Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXIV (1990), págs. 81-97

AXIOMATIZACION DE LOGICAS MONADICAS CON VARIOS CUANTIFICADORES CARDINALES

por

Xavier CAICEDO y Juan M. LESMES

Resumen: Se axiomatizan las lógicas que resultan de añadir a la lógica monádica de primer orden varios cuantificadores cardinales Q_α (existen al menos ω_α...). La completitud de los sistemas se obtiene via formas normales, las cuales permiten también dar sencillas demostraciones de propiedades ya conocidas de dichas lógicas como decibilidad, interpolación y un teorema de Väänänen sobre eliminación de cuantificadores de segundo orden.

Abstract: We axiomatize all logics which result from adjoining to first order monadic logic any family of cardinality quantifiers Q_α (there are at least ω_α many...). Completeness is shown using normal forms, from which we obtain also very simple proofs of previously known properties of these logics, as decidability, interpolation, and a theorem of Väänänen on the elimination of second order quantifiers.

Introducción. Dada la imposibilidad de distinguir cardinales infinitos en la lógica de primer orden, $L_{\omega\omega}$, demostrada por los teoremas de Löwenheim y Skolem, Mostowski (1957) introdujo nuevos cuantificadores Q_α con sintaxis análoga a la del cuantificador existencial y con el significado intuitivo:

"existen al menos ω_α... " , donde ω_α denota el α-ésimo cardinal infinito. Así, $Q_0 x\phi(x)$ significa "existen infinitos elementos que cumplen $\phi(x)$", $Q_1 x\phi(x)$ significa "existe una cantidad no enumerable de individuos que satisfacen $\phi(x)$", etc. Estos cuantificadores son llamados *cuantificadores cardinales*. A la lógica que resulta de añadir a $L_{\omega\omega}$ el cuantificador Q_α se la denota $L_{\omega\omega}(Q_\alpha)$, y en general $L_{\omega\omega}(Q_{\alpha_i} \mid i \in I)$ a la que extiende $L_{\omega\omega}$ con los cuantificadores Q_{α_i}, $i \in I$. El propósito del presente trabajo es describir sistemas axiomáticos completos para los fragmentos monádicos de estas lógicas, los cuales denotaremos por $M_{\omega\omega}(Q_{\alpha_i} \mid i \in I)$. El fragmento monádico de una lógica es aquel que además de la igualdad solo admite símbolos de predicado monádico.

Son escasas las lógicas para las cuales se conocen sistemas axiomáticos explícitos. Keisler (1971) dió un sistema muy elegante para $L_{\omega\omega}(Q_1)$. Por el contrario, no puede haber un sistema completo para $L_{\omega\omega}(Q_0)$, ni en general para $L_{\omega\omega}(Q_0, Q_{\alpha_1}, \ldots, Q_{\alpha_n})$ por el teorema de incompletitud de Gödel; y para $L_{\omega\omega}(Q_{\alpha_1}, \ldots, Q_{\alpha_n})$ con $\alpha_i \geqslant 1$, $n \geqslant 2$, no se ha podido demostrar que existan, a no ser en ciertos casos o bajo suposiciones sobre cardinales como la Hipótesis del Continuo.

El caso monádico es diferente. El sistema de Keisler da evidentemente una axiomatización para $M_{\omega\omega}(Q_1)$, y no es difícil ver que substituyendo Q_1 por Q_α esta axiomatización sirve para cualquier $M_{\omega\omega}(Q_\alpha)$, *incluyendo* $\alpha = 0$. En Fajardo (1980) se demuestra que las lógicas $M_{\omega\omega}(Q_{\alpha_1}, \ldots, Q_{\alpha_n})$ son decidibles para ordinales arbitrarios α_i, lo cual implica su axiomatibilidad en un sentido generalizado. Sin embargo no se desprende de la prueba ahí dada un sistema axiomático explícito. Obtenemos en este artículo sistemas muy sencillos y naturales, afines al de Slomnson (1968) para el cuantificador de Chang.

Para demostrar la completitud del sistema axiomático propuesto utilizamos la existencia de formas normales a las cuales cualquier fórmula puede ser reducida deductivamente. Estas formas normales cuya existencia a nivel semántico es bastante clara, han sido utilizadas por Flum (1985) para estudiar el problema de la compacidad de las lógicas discutidas.

§1. El sistema axiomático. Por simplicidad trabajaremos con todos los cuantificadores cardinales a la vez y supondremos que además de los símbolos lógicos de primer orden: $=$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\equiv$, $\forall$, $\exists$, tenemos un símbolo de cuantificador Q_α para cada ordinal α. Referimos al lector a Bell y Slomnson (1969) o algún otro texto similar para los detalles de la definición del lenguaje y la semántica de $M_{\omega\omega}(Q_\alpha \mid \alpha \in On)$. En particular, las *fórmulas atómicas* son de la forma $x=w$ ó $p(x)$, donde x y w son variables y p es símbolo de predicado monádico; si ϕ es *fórmula*, x variable y α ordinal, entonces $Q_\alpha x\phi$ es una fórmula. Trabajaremos con un conjunto finito $\{p_1,\ldots,p_s\}$ de predicados monádicos.

