PROBLEMAS PROPUESTOS

Los problemas son señalados por cero, uno o dos asteriscos según su grado de dificultad. Las soluciones deben ser enviadas a REVISTA DE MATEMATICAS ELEMENTALES, Apartado nacional 2125, Bogotá, Colombia, antes del 30 de noviembre de 1955. La solución a cada problema debe venir en hoja por separado. Los alumnos de bachillerato deben enviar, junto con las soluciones, el nombre del colegio y de su profesor de matemáticas.

* 101. La condición necesaria y suficiente para que el producto de todos los divisores positivos de un número entero positivo a sea igual a a^2 es: o bien a es el producto de dos números primos diferentes, o bien a es el cubo de un número primo.

102. Demostrar

$$\binom{n+k}{n} + \binom{n+k-1}{n} + \ldots + \binom{n}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}.$$

103. Sea a un número entero positivo y n un número entero no negativo. Demostrar la identidad

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{a}{k} = (-1)^n \binom{a-1}{n}.$$

104. Sea a un número entero positivo y m un número impar positivo. Demostrar que

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{a}{k} \geqslant 0.$$

105. Sea $u_{r,s}$ $(r, s = 0, 1, 2, \ldots)$ una sucesión doble de números. Demostrar la relación [1]

$$\sum_{k+l=n} \binom{n}{k} u_{r+2k,\, s+2l} =$$

[1] Esta proposición se encuentra en el trabajo de I. M. SHEFFER: *A class of functions related to harmonic functions, Duke Mathematical Journal* **21** (1954) pp. 479-489, donde se utiliza para generalizar el concepto de función armónica.

$$= \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} u_{r+2n-2p,\, s+2p} + u_{r+2n-2p-2,\, s+2p+2}$$

$(n = 1, 2, \ldots)$.

106. Sea un triángulo ABC, cuyos vértices están en una circunferencia de centro O y radio r. Se designan por AA', BB', CC' las alturas, por M, N, P los puntos medios respectivos de los lados BC, CA, AB. Las alturas se cortan en el ortocentro H y las medianas AM, BN, CP en el centro de gravedad G. Se prolonga AO hasta el punto D diametralmente opuesto a A.

a) Hallar el carácter del cuadrilátero $HCDB$.

b) Mostrar que AM es una mediana del triángulo AHD y que G es también el centro de gravedad de este triángulo.

c) Deducir de lo anterior que O, G, H están en línea recta y que OG es un tercio de OH.

d) Sean X, Y, Z los puntos medios respectivos de HA, HB, HC. Comparar los segmentos OM y XH.

e) Mostrar que el segmento XM tiene el mismo punto medio I que OH y que $XM = r$.

f) Estudiar el carácter del cuadrilátero $MNXY$ y demostrar que $XM = YN = ZP$.

g) ¿Por dónde pasa el círculo de centro I y de radio $r/2$ y por qué?

Alumnos del 4º año del Liceo Francés.

107. Se da una semi-circunferencia de centro O y diámetro $AB = 2R$. De un punto C situado sobre la semirrecta Ox que pasa por A se traza la tangente CD a la semicircunferencia.

Se pone $OC = x$ y se considera la figura engendrada por rotación alrededor de AB.

a) ¿Cuál es la superficie engendrada por CD? Indicar el lugar de sus puntos de contacto con la esfera de diámetro AB.

b) Calcular en función de R y x:

1º el área total S de la superficie engendrada por CDH (designando por H la proyección ortogonal de D sobre OA);

2º el área S' de la zona engendrada por el arco AD;

3º el volumen V engendrado por el triángulo mixtilíneo ACD (formado por el arco AD y los lados CD y AC).

c) Determinar el punto C de tal manera que el volumen V tenga un valor $\pi R^3 m$ dado. Discutir.

(Bachillerato, 1ª parte, Lyon, Francia, 1951).