Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXIV (1990), págs. 15-23

SOBRE LA TRANSFORMACION INTEGRAL DE HANKEL-SCHWARTZ DE FUNCIONES GENERALIZADAS

por

Jorge J. BETANCOR

Abstract. In this paper we study the Hankel-Schwartz transformations on certain spaces of testing functions denoted by $T(\lambda,\mu)$. Moreover, we define the generalized Hankel-Schwartz transforms on the spaces $T'(\lambda,\mu)$ (duals of $T(\lambda,\mu)$) of distributions.

§1. Introducción. La transformación de Hankel-Schwartz, también llamada de Bessel, está definida por

$$B_{\nu,1}(f)(y) = \int_0^\infty x^{2\nu+1} b_\nu(xy) f(x)\,dx, \qquad \nu > -\frac{1}{2} \tag{1}$$

donde $b_\nu(z) = z^{-\nu} J_\nu(z)$, siendo J_ν la función de Bessel de primera especie y de orden ν. Una primera fórmula de inversión para esta transformación integral se debe a A.L. Schwartz [10], la cual ha sido recientemente modificada por J.M. Méndez [6].

Al parecer los primeros que estudiaron la transforma-

Palabras claves: Transformación integral de Hankel-Schwartz, Bessel, funciones generalizadas, igualdad de Parseval.

Clasificación A.M.S. (1980): 46F12.

ción $B_{\nu,1}$ en un espacio de distribuciones fueron L.S. Dube y J.N. Pandey [3]. Más tarde, W.Y. Lee [4] definió la transformación $B'_{\nu,1}$ generalizada empleando un procedimiento esencialmente diferente al seguido por Dube y Pandey [3]. Los resultados de Lee han sido considerablemente mejorados por A. Schuitman [8], G. Altenburg [1], J.M. Méndez [5] y A.M. Sánchez [7].

En este trabajo consideramos los espacios $T(\lambda,\mu)$ de funciones prueba de naturaleza similar a los introducidos por B.L.J. Braaksma y A. Schuitman [2], siendo estudiada la transformación $B_{\nu,1}$ sobre tales espacios. Se prueba, entre otros resultados, que si $\lambda < \nu + \frac{1}{2}$, $\nu + \frac{3}{2} < \mu$ y $\nu > -\frac{1}{2}$, $B_{\nu,1}$ es un isomorfismo de $T(\lambda,\mu)$ en $T(2+2\nu-\mu, 2+2\nu-\lambda)$.

Siguiendo las ideas desarrolladas por Méndez en [5] y con objeto de definir las correspondientes transformaciones generalizadas de Bessel, la transformación $B_{\nu,2}$ definida por

$$B_{\nu,2}(f)(y) = y^{2\nu+1}\int_0^\infty b_\nu(xy) f(x)\,dx \tag{2}$$

es, así mismo, estudiada sobre los espacios $T(\lambda,\mu)$.

Tras probar que las transformaciones $B_{\nu,1}$ y $B_{\nu,2}$ satisfacen la igualdad mixta de Parseval

$$\int_0^\infty f(x) B_{\nu,2}(g)(x)\,dx = \int_0^\infty B_{\nu,1}(f)(y) g(y)\,dy \tag{3}$$

siempre que $f \in T(\lambda,\mu)$, $g \in T(\lambda-2\nu-1, \mu-2\nu-1)$ con $\lambda < \nu + \frac{3}{2} < \mu$, la transformación generalizada $B'_{\nu,1}f$ de $f \in T'(1-\mu, 1-\lambda)$ es definida como la adjunta de la transformación $B_{\nu,2}$, esto es

$$\langle B'_{\nu,1}f, \phi\rangle = \langle f, B_{\nu,2}\phi\rangle, \quad \forall\phi \in T(\lambda-2\nu-1, \mu-2\nu-1) \tag{4}$$

Por otra parte, la transformación generalizada $B'_{\nu,2}f$ de $f \in T'(2\nu+2-\mu, 2\nu+2-\lambda)$ se define por

$$\langle B'_{\nu,2}f, \phi\rangle = \langle f, B_{\nu,1}\phi\rangle, \quad \forall\phi \in T(\lambda,\mu) \tag{5}$$

Nótese que las definiciones (4) y (5) representan extensiones de la igualdad de Parseval (3)

