Revista

de

Matemáticas Elementales

VOLUMEN IV. FASCICULO 1

Tarifa Postal Reducida. — Licencia Nº 1993 del Ministerio de Correos y Telégrafos.

APLICACION DE LA TEORIA DE DIFERENCIAS FINITAS AL CALCULO DE POLINOMIOS

POR LUIS DE GREIFF BRAVO

1.—Introducción.

Sea una *sucesión* (fr. *"suite"*, ing. *"sequence"*) de números reales o, en general, de elementos que formen parte de un cuerpo,

$$(1,1) \qquad u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots, u_{p-1}, u_p, \ldots$$

en la cual los u_i siguen una ley, conocida o desconocida, de formación. Es costumbre definir las *sucesiones de primero, segundo,... p-ésimo orden,* como sigue,

$$\Delta_1 u_1 = u_2 - u_1;\ \Delta_1 u_2 = u_3 - u_2;\ \Delta_1 u_3 = u_4 - u_3;\ \ldots;$$
$$\Delta_1 u_p = u_{p+1} - u_p;\ \ldots$$

Los términos $\Delta_1 u_1, \Delta_1 u_2, \Delta_1 u_3, \ldots, \Delta_1 u_i, \ldots$

constituyen la sucesión de diferencias de primer orden de (1,1). Asimismo,

$$\Delta_2 u_1 = \Delta_1 u_2 - \Delta_1 u_1;\ \Delta_2 u_2 = \Delta_1 u_3 - \Delta_1 u_2;$$
$$\Delta_2 u_3 = \Delta_1 u_4 - \Delta_1 u_3;\ \ldots\ \Delta_2 u_p = \Delta_1 u_{p+1} - \Delta_1 u_p;\ \ldots$$

nos da en sus elementos $\Delta_2 u_1, \Delta_2 u_2, \Delta_2 u_3, \ldots, \Delta_2 u_p, \ldots$ la *sucesión de diferencias de segundo orden* de (1,1).

En general, se define la *sucesión de diferencias de orden p,* relativas a la sucesión (1,1), a saber,

(1,2) $$\Delta_p u_1, \Delta_p u_2, \Delta_p u_3, \Delta_p u_4, \ldots, \Delta_p u_i, \ldots$$

como sigue,

$$\Delta_p u_1 = \Delta_{p-1} u_2 - \Delta_{p-1} u_1; \Delta_p u_2 = \Delta_{p-1} u_3 - \Delta_{p-1} u_2; \ldots;$$

$$\Delta_p u_i = \Delta_{p-1} u_{i+1} - \Delta_{p-1} u_i; \ldots$$

2.—Expresión directa de las Diferencias por medio de los términos u_i.

A fin de obtenerla, procederemos inductivamente, así:

$$\Delta_1 u_1 = u_2 - u_1; \Delta_2 u_1 = \Delta_1 u_2 - \Delta_1 u_1 = u_3 - u_2 - (u_2 - u_1) =$$

$$= u_3 - 2u_2 + u_1;$$

$$\Delta_3 u_1 = u_4 - 2u_3 + u_2 - (u_3 - 2u_2 + u_1) = u_4 - 3u_3 +$$

$$+ 3u_2 - u_1;$$

$$\Delta_4 u_1 = \Delta_3 u_2 - \Delta_3 u_1 = u_5 - 3u_4 + 3u_3 - u_2 - (u_4 - 3u_3 +$$

$$+ 3u_2 - u_1) = u_5 - 4u_4 + 6u_3 - 4u_2 + u_1; \ldots$$

Para generalizar, podemos expresar los resultados anteriores por medio de la fórmula simbólica:

(2,1) $$\Delta_p u_1 = (u - 1)^{(p)} u_1$$

que, aplicada al término general viene a ser,

(2,2) $$\Delta_p u_i = (u - 1)^{(p)} u_i$$

Al efectuar el desarrollo simbólico deben reemplazarse u^r, $u^r u_i$, por u_r, u_{r+i}, respectivamente, lo cual equivale a cambiar los exponentes por índices, sometidos a la ley de adición causada por la multiplicación.

