONES ACERCA DE MATRICES TRIANGULARES SOBRE ANILLOS

por

Oswaldo LEZAMA

Resumen. Para un anillo asociativo Λ, con unidad, se determina el centralizador en $GL_n(\Lambda)$ del grupo $UT_n^m(\Lambda)$ de matrices triangulares con m-1 diagonales consecutivas nulas por encima de la diagonal principal. Para anillos finitos se determina el orden del centro de $UT_n^m(\Lambda)$. Además, se da un ejemplo de una matriz triangular invertible cuya inversa no es triangular.

Abstract. For the group $UT_n^m(\Lambda)$ of triangular matrices over an associative ring Λ, with m-1 consecutive zero diagonals up the principal diagonal we determine its centralizer in $GLn(\Lambda)$. This fact is then used to compute the order of the center of $UT_n^m(\Lambda)$, when Λ is finite. Moreover, we give an example of an invertible triangular matrix whose inverse is not triangular.

§1. Una proposición sobre matrices triangulares y un contraejemplo.

1.1. Sean Λ un anillo asociativo con unidad 1 (no necesariamente conmutativo), Λ^* el grupo de sus elementos invertibles, $M_n(\Lambda)$ el anillo de matrices de orden n sobre Λ, y $GL_n(\Lambda)$ el grupo lineal general de matrices invertibles. Sea además $T_n'(\Lambda) \subset M_n(\Lambda)$ el conjunto de matrices triangulares (superiores); es decir,

$$A = (a_{ij}) \in T'_n(\Lambda) \quad \text{si} \quad a_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad i > j$$

En lo que sigue será conveniente considerar la estructura de Λ-módulo libre de $M_n(\Lambda)$ con base canónica $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^n$ donde E_{ij} es la matriz con todos sus elementos nulos salvo en la intersección de la i-ésima fila y la j-ésima columna donde está 1. Cada matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\Lambda)$ puede entonces escribirse en la forma

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} E_{ij} \tag{1}$$

y el producto de matrices puede calcularse utilizando la distributividad y las relaciones

$$(a\cdot E_{ik})(b\cdot E_{\ell j}) = \begin{cases} ab\ E_{ij} & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{si } k \neq \ell \end{cases}$$

Necesitaremos también de las matrices invertibles elementales

$$T_{ij}(a) = E + a\cdot E_{ij}, \quad i \neq j, \quad a \in \Lambda$$

donde E es la matriz identidad de orden n, y de las llamadas matrices diagonales invertibles:

$$D(a_1,\dots,a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i\cdot E_{ii}, \quad a_i \in \Lambda^*.$$

Es muy posible que la siguiente proposición forme parte del *folklore*, pero ante la imposibilidad de dar una referencia adecuada nos permitimos presentar una demostración.

1.2. PROPOSICION. (a) *Sea* $A = (a_{ij}) \in T'_n(\Lambda)$ *tal que* $a_{ij} \in \Lambda^*$ *para cada* $1 \leq i \leq n$. *Entonces* A *es invertible.*

(b) *Si* Λ *es un anillo sin inversos por un solo lado, es decir si*

$$\forall x,y \in \Lambda: \quad xy = 1 \Rightarrow yx = 1, \tag{1}$$

entonces el recíproco de (a) *es cierto, en cuyo caso*

$$T_n(\Lambda) = \{A = (a_{ij}) \in T'_n(\Lambda) \mid a_{ii} \in \Lambda^*.\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

es un subgrupo de $GL_n(\Lambda)$.

Demostración. (a) La matriz

$$B = AD(a_{11}^{-1}, 1, \ldots, 1)$$

es triangular con $b_{11} = 1$, $b_{ii} = a_{ii}$ para $i \geqslant 2$. Multiplicando B a la derecha por $T_{12}(-b_{12}) \ldots T_{1n}(-b_{1n})$ resulta la matriz

$$\tilde{C} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right]$$

donde C es triangular de orden $n-1$ con elementos diagonales $a_{22}, \ldots, a_{nn}$. Utilizando inducción, $\tilde{C}$ resulta invertible, por lo cual A es invertible.