Será de interés en el desarrollo posterior la siguiente propiedad de la función $b_\nu(z)$,

$$\frac{d}{dx}(z^{\nu}b_{\nu}(xy)) = z^{2\nu-1}b_{\nu-1}(xy) \ . \qquad (6)$$

Así mismo, resultan útiles los comportamientos de la función $b_{\nu}(z)$ cerca del origen y del infinito que siguen

$$b_{\nu}(z) = O(1), \quad \text{cuando } z \to 0 \qquad (7)$$

$$b_{\nu}(z) \cong z^{-\nu-(1/2)}, \text{ cuando } z \to \infty \ . \qquad (8)$$

§2. El espacio de funciones $T(\lambda,\mu)$ y su dual. Sean λ y $\mu \in \mathbb{R}$, con $\lambda < \mu$ y $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales que satisfacen las siguientes condiciones

a) $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente y converge a λ, cuando $n \to \infty$.

b) $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente y converge a μ, cuando $n \to \infty$.

c) $\lambda_n < \mu_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Una función ϕ definida sobre el intervalo $I = (0,\infty)$ está en $T(\lambda,\mu)$ si

$$\eta_{n,k}^{\lambda,\mu}(\phi) = \sup_{\substack{x\in I \\ c\in(\lambda_n,\mu_n)}} |x^c \delta_x{}^k \phi(x)|$$

existe para cada $n,k \in \mathbb{N}$. Aquí, δ_x denota el operador $x\frac{d}{dx}$. Este conjunto dotado con la topología generada por la familia de seminormas $\{\eta_{n,k}^{\lambda,\mu}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo y Hausdorff. Además, argumentos usuales permiten probar que $T(\lambda,\mu)$ es un espacio de Fréchet que contiene al conjunto $\mathcal{D}(I)$ ([9]) de funciones de soporte compacto contenido en I, siendo esta inclusión continua. Conviene, así mismo, señalar que la topología del espacio $T(\lambda,\mu)$ es independiente de las sucesiones $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ escogidas, siempre que estas satisfagan las condiciones (a),(b) y (c).

Como es usual, $T'(\lambda,\mu)$ denota el espacio dual de $T(\lambda,\mu)$, el cual está dotado con la topología débil.

Espacios de funciones de similar estructura a $T(\lambda,\mu)$

pueden ser encontrados en los trabajos de Braaksma y Schuitman [2], Schuitman [8] y Zemanian [13], entre otros.

§3. El espacio $T(\lambda,\mu)$ y las transformaciones de Hankel-Schwartz. La transformación integral $B_{\nu,1}$ de Hankel-Schwartz viene dada por (1). En virtud de (7) y (8) cabe garantizar que la integral que define (1) es absolutamente convergente cuando $\phi \in T(\lambda,\mu)$, siempre que $\nu+\frac{3}{2}<\mu$, $\lambda<2\nu+2$ y $\lambda<\mu$.

Por otra parte, haciendo uso de la propiedad (6) y aplicando la regla de integración por partes, se sigue

$$\int_a^b x^{2\nu+1} b_\nu(xy)\phi(x)\,dx$$

$$= (xy)^{2\nu+2} b_{\nu+1}(xy)y^{-2\nu-2}\phi(x)\Big]_a^b - y^{-2\nu-2}\int_a^b (xy)^{2\nu+2} b_{\nu+1}(xy)\mathcal{D}\phi(x)\,dx$$

para cada $0<a<b<\infty$. De aquí se deduce que si $\nu+\frac{3}{2}<\mu$, $\lambda<2\nu+2$ y $\lambda<\mu$,

$$B_{\nu,1}(\phi)(y) = -\int_0^\infty x^{2\nu+1} b_{\nu+1}(xy)\,\delta\phi(x)\,dx$$

para cada $\phi \in T(\lambda,\mu)$.

Reiterando el proceso puede probarse que si $\phi \in T(\lambda,\mu)$,

$$B_{\nu,1}(\phi)(y) = (-1)^n\int_0^\infty x^{2\nu+1} b_{\nu+n}(xy)(\delta-2n-2)\ldots(\delta-2)\delta\phi(x)\,dx \qquad (9)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, siempre que $\lambda<\mu$, $\lambda<2\nu+2$ y $\mu>\nu+\frac{3}{2}$.