Las nociones de *variable libre* o *ligada* en una fórmula son análogas a las de $L_{\omega\omega}$, así x está ligada en $Q_\alpha x\phi$. La expresión $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ se usará para indicar que las variables libres de la fórmula ϕ están entre $x_1,\ldots,x_n$, y en tal contexto, $\phi(y_1,\ldots,y_n)$ denota el resultado de substituir en ϕ las ocurrencias libres de x_i por y_i. Siempre que realicemos tal substitución supondremos sin mencionarlo que cada y_i es libre para x_i en la fórmula $\phi(x_1,\ldots,x_n)$.

Si $\mathfrak{A} = (A, p_1^{\mathfrak{A}},\ldots,p_s^{\mathfrak{A}})$ es una estructura monádica, es decir $A \neq \emptyset$, $p_i^{\mathfrak{A}} \subseteq A$, la definición de verdad en $\mathfrak{A}$ para fórmulas cuyos predicados están entre $p_1,\ldots,p_s$ está dada por las reglas semánticas usuales para $L_{\omega\omega}$ más la siguiente:

Dada $\phi(x,y_1,\ldots,y_n)$, $\mathfrak{A} \models Q_\alpha x\phi[a_1,\ldots,a_n]$ si y sólo si $\{a \in A \mid \mathfrak{A} \models \phi[a,a_1,\ldots,a_n]\}$ tiene cardinal mayor o igual a ω_α. Una fórmula $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ es *válida* si para toda estructura monádica $\mathfrak{A}$ se tiene $\mathfrak{A} \models \forall x_1\ldots\forall x_n\phi$.

Nuestro sistema axiomático (MI) para $M_{\omega\omega}(Q_\alpha \mid \alpha \in I)$, donde I es una clase de ordinales, constará de:

I. Axiomas y reglas completas para $L_{\omega\omega}$ ampliadas de manera que incluyan las nuevas fórmulas (véase, por ejemplo, Bell y Slomnson (1969)).

II. Para cada $\alpha,\beta \in I$ los esquemas adicionales:

A1. $\mathcal{Q}_\alpha x\phi(x,..) \equiv \mathcal{Q}_\alpha y\phi(y,..)$, si y no ocurre en $\phi(x,..)$

A2. $\forall x(\phi \to \psi) \to (\mathcal{Q}_\alpha x\phi \to \mathcal{Q}_\alpha x\psi)$

A3. $\neg\, \mathcal{Q}_\alpha x(x=v)$, si x y v son variables distintas

A4. $\mathcal{Q}_\alpha x(\phi \vee \psi) \to (\mathcal{Q}_\alpha x\phi \vee \mathcal{Q}_\alpha x\psi)$

A5. $\mathcal{Q}_\beta x\phi \to \mathcal{Q}_\alpha x\phi$, si $\alpha < \beta$.

La validez de los axiomas y por tanto del sistema MI para la interpretación cardinal de los cuantificadores es evidente. En seguida desarrollaremos algunas consecuencias formales del sistema que necesitaremos más adelante. La notación $\vdash \phi$ indicará que ϕ se deduce en MI. Escribiremos CP para indicar que un paso en una deducción se justifica por las reglas deductivas de la lógica de primer orden, las cuales utilizaremos libremente y sin entrar en detalles. También utilizaremos las convenciones y abreviaciones sintácticas corrientes en el cálculo de predicados, en particular la siguiente:

$\exists^{\geqslant n} x\phi(x)$ abreviará $\exists x_1 .. \exists x_n (\bigwedge_{i\leqslant n} \phi(x_i) \wedge \bigwedge_{i<j\leqslant n} (x_i \neq x_j))$,

$\exists^{\geqslant 1} x\phi$ es entonces lo mismo que $\exists x\phi$. Los resultados del lema siguiente son muy sencillos pero los demostramos en cierto detalle para beneficio del lector.

LEMA 1. *Si* $\alpha \in I$ *entonces:*

a) $\vdash \forall x(\phi \equiv \psi) \to (\mathcal{Q}_\alpha x\phi \equiv \mathcal{Q}_\alpha x\psi)$.

b) $\vdash \mathcal{Q}_\alpha x(\phi_1 \vee ... \vee \phi_n) \equiv (\mathcal{Q}_\alpha x\phi_1 \vee ... \vee \mathcal{Q}_\alpha x\phi_n)$.

c) $\vdash \mathcal{Q}_\alpha x\phi \to \exists x\phi$.

d) $\vdash \mathcal{Q}_\alpha x(\phi \wedge \psi) \equiv \phi \wedge \mathcal{Q}_\alpha x\psi$, *si* x *no ocurre libre en* ϕ.

e) $\vdash \neg\mathcal{Q}_\alpha x(\phi \wedge x\neq x)$.

f) $\vdash \neg\mathcal{Q}_\alpha x(\phi \wedge x=v)$, *si* x *y* v *son variables distintas.*

g) $\vdash \mathcal{Q}_\alpha x(\phi \wedge x\neq v_1 \wedge ... \wedge x\neq v_n) \equiv \mathcal{Q}_\alpha x\phi$, *si* $v_1,...,v_n$ *son variables distintas de* x.