(b) Sea ahora $A = (a_{ij})$ una matriz triangular invertible, con inversa $A^{-1} = (a'_{ij})$. De $A^{-1}A = E = (e_{ij})$ resulta

$$e_{i1} = \sum_{k=1}^{n} a'_{ik} a_{k1} = a'_{i1} a_{11} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = 1, \\ 0 \text{ si } i \neq 1. \end{cases}$$

De (2) resulta $a_{11} a'_{11} = 1$ y, por tanto, $a'_{i1} = 0$ para $i > 1$. También

$$e_{i2} = a'_{i1} a_{12} + a'_{i2} a_{22} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = 2, \\ 0 \text{ si } i \neq 2. \end{cases}$$

Se obtiene entonces $a_{22} \in \Lambda^*$ y $a'_{i2} = 0$ para $i > 2$. De manera recurrente encontramos $a_{ii} \in \Lambda^*$, $a'_{ii} = a'_{ii}$ para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, y, $a'_{ij} = 0$ para $i > j$. Esto, en particular, prueba que $A^{-1} \in T_n(\Lambda)$, y puesto que este último es cerrado para el producto, esto concluye la demostración. ▲

1.3. CONTRAEJEMPLO. Si Λ no cumple (2) una matriz triangular puede ser invertible sin que sus elementos diagonales sean invertibles; además su inversa no tiene porque ser triangular. En efecto: en [1] se sugiere el siguiente ejemplo de anillo que no satisface (2): Sea K un campo y V un K-espacio con base enumerable infinita $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Sea $\Lambda = \mathrm{End}_K(V)$ el anillo de K-endomorfismo de V, y sean $f, g \in \Lambda$ definidas por

$$f(e_i) = e_{i+1} \quad \text{si } i \geq 1 \ ;$$

$$g(e_i) = \begin{cases} e_{i-1} & \text{si } i \geq 2, \\ 0 & \text{si } i = 1. \end{cases}$$

Entonces $g \circ f = 1_V$, pero $f \circ g \neq 1$ ya que $(f \circ g)(e_1) = 0$. Si $h \in \Lambda$ está definida por

$$h(e_i) = \begin{cases} e_1 & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{si } i \geq 2, \end{cases}$$

entonces la matriz

$$A = \begin{pmatrix} f & 1 \\ 0 & g \end{pmatrix} \in M_2(\Lambda)$$

es triangular invertible y su inversa está dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} g & -1 \\ h & f \end{pmatrix} ,$$

como lo comprueban unos rápidos cálculos sobre la base $\{e_i\}_{i=1}$. Claramente ni f ni g pertenecen a Λ^* y, además, $h \neq 0$.

§2. El centralizador de $UT_n^m(\Lambda)$.

2.1. Para cada $1 \leq m \leq n$, sea $UT_n^m(\Lambda)$ el conjunto de matrices triangulares tales que todos los elementos de la diagonal principal sean iguales a 1, y los elementos de las m-1 diagonales consecutivas por encima de la principal sean nulos, es decir:

$$A = (a_{ij}) \in UT_n^m(\Lambda) \Leftrightarrow a_{ij} = \begin{cases} 0, & i > j \\ 1, & i = j \\ 0, & i < j < i+m \end{cases} \tag{3}$$

Es bien conocido ([2]) que $UT_n^m(\Lambda)$ es un subgrupo de $GL_n(\Lambda)$, generado por las matrices elementales de la forma

$$T_{ij}(a), \quad j-i \geqslant m, \qquad a \in \Lambda.$$

2.2. TEOREMA. *Sea* $1 \leqslant m \leqslant n-1$. *Entonces:*

(a) $A = (a_{ij}) \in GL_n(\Lambda)$ *está en el centralizador de* $UT_n^m(\Lambda)$ *si, y sólo si,*

(4.1) $a_{ij} = 0$ *para* $i \neq j$, $1 \leqslant j \leqslant n-m$;

(4.2) $a_{ij} = 0$ *para* $i \neq j$, $m+1 \leqslant i \leqslant n$;

(4.3) $a_{jj} = a_{11}$ *pertenece al centro* $Z(\Lambda)$ *para cada* $1 \leqslant j \leqslant n-m$, *o*, $m+1 \leqslant j \leqslant n$.

(b) *El centralizador de* $UT_n^n(\Lambda)$ *coincide con* $LG_n(\Lambda)$.

Demostración. La parte (b) es trivial pues $UT_n^n(\Lambda) = \{E\}$. Para demostrar la parte (a) empecemos por suponer que $A = (a_{ij})$ pertenece al centralizador de $UT_n^m(\Lambda)$, $1 \leqslant m \leqslant n-1$. Como la matriz elemental $T_{j,j+m}(1)$ pertenece a $UT_n^m(\Lambda)$ si $1 \leqslant j \leqslant n-m$, debemos tener $AT_{j,j+m}(1) = T_{j,j+m}(1)A$. De aquí usando la representación

$$A = \sum_{r,s=1}^{n} a_{rs} \cdot E_{rs},$$

obtenemos fácilmente

$$\sum_{r=1}^{n} a_{rj} \cdot E_{r,j+m} = \sum_{s=1}^{n} a_{j+m,s} \cdot E_{js} .$$

De esta última igualdad surgen inmediatamente (4.1), (4.2) y $a_{jj} = a_{j+m,j+m}$ para $1 \leqslant j \leqslant n-m$. Puesto que para cada $1 \leqslant j \leqslant n-m$ y cada $a \in \Lambda$, $T_{1,j+m}(a) \in UT_n^m(\Lambda)$, entonces $AT_{1,j+m}(a) = T_{1,j+m}(a)A$, y de aquí $a_{11}a = aa_{j+m,j+m}$, para cada j, como ya se indicó. Tomando inicialmente $a = 1$ y luego a cualquiera, completamos la prueba de (4.3).