Sea, entonces, $\phi \in T(\lambda,\mu)$ donde $\nu+\frac{3}{2}<\mu<2\nu+2$ y $\lambda<\mu$. En virtud de (9) se tiene que

$$\delta_y B_{\nu,1}(\phi)(y) = (-1)^n\int_0^\infty x^{2\nu+1}\delta_x(b_{\nu+n}(xy))(\delta-2n-2)\ldots(\delta-2)\delta\phi(x)\,dx$$

$$= (-1)^n x^{2\nu+2} b_{\nu+n}(xy)(\delta-2n-2)\ldots(\delta-2)\delta\phi(x)\Big]_0^\infty$$

$$+ (-1)^{n+1}\int_0^\infty x^{2\nu+1} b_{\nu+n}(xy)(\delta+2\nu+1)(\delta-2n-2)\ldots(\delta-2)\delta\phi(x)\,dx$$

Por tanto, atendiendo a las restricciones impuestas a los parámetros,

$$\delta_y B_{\nu,1}(\phi)(y) = (-1)^{n+1}\int_0^\infty x^{2\nu+1} b_{\nu+n}(xy)(\delta+2\nu+1)(\delta-2n-2)\ldots(\delta-2)\delta\phi(x)\,dx$$

y, en general, para cada $n,k \in \mathbb{N}$,

$$\delta_y{}^k B_{\nu,1}(\phi)(y) = (-1)^{n+k}\int_0^\infty x^{2\nu+1} b_{\nu+n}(xy)(\delta+2\nu+1)^k(\delta-2n-2)\ldots(\delta-2)\delta\phi(x)dx.$$

Consideremos ahora $c \in (2-\mu_m+2\nu, 2-\lambda_m+2\nu)$, para cierto $m \in \mathbb{N}$. Se tiene,

$$y^c\delta_y{}^k B_{\nu,1}(\phi)(y)$$
$$= (-1)^{n+k}\int_0^\infty x^{2\nu+1-c}(xy)^c b_{\nu+n}(xy)(\delta+2\nu+1)^k(\delta-2n-2)\ldots(\delta-2)\delta\phi(x)dx$$

Recordando, de nuevo, (7) y (8), puede deducirse que existe una constante $K = K(n,m) > 0$, tal que

$$|z^c b_{\nu+n}(z)| < K, \quad \text{para } 0 < z < \infty \text{ y } c \in (2-\mu_m+2\nu, 2-\lambda_m+2\nu).$$

Si tomamos $c_1 \in (\lambda_{m+2}, \lambda_{m+1})$ y $c_2 \in (\mu_{m+1}, \mu_{m+2})$ y escribimos,

$$|y^c\delta_y{}^k B_{\nu,1}(\phi)(y)| \leq K\int_0^\infty x^{2\nu+1-c}|(\delta+2\nu+1)^k(\delta-2n-2)\ldots\delta\phi(x)|dx$$
$$\leq K\int_0^1 x^{2\nu+1-c-c_1}x^{c_1}|(\delta+2\nu+1)^k(\delta-2n-2)\ldots\delta\phi(x)|dx$$
$$+ K\int_1^\infty x^{2\nu+1-c-c_2}x^{c_2}|(\delta+2\nu+1)^k(\delta-2n-2)\ldots\delta\phi(x)|dx,$$

teniendo en cuenta que

$$2\nu+1-c-c_1 > -1+\lambda_m-\lambda_{m+1} \quad \text{y} \quad 2\nu+1-c-c_2 < -1+\mu_m-\mu_{m+1}$$

se infiere:

$$\eta_{m,k}^{2+2\nu-\mu,2+2\nu-\lambda}(B_{\nu,1}(\phi)) \leq M(n,m)\sum_{i=0}^{k=n}\eta_{n+2,i}^{\lambda,\mu}(\phi).$$

Los resultados anteriores pueden resumirse en el siguiente

TEOREMA 1. *La transformación $B_{\nu,1}$ es una aplicación lineal y continua de $T(\lambda,\mu)$ en $T(2+2\nu-\mu, 2+2\nu-\lambda)$, siempre que $\lambda < 2\nu+2$, $\nu > -\frac{1}{2}$ y $\mu > \nu+\frac{3}{2}$.*

Méndez [6] estableció el siguiente teorema de inversión para la transformación $B_{\nu,1}$.