Para demostrar la validez de la fórmula (2,2), apelaremos a la inducción completa. Aceptando su validez para un cierto p, demostraremos que también es válida para $p + 1$. En efecto, aplicada la (2,2) a dos términos consecutivos de la sucesión original, o sea al escribir,

$$\Delta_p u_{i+1} = (u - 1)^{(p)} u_{i+1}, \ \Delta_p u_i = (u - 1)^{(p)} u_i$$

y substraer ordenadamente estas últimas, se tiene,

$$\Delta_p u_{i+1} - \Delta_p u_i = \Delta_{p+1} u_i = (u - 1)^{(p)} u_{i+1} - (u - 1)^{(p)} u_i =$$

$$= (u - 1)^{(p)} (u_{i+1} - u_i) = (u - 1)^{(p)} (u - 1) u_i$$

y, finalmente,

$$\Delta_{p+1} u_i = (u - 1)^{(p+1)} . u_i.$$

Como la inspección directa nos ha hecho ver que la (2,2) es válida hasta $p = 4$, queda demostrada su generalidad.

3.—Sucesión potencial de términos en progresión aritmética.

Sea la sucesión de términos en progresión aritmética,

$$a, a + r, a + 2r, a + 3r, \ldots, a + (i - 1)r, a + ir, \ldots$$

los que serán designados, para mayor brevedad, así,

$$(3,1) \qquad q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots, q_i, q_{i+1}, \ldots$$

Consideremos las potencias índice s de la sucesión escrita, a saber,

$$(3,2) \qquad q_0^s, q_1^s, q_2^s, q_3^s, q_4^s, \ldots, q_i^s, q_{i+1}^s, \ldots$$

Para sucesiones de esta naturaleza demostraremos el siguiente

TEOREMA. — *La sucesión de Diferencias de orden* s + 1 *de la sucesión formada por las potencias índice* s *de términos que forman progresión aritmética, es nula.* Simbólicamente,

$$\Delta_{s+1} \, q_i^s = 0.$$

Demostración.— Veamos como se cumple el teorema para $s = 1$ y luego para $s = 2$.

$s = 1.$

$$
\begin{array}{ll}
q_i: & a,\ a + r,\ a + 2r, \ldots,\ a + (i-1)r,\ a + ir, \ldots \\
\Delta_1 q_i: & r, \quad r, \quad r, \ldots, \quad r, \ldots, \\
\Delta_2 q_i: & 0, \quad 0, \quad \ldots
\end{array}
$$

$s = 2$. La sucesión cuadrática da las Diferencias siguientes,

$$
\begin{array}{ll}
q_i^2: & a^2,\ (a + r)^2,\ (a + 2r)^2, \ldots,\ [a + (i-1)r]^2,\ (a + ir)^2, \ldots \\
\Delta_1 q_i^2: & 2ar + r^2,\ 2ar + 3r^2,\ 2ar + 5r^2, \ldots,\ 2ar + (2i-1)r^2, \ldots \\
\Delta_2 q_i^2: & ,\quad 2r^2, \quad 2r^2, \ldots, \quad 2r^2,\ 2r^2, \ldots \\
\Delta_3 q_i^2: & ,\quad 0, \ldots, \quad 0, \ldots, \quad 0, \ldots,
\end{array}
$$