Demostración. a) Por el Axioma A2 y CP.

b) Para $n = 2$ una dirección es el Axioma A4. Para la otra tenemos consecutivamente:

$\vdash \forall x(\phi_i \to \phi_1 \vee \phi_2) \to (Q_\alpha x\phi_1 \to Q_\alpha x(\phi_1 \vee \phi_2))$ A2 $i = 1,2$

$\vdash Q_\alpha x\phi_i \to Q_\alpha x(\phi_1 \vee \phi_2)$ CP $i = 1,2$

$\vdash (Q_\alpha x\phi_1 \vee Q_\alpha x\phi_2) \to Q_\alpha x(\phi_1 \vee \phi_2)$, CP

el resto se sigue por inducción en n.

c) $\vdash \neg\exists x\phi \to \forall x(\phi \to x=v)$, v distinta de x CP

$\vdash \neg\exists x\phi \to (Q_\alpha x\phi \to Q_\alpha x(x=v))$ A2 y CP

$\vdash \neg\exists x\phi \to \neg Q_\alpha x\phi$ A3 y CP

$\vdash Q_\alpha x\phi \to \exists x\phi$. CP

d) Veamos primero la implicación de izquierda a derecha

$\vdash Q_\alpha x(\phi \wedge \psi) \to Q_\alpha x\phi \wedge Q_\alpha x\psi$ A2 y CP

$\vdash Q_\alpha x(\phi \wedge \psi) \to \exists x\phi \wedge Q_\alpha x\psi$ (c) y CP

$\vdash Q_\alpha x(\phi \wedge \psi) \to \phi \wedge Q_\alpha x\psi$, CP

ahora

$\vdash \phi \to \forall x(\psi \to \phi \wedge \psi)$ CP

$\vdash \phi \to (Q_\alpha x\psi \to Q_\alpha x(\phi \wedge \psi))$ A2 y CP

$\vdash (\phi \wedge Q_\alpha x\psi) \to Q_\alpha x(\phi \wedge \psi)$. CP

e) $\vdash \forall x(\phi \wedge x \neq x \to x=v)$, v distinta de x, CP

$\vdash Q_\alpha x(\phi \wedge x \neq x) \to Q_\alpha x(x=v)$ A2 y CP

$\vdash \neg Q_\alpha x(\phi \wedge x \neq x)$. A3 y CP

f) $\vdash Q_\alpha x(\phi \wedge x=v) \to Q_\alpha x(x=v)$ A2 y CP

$\vdash \neg Q_\alpha x(\phi \wedge x=v)$. A3 y CP

g) $\vdash Q_\alpha x\phi \equiv Q_\alpha x(\phi \wedge (x \neq v_1 \vee x=v_1))$ CP y (a)

$\equiv Q_\alpha x(\phi \wedge x \neq v_1) \vee Q_\alpha x(\phi \wedge x=v_1)$ CP y (b)

$\equiv Q_\alpha x(\phi \wedge x \neq v_1)$, CP y (f)

el resto sigue por inducción en n. ▲

LEMA 2. $\vdash \mathcal{Q}_\alpha x\phi \to \exists^{\geq n}x\phi$, *para toda* $n \in \mathbb{N}^+$.

Demostración. Por inducción en n. Para $n = 1$ es el Lema 1(c). Supongamos que vale para $n \geq 1$, entonces tomando una variable v que no ocurra en $\exists^{\geq n}x\phi(x)$ tenemos:

$\vdash \mathcal{Q}_\alpha x\phi(x)$	$\to \exists^{\geq n}x\phi(x) \wedge \mathcal{Q}_\alpha v\phi(v)$	A1 y CP
	$\to \mathcal{Q}_\alpha v(\exists^{\geq n}x\phi(x) \wedge \phi(v))$	Lema 1(d) y CP
	$\to \mathcal{Q}_\alpha v\exists^{\geq n}x(\phi(x) \wedge \phi(v))$	CP y Lema 1(a)
	$\to \mathcal{Q}_\alpha v\exists^{\geq n}x(\phi(x) \wedge \phi(v) \wedge v\neq x)$	Lema 1(g) y CP
	$\to \exists v\exists^{\geq n}x(\phi(x) \wedge \phi(v) \wedge v\neq x)$.	Lema 1(c) y CP

Es decir, $\vdash \mathcal{Q}_\alpha x\phi(x) \to \exists^{\geq n+1}x\phi(x)$. ▲

El siguiente esquema es válido en el cálculo de predicados y por lo tanto deducible en MI.

LEMA 3. *Si* v *es una variable distinta de* x, *y* $n \in \mathbb{N}^+$:
$\vdash \exists^{\geq n}x(\phi(x) \wedge x\neq v) \equiv \exists^{\geq n+1}x\phi(x) \vee (\exists^{\geq n}x\phi(x) \wedge \neg\phi(v))$.

COROLARIO. *Si* $v_1, v_2, \ldots, v_m$ *son distintas de* x, *entonces*

$$\exists^{\geq n}x(\phi(x) \wedge x \neq v_1 \wedge x \neq v_2 \wedge \ldots \wedge x \neq v_m)$$

es equivalente en MI *a una disyunción de conjunciones de fórmulas de la forma:* $\exists^{\geq n+k}x\phi(x)$, $\neg\phi(v_i)$, $v_i = v_j$, *con* $0 \leq k \leq m$, $1 \leq j < i \leq m$.

