SOLUCION DE PROBLEMAS

67. Demostrar que si n es un número entero positivo,

$$(2n + 1)^5 - 2n - 1$$

es siempre divisible por 240.

1ª *solución.* Llamando N la expresión estudiada, tenemos

$$\begin{aligned} N &= (2n + 1)^5 - (2n + 1) \\ &= (2n + 1) [(2n + 1)^4 - 1] \\ &= (2n + 1) [(2n + 1)^2 + 1] [(2n + 1) + 1] [(2n + 1) - 1] \\ &= 8n (n + 1) (2n + 1) (2n^2 + 2n + 1). \end{aligned}$$

Siendo $240 = 2^4 . 3 . 5$, basta comprobar la divisibilidad de N por cada uno de los factores: 16, 3, 5.

Es par el producto $n (n + 1)$ de dos enteros consecutivos; luego N es divisible por 16. Por otra parte, el entero n es de una de las formas $3k$, $3k + 1$, $3k + 2$; según el caso, será divisible por 3: n, $2n + 1$, $n + 1$, respectivamente. Con respecto a 5, se ve que si n es de la forma $n = 5m$, N es divisible por 5; si $n = 5m + 1$, $2n^2 + 2n + 1 = 5 (10m^2 + 6m + 1)$; si $n = 5m + 2$, el factor $2n + 1 = 5(2m + 1)$; si $n = 5m + 3$, $2n^2 + 2n + 1 = 5(10m^2 + + 14m + 5)$ y si $n = 5m + 4$, $n + 1 = 5(m + 1)$; en cada uno de los cinco casos, uno de los factores de N es divisible por 5.

Jaime Vanegas Gómez

2ª *solución.* $N = (2n + 1) [(2n + 1)^4 - 1]$.
Si $2n + 1$ no es múltiplo de 3, y en consecuencia $(2n + 1)^2$ tampoco lo es, aplico el teorema de FERMAT (cf. Vol. III, fasc. 1, problema 44) para $q = 3$, y $(2n + 1)^4 - 1$ es múltiplo de 3. Análogamente si $2n + 1$ no es múltiplo de 5, aplicando el mismo teore-

ma para $q = 5$, veo que $(2n+1)^4 - 1$ es múltiplo de 5. Ahora

$$N = 8n\,(n+1)\,(2n+1)\,(2n^2+2n+1);$$

uno de los factores $8n$ o bien $8(n+1)$ es múltiplo de 16. Así N es múltiplo de $240 = 3.\,5.\,16$.

Armando Chaves Agudelo

68. Demostrar que $\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2}$ es siempre un cuadrado perfecto. (cf. Vol. II, p. 26).

Solución. Por definición:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2};$$

análogamente

$$\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Sumando:

$$\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = \frac{n}{2}\,.\,2n = n^2. \qquad \text{Q. E. D.}$$

Soluciones de: *Humberto Aparicio, Jaime Vanegas Gómez, Armando Chaves Agudelo, Alvaro Rodríguez.*

69. Demostrar que

$$\binom{n}{2} + [1 + 2n(n-1)]\binom{n+1}{2}$$

es siempre un bicuadrado perfecto (bicuadrado = cuarta potencia).

Solución.

$$\binom{n}{2} + [1 + 2n(n-1)]\binom{n+1}{2} = \frac{n(n-1)}{2} +$$

$$+ [1 + 2n(n-1)]\,\frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + n^2(n^2 - 1) = n^4.$$

Soluciones de: *Armando Chaves Agudelo, Alvaro Rodríguez, Jaime Vanegas Gómez.*

70. Demostrar que el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & \ldots & 1 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

es igual a $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n$.

Solución. Un teorema importante sobre determinantes dice: *"Si a los elementos de una línea* (resp. *columna*) *se suman o restan, ordenadamente, los elementos de una línea* (resp. *columna*) *paralela, el determinante conserva su valor".*

Restando sucesivamente los elementos de la primera columna a los de la segunda, tercera, ..., n-ava columnas, obtengo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & \ldots & 1 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}$$

$= a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n$, ya que este producto es el único no nulo en el desarrollo.