Pasamos ahora a demostrar que si el teorema es válido para un cierto s (s, entero positivo) también es válido para $s + 1$. Es decir, aceptamos que se cumple la relación,

$$\Delta_{s+1}\, q_i^s = 0$$

y hacemos ver que, como consecuencia de la anterior, también deberá cumplirse,

$$\Delta_{s+2}\, q_i^{s+1} = 0.$$

En efecto, de acuerdo con la definición, podemos escribir,

$$
\begin{aligned}
\Delta_{s+2}\, q_i^{s+1} &= \Delta_{s+1}\, q_{i+1}^{s+1} - \Delta_{s+1}\, q_i^{s+1} = \Delta_{s+1} (q_i + r)^{s+1} - \Delta_{s+1}\, q_i^{s+1} \\
&= \Delta_{s+1} \left[q_i^{s+1} + \binom{s+1}{1} q_i^s r + \ldots + r^{s+1} - q_i^{s+1} \right] = \\
&= \Delta_{s+1} \left[\binom{s+1}{1} q_i^s r + \binom{s+1}{2} q_i^{s+1} r^2 + \ldots + r^{s+1} \right] \\
&= \binom{s+1}{1} r\, \Delta_{s+1}\, q_i^s + \binom{s+1}{2} r^2\, \Delta_{s+1}\, q_i^{s+1} + \ldots = 0.
\end{aligned}
$$

Esto último puesto que el teorema había sido aceptado para s y, por consiguiente, hasta s. En la cadena de igualdades se ha tenido en cuenta que las constantes pueden disponerse fuera del signo u *operador* Δ_k.

Con lo anterior el teorema queda demostrado puesto que su validez se había hecho presente para $s = 1$, después para $s = 2$.

Corolario. — Es interesante subrayar que, para la sucesión de potencias de los números naturales, a saber,

$$1^s, 2^s, 3^s, 4^s, \ldots, p^s, \ldots$$

caso en el cual $r = 1$, el teorema general suministra la importante relación,

$$\Delta_{s+1}\, p^s = 0$$

la que en palabras se puede enunciar diciendo que *la sucesión de las diferencias de orden* s + 1 *de la sucesión constituída por las potencias* s *de los números naturales, es cero* (o mejor, es la *sucesión nula,* 0, 0, 0, ...). Esta relación implica el que las sucesiones de orden más alto que s + 1 también sean nulas, ya que son Diferencias de la *sucesión nula.* En símbolos, la relación,

$$\Delta_{s+1}\, p^s = 0 \text{ implica, } \Delta_{s+1+k}\, p^s = 0$$

para todo k entero positivo.

4.—Expresión de los términos u_i de la sucesión original o primitiva, por medio de las Diferencias Δ_i.

De acuerdo con la definición de Diferencias Finitas, tenemos,

$$u_2 - u_1 = \Delta_1 u_1 \text{ de donde, } u_2 = u_1 + \Delta_1 u_1 = (1 + \Delta_1) u_1$$
$$= (1 + \Delta)^{(1)} u_1$$

$$u_{k+1} - u_k = \Delta_1 u_k, \text{ de donde, } \quad u_{k+1} = u_k + \Delta_1 u_k =$$
$$= (1 + \Delta_1) u_k = (1 + \Delta)^{(1)} u_k$$

podemos, por consiguiente, escribir,

$$u_k = (1 + \Delta)^{(1)} u_{k-1}, \ldots, u_3 = (1 + \Delta)^{(1)} u_2,$$
$$u_2 = (1 + \Delta)^{(1)} u_1.$$

Multiplicando entre sí las relaciones anteriores y suprimiendo factores comunes, resulta,

$$u_{k+1} = (1 + \Delta)^{(k)} u_1 \tag{4,1}$$

la cual, para el términó de rango k se modifica así,

$$u_k = (1 + \Delta)^{(k-1)} u_1. \tag{4,2}$$

Si consideramos que u_i es el primer término de la *sucesión,* la fórmula (4,2) conduce, finalmente, a

$$u_{k+i-1} = (1 + \Delta)^{(k-1)} u_i. \tag{4,3}$$

Resulta interesante observar que la (4,3) puede obtenerse de la (4,2), multiplicando los dos miembros de esta última por u_{i-1} a derecha y sometiendo los índices a la misma ley sumatoria que el álgebra ordinaria aplica a los exponentes.

5.—Sumación de los términos de una sucesión.