TEOREMA 2. *Sea $\nu \geq -\frac{1}{2}$, si $y^{\nu+(1/2)}f(y) \in L_1(0,\infty)$, entonces:*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda u^{2\nu+1}b_\nu(xu)du\int_0^\infty y^{2\nu+1}b_\nu(uy)f(y)dy = \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$$

en todo punto $y = x$ *en el que* $f(y)$ *sea de variación acotada.*

En virtud de este resultado cabe asegurar que si $\lambda < \nu + \frac{3}{2} < \mu$ y $\nu > -\frac{1}{2}$, la fórmula de inversión recogida en el Teorema 2 es válida para $f \in T(\lambda,\mu)$. Además, puede ser deducido del Teorema 1, el siguiente

TEOREMA 3. *Si* $\lambda < \nu + \frac{1}{2}$, $\nu + \frac{3}{2} < \mu$ *y* $\nu > -\frac{1}{2}$, *la transformación* $B_{\nu,1}$ *es un isomorfismo de* $T(\lambda,\mu)$ *en* $T(2+2\nu-\mu, 2+2\nu-\lambda)$, *siendo* $B_{\nu,1}^{-1} = B_{\nu,1}$.

Por otra parte, dado que la transformación $B_{\nu,2}$ satisface la relación

$$B_{\nu,2}(\phi)(y) = y^{2\nu+1} B_{\nu,1}(x^{-2\nu-1}\phi)(y)$$

es posible deducir de los teoremas 1 y 3 relativos a la transformación $B_{\nu,1}$, el que sigue.

TEOREMA 4. a) $B_{\nu,2}$ *es una aplicación lineal y continua de* $T(\lambda-2\nu-1, \mu-2\nu-1)$ *en* $T(1-\mu, 1-\lambda)$ *siempre que* $\lambda < 2\nu+2$, $\nu \geq -\frac{1}{2}$, $\mu > \nu + \frac{3}{2}$ *y* $\lambda < \mu$.

b) *La transformación* $B_{\nu,2}$ *es un isomorfismo de* $T(\lambda-2\nu-1, \mu-2\nu-1)$ *en* $T(1-\mu, 1-\lambda)$ *siempre que* $\lambda < \nu + \frac{1}{2}$, $\nu + \frac{3}{2} < \mu$ *y* $\nu > -\frac{1}{2}$, *siendo* $B_{\nu,2}^{-1} = B_{\nu,2}$.

§4. Las transformaciones generalizadas de Hankel-Schwartz.

Esta sección está dedicada al estudio de las transformaciones generalizadas de Hankel-Schwartz sobre los espacios $T'(\lambda,\mu)$ de funciones generalizadas.

Una igualdad mixta de Parseval en la que se fundamentan las definiciones adoptadas para las transformaciones generalizadas en cuestión es la que a continuación se prueba.

TEOREMA 5. *Si* $f \in T(\lambda,\mu)$ *y* $g \in T(\lambda-2\nu-1, \mu-2\nu-1)$, *entonces*

$$\int_0^\infty f(x)B_{\nu,2}(g)(x)dx = \int_0^\infty B_{\nu,1}(f)(y)g(y)dy \qquad (10)$$

siempre que $\lambda < \nu + \frac{3}{2} < \mu$.

Para probar (10) es suficiente tener en cuenta que, si $f \in T(\lambda,\mu)$ y $g \in T(\lambda-2\nu-1,\mu-2\nu-1)$ entonces $x^{\nu+(1/2)}f(x)$ y $x^{-\nu-(1/2)}g(x)$ pertenecen a $L_1(0,\infty)$, bajo las condiciones impuestas a los parámetros.

Motivados por la igualdad (10) definimos la transformación $B'_{\nu,1}$ generalizada sobre $T'(1-\mu,1-\lambda)$ como la adjunta de $B_{\nu,2}$ en $T(\lambda-2\nu-1,\mu-2\nu-1)$, esto es:

$$\langle B'_{\nu,1}f,\phi\rangle = \langle f,B_{\nu,2}\phi\rangle \qquad (11)$$

para cada $f \in T'(1-\mu,1-\lambda)$ y $\phi \in T(\lambda-2\nu-1,\mu-2\nu-1)$.

Nótese que (11) es una extensión de (10) a funciones generalizadas.