Demostración. Por inducción en m (para toda n), utilizando el Lema 3 y CP. ▲

§2. Formas normales. En adelante supondremos por simplicidad que el lenguaje contiene por lo menos un símbolo de predicado monádico p_1, y trabajaremos con un lenguaje fijo $p_1, \ldots, p_s$. Daremos el nombre de *regiones* (con respecto a

$p_1,\ldots,p_s,x)$ a las fórmulas de la forma $\pm p_1(x)\wedge\ldots\wedge\pm p_s(x)$, donde $\pm p_i(x)$ significa que $p_i(x)$ puede aparecer afirmada o negada en la conjunción. Las expresiones $R(x), R_1(x), R_2(x),\ldots$ denotarán siempre regiones. Introducimos también la notación unificada:

$$\exists^{\geqslant\omega_\alpha}x\phi \quad \text{por} \quad Q_\alpha x\phi,\ \alpha\in I$$

$$\exists^{\geqslant 0}x\phi \quad \text{por} \quad \exists x(\phi\leftrightarrow\phi).$$

De esta manera la expresión $\exists^{\geqslant\kappa}x\phi$ queda bien definida para todo cardinal κ.

TEOREMA 1. *Toda fórmula ϕ de $M_{\omega\omega}(Q_\alpha \mid \alpha\in I)$, con predicados entre $p_1,\ldots,p_s$, es equivalente en MI a una disyunción $\theta_1\vee\ldots\vee\theta_n$, con sus variables libres contenidas en las de ϕ, donde cada θ_r es una conjunción de la forma:*

$$\bigwedge_{j\in J}\pm\exists^{\geqslant\kappa_j}xR_j(x)\wedge\bigwedge_{k\in K}R_k(x_k)\wedge\bigwedge_{\ell\in L}\pm(v_\ell=w_\ell) \qquad (*)$$

y donde $\kappa_j\in\omega\cup\{\omega_\alpha \mid \omega_\alpha$ ocurre en $\phi\}$.

Llamaremos *forma normal cardinal* de ϕ a la fórmula garantizada por el teorema. Por supuesto, los conjuntos de indices J,K,L son finitos y pueden ser vacíos algunos de ellos. La misma región puede aparecer varias veces, afectada por varios cuantificadores.

Demostración. La prueba se hará por inducción en la complejidad de las fórmulas con respecto a los símbolos $\vee$, $\neg$, Q_α y $\exists$.

1. Si v, w son variables, entonces la fórmula atómica $p_i(v)$ se puede llevar en CP a su forma normal disyuntiva plena, es decir:

$$\vdash p_i(v)\equiv\bigvee(\pm p_1(v)\wedge\ldots\wedge\pm p_{i-1}(v)\wedge p_i(v)\wedge\pm p_{i+1}(v)\wedge\ldots\wedge\pm p_s(v))$$

donde la disyunción recorre todas las posibles combinaciones de signos, y ésta es una forma normal cardinal.

2. El paso inductivo para $\vee$ es trivial. Ahora suponga que ϕ es equivalente en MI a una forma normal cardinal $\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n$, entonces por el cálculo de proposiciones: $\vdash \neg \phi \equiv \theta'_1 \vee \ldots \vee \theta'_m$, pasando a forma normal disyuntiva, donde cada θ'_r tiene la forma:

$$\bigwedge_{s} \pm \exists^{\geq \kappa_s} R_s(x) \wedge \bigwedge_{t} \neg R_t(x_t) \wedge \bigwedge_{u} \pm (v_u = w_u).$$

Como $\neg R_t(x_t)$ es equivalente en CP a la disyunción de las regiones $R(x_t)$ distintas de $R_t(x_t)$, substituyendo y distribuyendo, tenemos: $\vdash \neg \phi \equiv \theta''_1 \vee \ldots \vee \theta''_t$ donde cada θ''_r tiene la forma exigida.

3. Sea ahora y una variable cualquiera, entonces bajo la hipótesis inductiva para ϕ tenemos

$$\begin{aligned} \vdash \mathcal{Q}_\alpha y \phi &\equiv \mathcal{Q}_\alpha y(\theta_1 \vee \ldots \vee \theta_n) && \text{Lema 1(a)} \\ &\equiv \mathcal{Q}_\alpha y \theta_1 \vee \ldots \vee \mathcal{Q}_\alpha y \theta_n && \text{Lema 1(b)}, \end{aligned}$$

sin pérdida de generalidad podemos suponer que $R(y)$ aparece en cada θ_r como parte de la conjunción para alguna región R, de lo contrario utilizamos la equivalencia $\vdash \theta_r \equiv (\bigvee_R R(y)) \wedge \theta_r$, donde la disyunción recorre todas las regiones, que es deducible en CP, y distribuimos para obtener nuevamente una forma normal cardinal. Bajo esta suposición y por el Lema 1(d), $\mathcal{Q}_\alpha y \theta_r$ es equivalente en MI a una fórmula de la forma:

$$\theta'_r \wedge \mathcal{Q}_\alpha y (\bigwedge_q R_q(y) \bigwedge_s \pm (y = w_s)) \tag{1}$$

donde θ'_r es la parte de θ_r que no contiene y libre. Ahora, la subfórmula de la derecha en (1) es equivalente en MI según los siguientes casos exhaustivos a:

i) Una fórmula inconsistente, si aparecen dos $R'_q s'$ distintas o la desigualdad $-(y = y)$, por el Lema 1(e) y el hecho de que dos regiones distintas son inconsistentes; o también en el caso en que aparece una igualdad $+(y = w_s)$ con w_s distinta de y, por el Lema 1(f). En este caso $\mathcal{Q}_\alpha y \theta_r$ es equivalente entonces a una fórmula inconsistente cualquiera y para tal efecto podemos tomar

$$\vdash \mathcal{Q}_\alpha y\theta_r \equiv \neg\exists^{\geqslant 0} xR_q(x).$$

ii) La fórmula $\mathcal{Q}_\alpha yR_q(y)$, si aparece una sola región y a lo sumo aparecen desigualdades $-(y = w_s)$ con w_s distinta de y, por el Lema 1(g). En este caso, por el Axioma 1:

$$\vdash \mathcal{Q}_\alpha y\theta_r \equiv \theta'_r \wedge \mathcal{Q}_\alpha xR_q(x).$$