Con el propósito de calcular la suma $\sum_{k=1}^{n} u_k$, procederemos como sigue,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (1 + \Delta)^{(k-1)} u_1 = \left[\sum_{k=1}^{n} (1 + \Delta)^{(k-1)} \right] u_1 =$$

$$= \frac{(1 + \Delta)^{(n)} - 1}{(1 + \Delta)^{(1)} - 1} \, . \, u_1 = \frac{(1 + \Delta)^{(n)} - 1}{\Delta_1} \, . \, u_1$$

pues se trata de la suma de términos de una progresión geométrica cuya razón es $(1 + \Delta)^{(1)} = (1 + \Delta_1)$. El primer término de dicha progresión, resulta ser

$$(1 + \Delta)^{(0)} = 1$$

El resultado anterior puede escribirse:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{(1 + \Delta)^{(n)} - 1}{\Delta_1} u_1 \tag{5,1}$$

en la cual, al efectuar las operaciones indicadas a la derecha del signo $=$, se tiene,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k =$$

$$= \frac{\binom{n}{1}\Delta_1 u_1 + \binom{n}{2}\Delta_2 u_1 + \binom{n}{3}\Delta_3 u_1 + \ldots + \binom{n}{n}\Delta_n u_1}{\Delta_1}$$

de donde

(5,2)

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \binom{n}{1} u_1 + \binom{n}{2}\Delta_1 u_1 + \binom{n}{3}\Delta_2 u_1 + \binom{n}{4}\Delta_3 u_1 + \ldots$$

en la cual hemos dividido por Δ_1 según las reglas ordinarias relativas a exponentes.

6.—Cálculo numérico de polinomios.

Pasamos ahora a aplicar la teoría anterior al cálculo de una función racional entera de la variable x (polinomio en x). Suponemos en lo que sigue que tanto los coeficientes como la variable x, pertenecen al cuerpo de los números reales. Sea pues la función racional entera,

$$(6,1) \quad f(x) = a_0 x^s + a_1 x^{s-1} + a_2 x^{s-2} + \ldots + a_{s-1} x + a_s =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{s} a_\nu \, x^{s-\nu}.$$

Supongamos que a la variable x se le asignan valores en progresión aritmética,

$$x, x + h, x + 2h, x + 3h, \ldots, x + (p-1)h, \ldots$$

los valores correspondientes de la función $f(x)$, serán designados respectivamente así:

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{p-1}(x), \ldots$$

o de manera aun más sucinta, por

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{p-1}, \ldots$$

Vamos ahora a demostrar que, bajo las condiciones apuntadas, es válida la siguiente relación,

$$(6{,}2) \qquad \Delta_{s+1} f_i(x) = 0$$

que puede ser considerada como la *ecuación en diferencias finitas* de la función entera racional (polinomio) de grado *s*.

Demostración. — Teniendo en cuenta que el operador Δ posee la propiedad distributiva, podemos escribir,

$$(6{,}3) \qquad \Delta_{s+1} f_i(x) = \Delta_{s+1} a_0 x_i^s + \Delta_{s+1} a_1 x_i^{s-1} + \ldots +$$
$$+ \Delta_{s+1} a_{s-1} x_i + \Delta_{s+1} a_s.$$

Ahora bien, las constantes a_ν pueden ser escritas fuera del operador Δ_{s+1} en calidad de coeficientes, así

$$(6{,}4) \qquad \Delta_{s+1} f_i(x) = a_0 \Delta_{s+1} x_i^s + a_1 \Delta_{s+1} x_i^{s-1} + \ldots +$$
$$+ a_{s-1} \Delta_{s+1} x_i + a_s \Delta_{s+1} (1)$$

El símbolo (1) indica la sucesión 1,1,1,1,... Como, según el teorema fundamental demostrado en el aparte 3, valen las relaciones,

$$\Delta_{s+1} x_i^s = \Delta_{s+1} x_i^{s-1} = \ldots = 0$$

todos los términos del segundo miembro de la (6,4) resultan nulos. En consecuencia,

$$\Delta_{s+1} f_i(x) = 0 \quad \text{o también,} \quad \Delta_{p+1} f_i(x) = 0,$$

para $p \geqslant s$.

