PROBLEMAS PROPUESTOS

Los problemas son señalados por cero, uno o dos asteriscos según su grado de dificultad. Las soluciones de los problemas deben ser enviadas a REVISTA DE MATEMÁTICAS ELEMENTALES, Universidad de los Andes, calle 18-A, carrera 1-E, Bogotá, Colombia, antes del 30 de julio de 1955. Los alumnos de bachillerato deben enviar, junto con las soluciones, el nombre del colegio y de su profesor de matemáticas.

91. Demostrar que, si n es entero positivo, $(n + 2)^3 - n^3$ es la suma de tres cuadrados y que la solución es única.

92. Demostrar que, si p es un número primo diferente de 2, la suma de todos los enteros positivos menores que p es siempre divisible por p.

93. Seis hombres, entre los cuales el Sr. Rodríguez y el Sr. González, deben llevar la palabra en una asamblea. ¿De cuántas maneras se puede preparar el programa de los discursos

a) si el Sr. Rodríguez no quiere hablar antes que el Sr. González;

b) si el Sr. Rodríguez debe hablar inmediatamente después del Sr. González;

c) si debe haber en el programa, entre los discursos del Sr. Rodríguez y del Sr. González, por lo menos el de otro orador?

94. Demostrar que el producto de los n primeros factores de

$$(1 + 2) . (3 + 4 + 5) . (6 + 7 + 8 + 9). \ldots$$

es: $$p_n = \frac{[(n + 2)!]^3}{2^{n+1}(n + 1)(n + 2)^2} .$$

95. Demostrar la desigualdad

$$(a + b)^2 + b(a^2 + 1) + a(b^2 + 1) > 8\, ab,$$

en donde a y b son dos números positivos diferentes de 1.

96. Hallar las condiciones para que la ecuación de cuarto grado

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

tenga sus raíces de dos en dos inversas y de signos contrarios.

97. Tres números enteros están en progresión geométrica; si al segundo se suma 4, la progresión se convierte en aritmética; si a continuación se suma al tercero 32, vuelve a ser geométrica. Hallar los tres números.

98. Hallar la condición para que la ecuación

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

se convierta en una ecuación bicuadrada por una transformación de la forma $x = y + h$.

99. Expresar, en función de los cuatro lados de un trapecio, la longitud de la recta que une los puntos medios de los dos lados paralelos.

100. Sea, en un plano (P), un triángulo isósceles ABC tal que $AB = AC = a$ y que $\angle BAC = 120°$.

1º Sobre la perpendicular xy al plano (P) en A, se considera un punto S. Se pone $x = AS$. Hallar el lugar geométrico de la proyección de A sobre el plano SBC cuando S recorre el eje xy.

2º Determinar x para que el triángulo SBC sea rectángulo en S. Determinar entonces el centro y el radio de la esfera circunscrita al tetraedro $SABC$.

3º En lo que sigue, se supone que $x = a\sqrt{3}/2$. Sea H el punto medio de BC. Se traza por A un plano paralelo a BC que corta SH en H',SB en B',SC en C'.

a) Cuando H' está en la mitad de SH, calcular *tg* $H'AB'$ y *cos* $B'AC'$.

b) Si H' se mueve sobre SH, determinar el valor de $z = SH'$ para que $\angle B'AC' = 90°$.

N. B. La tercera parte es independiente de las dos primeras.

(Bachillerato francés, 1ª parte, el Líbano, 1951).