En cualquier caso, obtenemos una fórmula de la forma (*) para cada $\mathcal{Q}_\alpha y\theta_r$ y así $\mathcal{Q}_\alpha y\phi$ resulta equivalente a una forma normal cardinal.

4. Consideremos ahora $\exists y\phi$. Con las mismas hipótesis de **3**, tenemos por CP:

$$\vdash \exists y\phi \equiv \exists y\theta_1 \vee \ldots \vee \exists y\theta_n$$

donde

$$\vdash \exists y\theta_r \equiv \theta'_r \wedge \exists y(\bigwedge_q R_q(y) \wedge \bigwedge_s \pm(y = w_s)).$$

La fórmula después de θ'_r es equivalente según los siguientes casos eshaustivos a:

i) $\neg\exists^{\geqslant 0} xR_q(x)$, si aparecen dos regiones distintas o aparece $-(y = y)$, pues resulta inconsistente en CP.

ii) $\bigwedge_q R_q(w_0) \wedge \bigwedge_{s \neq 0} \pm(w_0 = w_s)$, si aparece $+(y = w_0)$ con w_0 distinto de y, por CP.

iii) $\rho_1 \vee \ldots \vee \rho_m$, cada ρ_i una conjunción de fórmulas de la forma:

$$\exists^{\geqslant k} yR_q(y), \quad \neg R_q(w_t), \quad +(w_s = w_t),$$

por el corolario al Lema 3, si solamente aparece una región R_q y a lo sumo aparecen desigualdades $-(y = w_s)$ con w_s distinto de y, o la igualdad $(y = y)$. Expresando cada $R_q(w_t)$ como la disyunción de las demás regiones $R(w_t)$ distintas de $R_q(w_i)$, $\rho_1 \vee \ldots \vee \rho_n$ resulta equivalente por CP a una forma norma cardinal. Evidentemente la conjunción de θ'_r con (i), (ii) o (iii) es también equivalente a una forma normal cardinal (distribuyendo), por lo tanto lo mismo es cierto de $\exists y\theta_r$ y de la disyunción $\exists y\theta_1 \vee \ldots \vee \exists y\theta_n$.

Con lo anterior hemos terminado la demostración inductiva. Es fácil ver que en ningún paso se han introducido nuevas variables libres; por el contrario algunas variables libres pueden desaparecer en el proceso de hallar la forma normal cardinal. ▲

Si ϕ es una sentencia (fórmula sin variables libres), la forma normal cardinal de ϕ dada por el Teorema 1 tendrá la forma:

$$\bigwedge_j \pm \exists^{\geqslant \kappa_j} x\, R_j(x)\,.$$

Diremos que una tal forma normal cardinal $\theta_1 \vee \ldots \vee \theta_n$ es *plena* si: (i) en cada θ_r aparecen todas las regiones una o dos veces, (ii) si en alguna θ_r aparece dos veces una región R, está aparición será de la forma

$$\exists^{\geqslant \kappa} xR(x) \wedge \neg \exists^{\geqslant \kappa'} xR(x)$$

con $\kappa < \kappa'$.

TEOREMA 2. *Toda sentencia consistente en* MI *es equivalente en* MI *a una forma normal cardinal plena, cuyos cuantificadores cardinales están entre los de la sentencia original.*

Demostración. Supongamos que $\theta_1 \vee \ldots \vee \theta_n$ es una forma normal cardinal de ϕ. Agregamos la fórmula deducible $\exists^{\geqslant 0} xR(x)$ en cada conjunción θ_r en la que la región R no aparezca. En esta forma todas las regiones aparecen en cada θ_r afectadas por cuantificadores de la forma $\exists^{\geqslant \kappa}$ (*apariciones positivas*) o $\neg \exists^{\geqslant \mu}$ (*apariciones negativas*). Ahora, si $\kappa' < \kappa$, entonces

$$\vdash \exists^{\geqslant \kappa} x\phi \;\rightarrow\; \exists^{\geqslant \kappa'} x\phi\,,$$

esto se sigue de A5 y el Lema 2 para $\kappa \geqslant \omega$ y por CP para $\kappa < \omega$. Por lo tanto las apariciones positivas (si existen) pueden reducirse a la de cardinal máximo, y las negativas (si existen) pueden reducirse a la de cardinal mínimo. Cada θ_r es entonces equivalente a θ'_r donde cada R aparece en una y solo una de las formas:

1. $\exists^{\geqslant\kappa} xR(x)$

2. $\neg\exists^{\geqslant\kappa} xR(x)$

3. $\exists^{\geqslant\kappa} xR(x) \wedge \neg\exists^{\geqslant\kappa'} xR(x) \qquad \kappa < \kappa'$