Teniendo en cuenta que, según la (4,2) se tiene,

$$\Delta_{p+1} u_i = (u - 1)^{(p+1)} u_i$$

si cambiamos en ésta u por f y u_i por f_i llegamos, finalmente, a la fórmula,

$$(6{,}5) \qquad \Delta_{p+1} f_i = (f - 1)^{(p+1)} f_i = 0,$$

que puede ser escrita de manera más explícita, como sigue:

$$(6,6) \qquad f_{p+1+i} = \binom{p+1}{1} f_{p+i} - \binom{p+1}{2} f_{p+i-1} + \ldots$$

la cual para $i = 0$, da:

$$(6,7) \qquad f_{p+1} = \binom{p+1}{1} f_p - \binom{p+1}{2} f_{p-1} + $$
$$+ \binom{p+1}{3} f_{p-2} - \ldots + (-1)^p f_0.$$

La (6,7) puede expresarse también como producto escalar o matricial, a saber, de la matriz línea

$$\left[\binom{p+1}{1}, -\binom{p+1}{2}, +\binom{p+1}{3}, -\ldots, +(-1)^p \binom{p+1}{p+1} \right]$$

por la matriz columna,

$$\begin{bmatrix} f_p \\ f_{p-1} \\ f_{p-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_0 \end{bmatrix}$$

Dicho producto se escribe en forma sintética como sigue,

$$(6,8) \qquad f_{p+1} = \left[(-1)^{\nu-1} \binom{p+1}{\nu} \right] \cdot \{ f_{p+1-\nu} \}$$

en la cual la variable entera ν ha de recibir los valores $1,2,3,4, \ldots, p, p+1$. El resultado anterior, contenido en la fórmula (6,8) simplifica y "automatiza" considerablemente el cálculo de polinomios. El autor del presente estudio ya le había hallado siguiendo un procedimiento completamente diferente. Se encuentra en el folleto que tiene por título *"Deducción de una fórmula para interpolación y sus aplicaciones al Algebra"*, publicado en Medellín, Colombia, 1951.

Veamos algunas aplicaciones numéricas de la fórmula (6,8). Para un polinomio de tercer grado, la fórmula explícita (6,7) da,

$$(6,9) \qquad f_4 = 4f_3 - 6f_2 + 4f_1 - f_0$$

Los coeficientes del desarrollo binómico llevan signos alternados. Sea, por ejemplo,

$$f(x) = x^3 - 16x^2 + 55x - 24$$

Por cómputo directo, se obtiene,

$$f(0) = -24, f(1) = 16, f(2) = 30, f(3) = 24.$$

valores que llevados a la (6,9) dan,

$$f(4) = -f(0) + 4f(1) - 6f(2) + 4f(3) = 4$$

en esta forma el cómputo se puede continuar indefinidamente.

En seguida presentaremos un ejemplo más amplio y mayores detalles concernientes al cómputo de polinomios.

Sea el polinomio de sexto grado y de coeficientes enteros,

$$f(x) = x^6 - 5x^5 + 8x^4 - 12x^3 - 6x^2 + 9x - 7$$

Los siete valores de partida, obtenidos por cómputo directo, son,

$$f(-1) = 4, f(0) = -7, f(1) = -12, f(2) = -77, \text{etc.}$$

Estos valores aparecen en la tercera columna del modelo de cálculos indicado como Cuadro I. En la primera columna hacemos constar los coeficientes binómicos $\binom{7}{\nu}$ provistos con signos alternados. La labor de cálculo consiste en efectuar el producto matricial (escalar) de los coeficientes binómicos, por siete valores consecutivos de $f(x)$.

Cuadro I.