Recíprocamente, supongamos que $A = (a_{ij}) \in GL_n(\Lambda)$ satisface (4.1), (4.2) y (4.3). Para demostrar que A pertenece al centralizador de $UT_n^m(\Lambda)$, basta probar que conmuta con cada generador $T_{ij}(a)$, $j-i \geqslant m$, $a \in \Lambda$. Obsérvese que en estas circunstancias se tiene $1 \leqslant i \leqslant n-m$ y $m+1 \leqslant j \leqslant n$. Consiederemos dos casos:

Primer caso: $m > n-m$. Calculemos:

$$A(a\cdot E_{ij}) = \Big[\sum_{k=1}^{n-m} a_{kk}\cdot E_{kk} + \sum_{k=m+1}^{n} a_{kk}\cdot E_{kk} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=n-m+1} a_{rs}\cdot E_{rs}\Big] a\cdot E_{ij}$$

$$= a_{ii}a\cdot E_{ij}.$$

De manera análoga tenemos $(a\, E_{ij})A = a\, a_{jj}\cdot E_{ij}$. Por consiguiente, $AT_{ij}(a) = T_{ij}(a)A$.

Segundo caso: $m \leqslant n-m$. El procedimiento es semejante al anterior, descomponiendo esta vez A en la forma

$$\sum_{k=1}^{m} a_{kk}\cdot E_{kk} + \sum_{k=m+1}^{n-m} a_{kk}\cdot E_{kk} + \sum_{k=n-m+1}^{n} a_{kk}\cdot E_{kk} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=n-m+1} a_{rs}\cdot E_{rs}\,. \quad \blacktriangle$$

En la figura 1 presentamos el aspecto de las matrices del centralizador de $UT_n^m(\Lambda)$ en los dos casos que hemos distinguido en la demostración anterior

Primer caso: $m > n-m$

$$\text{(a)}\quad \begin{bmatrix} a_{11} & & & a_{1,n-m+1} & \cdots & a_{1n} & \\ & \ddots & & & & & \\ & & a_{11} & a_{n-m,n-m+1} & \cdots & a_{n-m,n} & \\ & & & & & & \\ & & & a_{m,n-m+1}\cdots a_{m,m} & \cdots & a_{mn} & \\ & & & & a_{11} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & a_{11} \end{bmatrix}$$

Segundo caso: $m < n-m$

$$
(b)\qquad \begin{pmatrix}
a_{11} & & & & & & \boxed{\begin{matrix} a_{1,n-m+1} & \cdots & a_{n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,n-m+1} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}} \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & a_{11} & & & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & & & a_{11} & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & a_{11}
\end{pmatrix}
$$

Figura 1 - (a),(b)

El teorema 2.2 permite intentar una descripción del centro de $UT_n^m(\Lambda)$, como su intersección con el centralizador. En efecto, si $m > n-m$ entonces $UT_n^m(\Lambda)$ coincide con su centro, es decir, $UT_n^m(\Lambda)$ es abeliano. Si $m \leqslant n-m$, la descripción ya no es tan nítida. Por ejemplo, si $n-m \geqslant 2m-1$, $UT_n^m(\Lambda)$ contiene a su centralizador, que es entonces su centro, y está descrito por las matrices de la forma (b) en la Figura 1, para las cuales $a_{11} = 1$. En efecto, si $i > j \geqslant m$ entonces $i > m+1$ y por (4.2), $a_{ij} = 0$. Si $i > j$ y $m > j$ entonces $j < 2m-1 \leqslant n-m$ y por (4.1), $a_{ij} = 0$. Si $i < j < i+m$, consideremos dos casos.

Primer caso: $m+1 \leqslant i$, que por (4.2) implica $a_{ij} = 0$.