En virtud del Teorema 4, haciendo uso de conocidas propiedades de los operadores en espacios de Fréchet, es posible establecer el siguiente

TEOREMA 6. *Si* $\lambda < \nu + \frac{1}{2}$, $\nu + \frac{3}{2} < \mu$ *y* $\nu > -\frac{1}{2}$, *entonces* $B'_{\nu,1}$ *es un isomorfismo de* $T'(1-\mu,1-\lambda)$ *en* $T'(\lambda-2\nu-1,\mu-2\nu-1)$. *Por otra parte, si* $f \in T(\lambda,\mu)$, *entonces* f *define una distribución regular en* $T'(1-\mu,1-\lambda)$, *mediante la expresión:*

$$\langle f,\phi\rangle = \int_0^\infty f(x)\phi(x)dx, \quad \textit{para cada } \phi \in T(1-\mu,1-\lambda) \ .$$

En efecto, basta observar que existe una constante $M > 0$ tal que

$$|\langle f,\phi\rangle| < M\eta_{n,0}^{\lambda,\mu}(f)\eta_{n+2,0}^{1-\mu,1-\lambda}(\phi), \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

En este sentido, $T(\lambda,\mu) \subset T'(1-\mu,1-\lambda)$.

Por tanto, si $f \in T(\lambda,\mu)$ podemos definir para f dos transformaciones distintas, una clásica, por (1), y otra generalizada, por (11). En adecuadas condiciones (las impuestas en el Teorema (6)) cabe establecer la coincidencia de ambas definiciones en el sentido de la igualdad en $T'(\lambda-2\nu-1,\mu-2\nu-1)$.

Ciertamente, atendiendo a la igualdad mixta de Parseval (10), se tiene:

$$<B'_{\nu,1}f,\phi> = <f,B_{\nu,2}\phi> = \int_0^\infty f(x)B_{\nu,2}(\phi)(x)dx$$

$$= \int_0^\infty B_{\nu,1}(f)(y)\phi(y)dy = <B_{\nu,1}f,\phi>,$$

para cada $\phi \in T(\lambda-2\nu-1,\mu-2\nu-1)$.

De forma análoga, la transformación generalizada $B'_{\nu,2}f$, de $f \in T'(2\nu+2-\mu,2\nu+2-\lambda)$, se define por

$$<B'_{\nu,2}f,\phi> = <f,B_{\nu,1}\phi>, \quad \text{para cada } \phi \in T(\lambda,\mu) .$$

Pueden establecerse para $B'_{\nu,2}$ propiedades similares a las presentadas para la transformación $B'_{\nu,1}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Altenburg, G., *Bessel transformationen in Raumen von Grundfunctionen über dem intervall* $\Omega = (0,\infty)$ *und derem dual Raumen*, Math. Nachr. 108, (1982), 197-218.

[2] Braaksma, B.L.J. y Schuitman, A., *Some classes of Watson transforms and related integral equations for generalized functions*, SIAM J. Math. Anal., 7,(1976), 771-798.

[3] Dube, L.S. y Pandey, J.N., *On the Hankel transforms of distributions*, Tohoku Math. J., (1975), 337-354.

[4] Lee, W.Y., *On Schwartz's Hankel transformation of certain spaces of distributions*, SIAM J. Math. Anal. **6**, (1975), 427-432.

[5] Méndez, J.M., *A mixed Parseval equation and the generalized Hankel transformation*, Proc. Amer. Math. Soc., 102 (3) (1988), 619-624.

[6] Méndez, J.M., *On the Bessel transforms of arbitrary order*, Math. Nachr., 136 (1988), 233-239.

[7] Sánchez, A.M., "La transformación integral de Hankel-Schwartz en espacios de funciones generalizadas", Tesis Doctoral, Dept. de Análisis Matemático, Univ. de La Laguna, La Laguna, 1988.

[8] Schuitman, A., "A class of integral transforms and associated function spaces", Tesis Doctoral, Technische Wetenschapten, Technische Hogeschool Delft, 1985.

[9] Schwartz, L., *Theorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[10] Schwartz, A.L., *An inversion theorem for Hankel trans-*

forms, Proc. Amer. Math. Soc., 22, (1969),713-717.

[11] Titchmarsh, E.C., *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1948.

[12] Watson, G.N., *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1958.

[13] Zemanian, A.H., *Generalized integral transformation*, Interscience Publishers, New York, 1968.

*

Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad de La Laguna
La Laguna (Tenerife)
Canary Islands, Spain.

(Recibido en junio de 1988, la versión revisada en mayo de 1989).