1	$f(-1) =$	4	4	-7
-7	$f(\ 0) =$	-7	49	84
21	$f(\ 1) =$	-12	-252	-1617
-35	$f(\ 2) =$	-77	2695	6860
35	$f(\ 3) =$	-196	-6860	6615
-21	$f(\ 4) =$	189	-3969	-71148
7	$f(\ 5) =$	3388	23716	107681
			15383	48468
			$= f(6)$	$= f(7)$

— 12	— 77	— 196
539	1372	— 1323
— 4116	3969	71148
— 6615	— 118580	— 538405
118580	538405	1696380
323043	1017828	— 2616789
339276	872263	1956668
124609	279524	567483
$= f(8)$	$= f(9)$	$= f(10)$

Explicación del Cuadro I. — La primera horizontal está formada por los valores de $f(x)$ previamente calculados; la segunda horizontal está constituída con los productos de — 7 por los mismos valores de $f(x)$ con excepción del primero; la tercera horizontal se forma con los productos de 21 por los valores previamente conocidos de $f(x)$, con excepción de los dos primeros, etc., etc.

A continuación (Cuadro II) presentamos el cómputo del mismo polinomio, para valores decimales de la variable independiente.

Cuadro II.

1	$f(2{,}0)$	— 77,000000	— 77,000000
— 7	$f(2{,}1)$	— 88,546129	619,822903
21	$f(2{,}2)$	— 100,912896	— 2119,170816
— 35	$f(2{,}3)$	— 113,952461	3988,336135
35	$f(2{,}4)$	— 127,455424	— 4460,939840
— 21	$f(2{,}5)$	— 141,140625	2963,953125
7	$f(2{,}6)$	— 154,644224	— 1082,509568
			— 167,508061
			$f(2{,}7)$

— 88,546129	— 100,912896	— 113,952461
706,390272	797,667227	892,187968
— 2393,001681	— 2676,563904	— 2963,953125
4460,939840	4939,921875	5412,547840
— 4939,921875	— 5412,547840	— 5862,782135′
3247,528704	3517,669281′	3762,513216
— 1172,556427′	— 1254,171072	— 1322,561303
179,167296	— 188,937329	— 196,000000
$f(2{,}8)$	$f(2{,}9)$	$f(3{,}0)$

La construcción del cuadro anterior se facilita considerablemente al proceder en la forma siguiente: una vez obtenido un valor para $f(x)$ multiplícase por los coeficientes binómicos en orden ascendente. Los productos se van colocando en los espacios a la derecha en la línea correspondiente al coeficiente binómico. Como éstos se repiten a excepción del último de ellos que es 1, el número de productos por efectuar se reducirá a la mitad. Para facilitar esta explicación se ha provisto con un índice ′ a los productos de $f(2{,}7)$ por 7, —21, etc.

Observación. El cálculo de los valores de $f(x)$ según el procedimiento explicado, debe ser realizado con toda exactitud. Al abandonar cifras decimales se produce una divergencia apreciable entre los valores obtenidos y los verdaderos, como puede verse por el ejemplo siguiente:

Cuadro III.

1	— 77,0000	— 77,0000	— 88,5461
— 7	— 88,5461	619,8227	706,3903
21	— 100,9129	— 2119,1709	— 2393,0025
— 35	— 113,9525	3988,3375	4460,9390
35	— 127,4554	— 4460,9390	— 4939,9210
— 21	— 141,1406	2963,9526	3247,5282
7	— 154,6442	— 1082,5094	— 1172,5455
		— 167,5065	— 179,1576

— 100,9129	— 113,9525
797,6675	892,1878
— 2676,5634	— 2963,9526
4939,9210	5412,5470
— 5412,5470	— 5862,7275
3517,6365	3762,3096
— 1254,1032	— 1322,3105
— 188,9015	— 195,8987

que es el mismo cómputo realizado antes, con los valores de la función tomados a cuatro decimales exactos. Al comparar los resultados de este último cálculo con los obtenidos antes, se aprecia un "desajuste" sistemático.