4. $\exists^{\geqslant\kappa} xR(x) \wedge \neg\exists^{\geqslant\kappa'} xR(x) \qquad \kappa' \leqslant \kappa.$

La cuarta forma es inconsistente en MI y en tal caso θ'_r puede eliminarse de la disyunción por CP. Como ϕ es consistente, no todas las θ'_r serán eliminadas, y la disyunción de las que quedan es la forma buscada. ▲

§3. Completitud de MI. Introducimos la siguiente conveniente notación donde $\kappa < \kappa'$:

$$\exists^{[\kappa,\kappa')} x\phi \ := \exists^{\geqslant\kappa} x\phi \wedge \neg\exists^{\geqslant\kappa'} x\phi$$

$$\exists^{[\kappa,\infty)} x\phi \ := \exists^{\geqslant\kappa} x\phi\ ,$$

en particular tenemos: $\vdash \exists^{[0,\kappa)} x\phi \equiv \neg\exists^{\geqslant\kappa} x\phi.$

LEMA 4. *Dados* $\kappa_1 < \kappa_2 < \ldots < \kappa_n$ *con* $\kappa_i \in \mathrm{Card} \cup \{\infty\}$,

a) $\vdash \exists^{[\kappa_1,\kappa_n)} x\phi \equiv \bigvee_{1\leqslant i<n} \exists^{[\kappa_i,\kappa_{i+1})} x\phi.$

b) *Si* $\kappa_1 = 0$ *y* $\kappa_n = \infty$, $\vdash \bigvee_{1\leqslant i<n} \exists^{[\kappa_i,\kappa_{i+1})} x\phi.$

Demostración. a) Por CP, el Lema 2 y A5 :

$$\vdash \exists^{\geqslant\kappa_1} x\phi \wedge \neg\exists^{\geqslant\kappa_n} x\phi \equiv (\exists^{\geqslant\kappa_1} x\phi \wedge \neg\exists^{\geqslant\kappa_n} x\phi) \wedge (\exists^{\geqslant\kappa_2} x\phi \vee \neg\exists^{\geqslant\kappa_2} x\phi)$$

$$\equiv (\exists^{\geqslant\kappa_1} x\phi \wedge \neg\exists^{\geqslant\kappa_2} x\phi) \vee (\exists^{\geqslant\kappa_2} x\phi \wedge \neg\exists^{\geqslant\kappa_n} x\phi),$$

el resto sigue por inducción (si $\kappa_n = \infty$, $\neg\exists^{\geqslant\kappa_n} x$ no aparece). **b)** Como $\vdash \exists^{[0,\infty)} x\phi$, se sigue de (a). ▲

Con la anterior notación el Teorema 2 dice que toda sentencia consistente en MI es equivalente a una de la forma $\theta_1 \vee \ldots \vee \theta_n$ donde cada θ_r es una conjunción:

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq 2^s} \exists^{[\kappa_{ir}, \kappa'_{ir})} x R_i(x) \qquad (2)$$

con $\kappa_{ir} < \kappa'_{ir}$, y $R_1, R_2, \ldots, R_{2^s}$ una enumeración de todas las regiones con respecto a $p_1, \ldots, p_s$.

TEOREMA 3 (COMPLETITUD). *Toda sentencia válida de* $M_{\omega\omega}(Q_\alpha \mid \alpha \in I)$ *es deducible en* MI.

Demostración. Si ϕ es válida entonces es consistente por la validez de MI. Sea $\theta_1 \vee \ldots \vee \theta_n$ una forma normal cardinal plena de ϕ con cada θ_r de la forma (2). Para cada región R_i ordenamos el conjunto de los cardinales que aparecen en los extremos de los intervalos cuantificacionales que afectan a R_i en dada una de las θ_r, digamos:

$$m_{i1} < m_{i2} < \ldots < m_{in_i}, \quad m_{ij} \in \text{Card} \cup \{\infty\}. \qquad (3)$$

Por la validez de ϕ, m_{i1} debe ser 0, de lo contrario tomando un modelo $\mathfrak{A}$ con $R_i^{\mathfrak{A}} = \emptyset$, tendríamos $\mathfrak{A} \nvDash \phi$. Por un razonamiento análogo, $m_{in_i} = \infty$. Ahora, introducimos en cada θ_r mediante el Lema 4 (a) los m_{ij} tales que $\kappa_{ir} < m_{ij} < \kappa'_{ir}$. Si hacemos esto para cada R_i, ϕ resulta equivalente a una fórmula $\theta_1^* \vee \ldots \vee \theta_n^*$ que llamaremos ϕ^*, donde cada θ_r^* es una conjunción:

$$\bigwedge_{i=1}^{2^s} \exists^{[m_{ij_i}, m_{ij_i+1})} x R_i(x)$$

con m_{ij_i}, m_{ij_i+1} consecutivos en la sucesión (3). Por otra parte, por el Lema 4(b):

$$\vdash \bigwedge_{i=1}^{2^s} \{ \bigvee_{j=1}^{n_i-1} \exists^{[m_{ij}, m_{ij+1})} x R_i(x) \}$$

que por CP nos da:

$$\vdash \bigvee_{\sigma} \{ \bigwedge_{i=1}^{2^s} \exists^{[m_{i\sigma(i)}, m_{i\sigma(i)+1})} x R_i(x) \}$$