Armando Chaves Agudelo

71. Resolver la ecuación

$$\alpha\,(x^2 - p\,x + q)^2 + \beta\,(x^2 + p\,x + q)^2 = x^2.$$

Solución. Si $x = 0$ no es raíz, se puede escribir

$$\alpha x^2 (x - p + \frac{q}{x})^2 + \beta x^2 (x + p + \frac{q}{x})^2 = x^2;$$

simplificando y poniendo: $x + \dfrac{q}{x} = m,$

$$\alpha (m - p)^2 + \beta (m + p)^2 - 1 = 0$$

(1) $\quad (\alpha + \beta) m^2 - 2p (\alpha - \beta) m + (\alpha + \beta) p^2 - 1 = 0.$

Si $\alpha + \beta \neq 0$, la ecuación (1) es de segundo grado; resolviendo para m, y reduciendo:

(2) $$m = \frac{p (\alpha - \beta) \pm \sqrt{\alpha + \beta - 4 \alpha \beta p^2}}{\alpha + \beta}$$

Obtenemos para m valores que podemos representar por m_1 y m_2 (confundidos si el discriminante se anula). No falta más que resolver

$$x + \frac{q}{x} = m_1 \text{ y } x + \frac{q}{x} = m_2$$

o $\quad x^2 - m_1 x + q = 0 \quad$ y $\quad x^2 - m_2 x + q = 0,$

cosa que no presenta dificultad alguna, para tener las cuatro raíces de la ecuación propuesta.

Discusión. Dejando a un lado el caso trivial en que $q = 0$, se ve en la ecuación inicial que $x = 0$ es raíz si $\alpha + \beta = 0$, caso particular en que falla el método general anterior, y que tenemos que tratar aparte. Si $\alpha + \beta = 0$, $\beta = - \alpha$ y la ecuación dada se reduce a

$$-4\alpha p x (x^2 + q) = x^2,$$

ecuación que tiene la raíz $x = 0$, además de las raíces de

$$4\alpha p x^2 + x + 4\alpha p q = 0$$

fáciles de encontrar.

"Erik el Rojo"

72. Una longitud dada se divide en m partes iguales por $m - 1$ puntos negros y en n partes iguales por $n - 1$ puntos rojos. ¿Cuál es la mínima distancia entre un punto negro y un punto rojo?

Solución. Sea $AB = a$ la longitud dada. El p-ésimo punto negro dista pa/m de A; el q-ésimo punto rojo dista qn/a de A; la distancia mutua de dos puntos de diferente color es de la forma: $pa/m - qa/n = (pn - qm)\, a/mn$, es decir siempre un múltiplo de a/mn.

Se pueden presentar dos casos, según que m y n sean primos relativos, o no lo sean. Principiamos con el segundo caso.

m y n tienen un máximo común divisor d superior a 1. Se puede escribir $m = m'd$ y $n = n'd$ (m' y n' enteros). Entonces

$$\frac{m'}{m} = \frac{n'}{n} \quad \text{y} \quad m' \frac{a}{m} = n' \frac{a}{n},$$

lo cual indica que el m'-ésimo punto negro coincide con el n'-ésimo punto rojo; la distancia mínima es nula en este caso. Inversamente si la primera coincidencia se produce en un punto C entre el p-ésimo punto negro y el q-ésimo rojo, AB contiene AC un número de veces entero y mayor que 1, digamos d veces. Entonces $AC = a/d = pa/m = qa/n$, de donde $m = pd, n = qd$, lo que equivale a decir que m y n no son primos relativos.

Pasamos ahora al primer caso: m y n son primos relativos; ya sabemos que la coincidencia de puntos de diferente color es imposible. Se vió en el artículo: *Números Primos II* de esta Revista (cf. Vol. I, págs. 70-72) que el conjunto M de los números de la forma $mx + ny$, en donde x e y son números enteros arbitrarios, es el mismo conjunto de todos los múltiplos de d, máximo común divisor de m y n. Si m y n son primos relativos, $d = 1$ y M es el conjunto de todos los enteros. Es por lo tanto posible encontrar enteros x,y tales que $mx + ny = 1$, y con $z = -y$, tendremos

$$(1) \qquad mx - nz = 1.$$

x y z se pueden escoger positivos, $x < n, z < m$ añadiendo, si es preciso, kn a x y km a z (k entero). Dividiendo (1) por mn y multiplicándola por a, da

$$xa/n - za/m = a/mn.$$

Esa igualdad muestra que el x-ésimo punto rojo dista del z-ésimo punto negro en a/mn. Siendo este el menor múltiplo positivo de a/mn, será la mínima distancia buscada.

Guillermo Tello Y.

73. Se dan en el espacio tres semirrectas Ox, Oy, Oz que salen del mismo punto O. Se supone que el ángulo xOy es igual a $90°$ y que los ángulos xOz e yOz son iguales a $60°$.

(a) Demostrar que Oz está situado en el plano que es perpendicular al plano xOy y que pasa por la bisectriz interior del ángulo xOy.