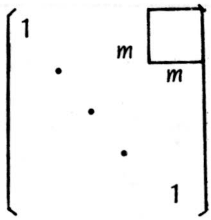
Segundo caso: $i \leqslant m$ que exige $i+m \leqslant 2m$ y puesto que $j < i+m$, resulta $j \leqslant i+m-1 \leqslant 2m-1 \leqslant n-m$. Luego por (4.1), $a_{ij} = 0$. Finalmente, como $A \in AT_n^m(\Lambda)$, tenemos $a_{ii} = 1$ para todo $i = 1,\ldots,n$. Podemos pues enunciar el siguiente

2.3. COROLARIO. *Sea* $UT_n^m(\Lambda)$. *Entonces:*

(a) *Para* $m > n/2$, *el grupo* $UT_n^m(\Lambda)$ *es abeliano.*

(b) *Para* $m \leqslant (n+1)/3$, *el centro de* $UT_n^m(\Lambda)$ *coincide con su* *centralizador y sus elementos vienen descritos por* (4), *con* $a_{ii} = 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$. *En particular, el centro de* $UT_n(\Lambda) = UT_n^1(\Lambda)$ *es* $UT_n^{n-1}(\Lambda) = \{T_{1n}(a) \mid a \in \Lambda\}$. ▲

Gráficamente, las matrices del caso (b) en el corolario anterior difieren de la matriz identidad en un bloque superior derecho de orden m:



Los resultados anteriores permiten calcular el número de elementos del centro $Z = Z(UT_n^m(\Lambda))$ cuando Λ es un anillo finito. En efecto, tenemos el siguiente

2.4. COROLARIO. *Sea* Λ *un anillo finito y denotamos con* $|\Lambda|$ *su número de elementos. Si* $|Z|$ *designa al número de elementos de* Z, *entonces:*

(a) *Si* $m > n/2$, $|Z| = |\Lambda|^{(n-m+1)(n-m)/2}$.

(b) *Si* $m \leqslant (n+1)/3$, $|Z| = |\Lambda|^{m^2}$.

(c) *Si* $(n+1)/3 < m \leqslant n/2$, $|Z| = |\Lambda|^t$, *donde*

$$t = [2m^2 - (3m-n-1)(3m-n)]/2.$$

Demostración. (a) y (b) son consecuencias de las respectivas partes (a) y (b) del corolario anterior. Puesto que Z es la intersección de $UT_n^m(\Lambda)$ con su centralizador, entonces para probar (c) basta contar el número de puntos t, del retículo conformado por la intersección del retículo triangular de $UT_n^m(\Lambda)$, y el retículo cuadrado del centralizador (ver Figura 1,(b)). La Figura 2 nos ayuda en el cálculo de t. El triángulo mayor representa a $UT_n^m(\Lambda)$, el cuadrado más grande a su centralizador y la región sombreada al centro Z:

La hipotenusa del triángulo mayor de la Figura 2 corresponde a la primera diagonal no nula (no principal) de

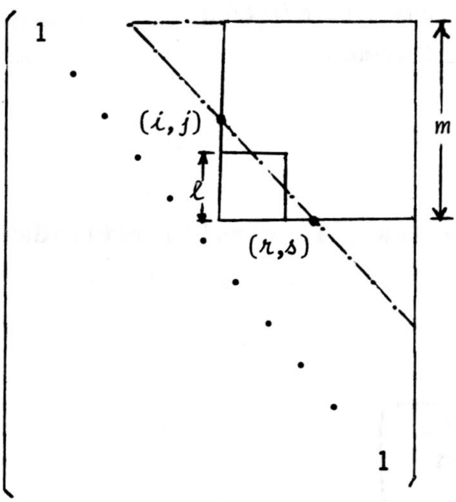


Figura 2

$UT_n^m(\Lambda)$. Según (3), la diferencia entre los índices de columna y fila de esta diagonal es m. Con ayuda de esto, y de la Figura 1 (b), obtenemos el valor de i (y de s) en la Figura 2: Puesto que $j = n-m+1$, entonces $i = n-2m+1$ (análogamente, como $r = m$ entonces $s = 2m$). Considérese por último el cuadrado pequeño de tamaño $\ell = m-i = 3m-n-1$. Entonces, el número de puntos t del retículo de la región sombreada es

$$t = m^2 - \left(\frac{\ell^2-\ell}{2} + \ell\right) = [2m^2 - (3m-n-1)(3m-n)]/2. \qquad \blacktriangle$$

Finalmente, el autor quiere expresar sus agradecimientos al revisor científico por sus acertadas sugerencias.

BIBLIOGRAFIA

[1] Faith, C., *Algebra: Ring, Modules and Categories I*, Die Grundlehren der Math. Wissenschaften, Band 190 Berlin: Springer-Verlag, 1973.

[2] Levcuk, V.M., *Automorphisms of some nilpotent matrix-groups and rings*. Soviet Math. Dokl. **16** (1975), 756-760.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
BOGOTA. D.E. Colombia

(Recibido en mayo de 1988, la versión revisada en septiembre de 1988).