donde σ recorre todas las funciones $\sigma \in \prod_i [0, n_i)$. Llamemos $\bigvee_\sigma \theta'_\sigma$ a esta fórmula; por construcción los θ'_σ son mutuamente inconsistentes ya que deben contener intervalos distintos $[m_{ij}, m_{ij+1})$, $[m_{ik}, m_{ik+1})$ para algún i, los cuales deben ser disyuntos. Evidentemente, cada θ^*_r debe coincidir (módulo conmutatividad) con algún θ'_σ. Mostraremos que también vale el converso. Supongamos que θ'_σ no coincide con ningún θ^*_r y sea $\mathfrak{A}$ una estructura tal que

$$(|R_1^{\mathfrak{A}}|, \ldots, |R_{2s}^{\mathfrak{A}}|) \in \prod_i [m_{i\sigma(i)}, m_{i\sigma(i)+1})$$

entonces $\mathfrak{A} \models \theta'_\sigma$ y como cada θ^*_r coincide con alguna θ'_μ inconsistente con θ'_σ, entonces $\mathfrak{A} \not\models \theta^*_r$ y así $\mathfrak{A} \not\models \phi^*$. Por lo tanto $\mathfrak{A} \not\models \phi$ contradiciendo la validez de ϕ. De la discusión anterior se desprende:

$$\vdash \phi^* \equiv \bigvee_\sigma \theta'_\sigma .$$

De la deducibilidad de $\bigvee_\sigma \theta'_\sigma$ resulta la de ϕ^* y por lo tanto la de ϕ. ▲

Nótese que la transformación de una fórmula ϕ a su formal normal cardinal y todas las demás que se utilizaron en la prueba anterior se pueden realizar algorítmicamente, en especial la verificación de si ϕ^* contiene todas las θ'_σ, lo cual nos dá como corolario una prueba de la decidibilidad de $M_{\omega\omega}(Q_{\alpha_1}, \ldots, Q_{\alpha_n})$ demostrada en Fajardo (1980).

§4. Aplicaciones. La existencia de formas normales cardinales nos permite dar nuevas pruebas, bastante sencillas, de resultados ya conocidos. Por ejemplo, los teoremas *descendente y ascendente de Lowenheim-Skolem* resultan trivialmente. Sea $\phi \in M_{\omega\omega}(Q_{\alpha_1}, \ldots, Q_{\alpha_n})$ una sentencia satisfactible, entonces los extremos izquierdos de los intervalos cuantificacionales $\exists x^{[\kappa, \kappa')} R(x)$ que afectan cada región en la forma normal cardinal plena de ϕ sólo pueden ser $\kappa = m \in \omega$ ó $\omega_{\alpha_1}, \ldots, \omega_{\alpha_n}$. Esto significa que existe un modelo de ϕ de cardinal menor o igual que $\omega_\alpha = \omega_{\alpha_1} + \ldots + \omega_{\alpha_n} = \max\{\omega_{\alpha_i}\}$.

Análogamente, los extremos derechos solo pueden ser números naturales o $\kappa' = \omega_{\alpha_1}, \ldots, \omega_{\alpha_n}, \infty$; lo cual significa que si ϕ tiene un modelo de cardinal mayor o igual que ω_α, alguno de los extremos derechos debe ser ∞, es decir la forma normal debe contener $\exists x^{[K,\infty)} R(x)$ para alguna región R, garantizando la existencia de modelos de cualquier tamaño mayor o igual que ω_α.

Como nueva aplicación, demostraremos un teorema de eliminación de cuantificadores de segundo orden, del cual se sigue el teorema de interpolación para $M_{\omega\omega}(\mathcal{Q}_\alpha \mid \alpha \in I)$ de una manera más directa que en Caicedo (1985, Theorem 4.1) proporcionándonos interpolantes explícitas. Como corolario obtenemos también un teorema de Väänänen (1977).

Denotemos por $M^{II}(\mathcal{Q}_\alpha \mid \alpha \in I)$ a la lógica de segundo orden que resulta de adjuntar a $M_{\omega\omega}(\mathcal{Q}_\alpha \mid \alpha \in I)$ cuantificadores $\exists S$, $\forall S$, donde S es una variable de predicado monádico.

TEOREMA 4. $M^{II}(\mathcal{Q}_\alpha \mid \alpha \in I) \equiv M_{\omega\omega}(\mathcal{Q}_\alpha \mid \alpha \in I)$.

Demostración. Por inducción, es suficiente mostrar que si $\phi(S) \in M_{\omega\omega}(\mathcal{Q}_\alpha \mid \alpha \in I)$, donde S es un predicado monádico, entonces $\exists S\phi(S)$ es equivalente a una fórmula de $M_{\omega\omega}(\mathcal{Q}_\alpha \mid \alpha \in I)$. Si ϕ es insatisfactible el resultado es trivial. Supongamos entonces que ϕ es satisfactible y sea $\bigvee_r \theta_r$ una forma cardinal plena de ϕ. Si $p_1, \ldots, p_n, S$ son los predicados que ocurren en ϕ entonces cada θ_r puede escribirse en la forma:

$$\bigwedge_{i=1}^{2^n} \exists x^{[\kappa_i, \delta_i)} [R_i(x) \wedge S(x)] \wedge \exists x^{[\kappa'_i, \delta'_i)} [R_i(x) \wedge \neg S(x)]$$

donde $R_1, \ldots, R_n$ son las regiones con respecto a $p_1, \ldots, p_n$. En caso de que S sea el único predicado en ϕ, tomamos "$x=x$" como $R_1(x)$. Evidentemente, $\exists S\theta_r(S)$ es equivalente semánticamente a la fórmula de $M_{\omega\omega}(\mathcal{Q}_\alpha \mid \alpha \in I)$:

$$\bigwedge_{i=1}^{2^n} \exists x^{[\kappa_i + \kappa'_i, \delta_i + \delta'_i)} R_i(x).$$