(b) Se toman sobre Ox y Oy respectivamente dos puntos A y B, tales que $OA = OB = a$. Siendo M un punto de Oz, ¿cuál debe ser la longitud de OM, para que el ángulo AMB sea recto? En el caso en que el ángulo AMB sea recto, ¿cuáles son el centro y el radio de la esfera circunscrita al tetraedro $OAMB$?

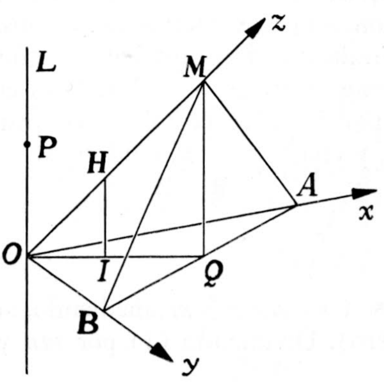
(c) ¿Cuál es la medida del ángulo que forma Oz con el plano xOy? Calcular el volumen del tetraedro $OAMB$.

(d) ¿Cuál es el lugar de los puntos P del espacio tales que

$$PA^2 + OB^2 = PB^2 + OA^2 = PO^2 + AB^2?$$

(Bachillerato, 1ª parte, Clermont-Ferrand, Francia, 1951).

Solución. (a) Sea H un punto cualquiera de Oz, I su proyección sobre el plano xOy; OI es la proyección de Oz sobre el mismo plano. Tenemos



$$\angle xOz = \angle yOz = 60°,$$

de donde

$$\angle xOI = \angle yOI,$$

puesto que las rectas de un plano que hacen ángulos iguales con una oblicua, hacen ángulos iguales con su proyección en el plano.

Siendo HI perpendicular al plano xOy, lo es también el plano zOI que contiene esta recta HI.

(b) Al tomar $OA = OB = a$, los triángulos OMA y OMB son iguales, y $MA = MB$. Si además $\angle AMB$ es recto, tendremos

$$MA^2 + MB^2 = 2MA^2 = AB^2 = OA^2 + OB^2 = 2a^2,$$

de donde $MA = a$. El triángulo OMA es equilátero, porque $MA = OA$ y $\angle AOM = 60°$, luego $OM = a$. La conclusión es que se debe tomar una longitud OM igual a a, para que $\angle AMB$ sea recto.

Suponiendo siempre recto el ángulo AMB, vamos a ver que Q, intersección de AB con la bisectriz OI del ángulo AOB, es el centro de la esfera circunscrita al tetraedro $OAMB$. En efecto Q es el punto medio de la hipotenusa común de los triángulos rectángulos isósceles ABO y ABM; luego $QA = QB = QO = QM$. Como $AB^2 = 2a^2$, $AB = a\sqrt{2}$ y $QA = a\sqrt{2}/2$ será el radio de la esfera.

(c) $QM = QO = a\sqrt{2}/2$ da $QM^2 + QO^2 = a^2 = OM^2$, de donde resulta, por el recíproco del teorema de Pitágoras, que QM es perpendicular a OQ, y que $\angle MOQ = 45°$. Siendo ese ángulo el de Oz con su proyección en el plano xOy, es el ángulo buscado.

En el tetraedro $OAMB$, se puede tomar de base b el triángulo OAB y de altura $h = QM$. Su volumen será

$$V = \frac{1}{3}\,bh = \frac{1}{3}\,\frac{a^2}{2}\,\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}\,.$$

(d) Digo que OL, perpendicular al plano xOy, es el lugar buscado. Si P es un punto cualquiera de OL,

$$PA^2 + OB^2 = PO^2 + OA^2 + OB^2 = PO^2 + 2a^2$$

$$PB^2 + OA^2 = PO^2 + OB^2 + OA^2 = PO^2 + 2a^2$$

$$PO^2 + AB^2 = PO^2 + OA^2 + OB^2 = PO^2 + 2a^2,$$

y se cumple la condición requerida.

Inversamente, si un punto P del espacio satisface las ecuaciones del enunciado,

$$PA^2 + a^2 = PB^2 + a^2 = PO^2 + 2a^2$$

$$PA^2 = PB^2 = PO^2 + a^2.$$

Por el recíproco del teorema de PITÁGORAS,

$$PA^2 = PO^2 + a^2 = PO^2 + OA^2$$

indica que PO es perpendicular a PA, y

$$PB^2 = PO^2 + a^2 = PO^2 + OB^2$$

que PO es perpendicular a PB; por lo tanto PO es perpendicular al plano xOy, y P está situado sobre la recta OL.

Armando Chaves Agudelo.