Por lo tanto $\exists S\phi(S)$, que es equivalente a $\bigvee_n \exists S\theta_n(S)$, resulta equivalente a una fórmula de $M_{\omega\omega}(Q_\alpha \mid \alpha \in I)$. ▲

COROLARIO 1. *Sean ϕ y ψ sentencias de $M_{\omega\omega}(Q_\alpha \mid \alpha \in I)$ tales que $\phi \vdash \psi$, entonces existe σ en esta lógica, cuyos predicados están entre los comunes a ϕ y a ψ, tal que $\phi \vdash \sigma \vdash \psi$. Además σ puede escogerse de manera que todos los cuantificadores cardinales que en ella ocurren estén en ϕ (respectivamente, en ψ).*

Demostración. Si $p_1,\ldots,p_n$ son los predicados de ϕ que no ocurren en ψ, y $q_1,\ldots,q_m$ los de ψ que no ocurren en ϕ, y $\phi(p_1,\ldots,p_n) \vdash \psi(q_1,\ldots,q_m)$ entonces

$$\phi \models \exists p_1 \ldots \exists p_n \phi(p_1,\ldots,p_n) \models \forall q_1 \ldots \forall q_m \psi(q_1,\ldots,q_m) \models \psi .$$

Si eliminamos los cuantificadores de segundo orden de la fórmula $\exists p_1 .. \exists p_n \phi(p_1,\ldots,p_n)$ de acuerdo a la prueba del Teorema 4, obtenemos una interpolante cuyos cuantificadores cardinales estan entre los de ϕ. Si hacemos la eliminación en la fórmula $\forall q_1 .. \forall q_m \psi(q_1,\ldots,q_m)$, obtenemos una interpolante con sus cuantificadores entre los de ψ. ▲

En el resultado anterior no es posible pedir que los cuantificadores cardinales de la interpolante ocurran al tiempo en ϕ y ψ, como lo ilustra el ejemplo:

$$Q_2 x P(x) \vdash Q_1 x S(x) \vee Q_1 x \neg S(x)$$

que tiene como posibles interpolantes $Q_2 x(x=x)$ o $Q_1 x(x=x)$, pero obviamente no puede tener interpolantes de primer orden.

Sea ahora M_α^{II} la lógica que resulta de adjuntar a la lógica monádica de primer orden cuantificadores $\exists S^\alpha$, $\forall S^\alpha$, donde las variables S^α representan predicados monádicos de cardinal menor que ω_α.

COROLARIO 2 (Väänänen (1977)). $M_\alpha^{II} \equiv M_{\omega\omega}(Q_\alpha)$.

Demostración. $\mathcal{Q}_\alpha x\phi(x)$ es definible por $\neg\exists S^\alpha\forall x(\phi(x)\rightarrow S^\alpha(x))$, luego la segunda lógica está incluida en la primera. Además $\exists S^\alpha\phi(S^\alpha)$ es equivalente a $\exists S(\phi(S)\wedge\neg\mathcal{Q}_\alpha xS(x))$, luego $M_\alpha^{II}\leqslant M^{II}(\mathcal{Q}_\alpha)\equiv M_{\omega\omega}(\mathcal{Q}_\alpha)$. ▲

BIBLIOGRAFIA

Bell, J.L. y A. Slomnson (1969), *Models and ultraproducts*, North Holland.

Caicedo, X., (1985), *Failure of interpolation for quantifiers of monadic type*, Methods in Mathematical Logic, Springer Verlag Lect. Notes in Math. 1130, pp.1-11.

Fajardo, S. (1980), *Compacidad y decidibilidad de lógicas monádicas con cuantificadores cardinales*, Rev. Col. de Matemáticas, Vol. XIV, pp.173-196.

Flum, J. (1985), *Maximale monadische Logiken*, Archiv für Mathematishe Logik und Grundlagen forschung 25, pp. 145-152.

Keisler, H.J. (1971), *Logic with the quantifier 'there exist uncountably many'*, Ann. Math. Logic 1, pp. 1-93.

Mostowski, A., (1957), *On a generalization of quantifiers*, Fund. Math. 44, pp. 12-36.

Slomnson, A. (1968), *The monadic fragment of predicate calculus with the Chang quantifier and equality*, Proc Summer School in Logic, Leeds, Springer Verlag Lect. Notes 70, pp. 279-301.

Väänänen, J. (1977), *Remarks on generalized quantifiers and second order logic*, Prace Naukowe Instytutu Matematyki Polithechniki Wroclawskiej, Nro. 14, pp. 117-123.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Apartado Aéreo 2509
BOGOTA, Colombia.

Corporación Autónoma Universitaria
Apartado Aéreo 441
MANIZALES, Colombia.

(Recibido en marzo de 1989, la versión revisada en Septiembre de 1989).