Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXIV (1990), págs. 129-144

GEOMETRIA INTEGRAL DE LOS GRUPOS ST(N+1) Y ST_1(N+1) EN EL ESPACIO PROYECTIVO P_N

por

Berenice GUERRERO

Introducción. La medibilidad de ciertas familias de subespacios del espacio proyectivo P_n respecto del grupo proyectivo ha sido estudiada por L.A. Santaló [6], R.E. Luccioni [4], y M.I. Stoka [11]. L.A. Santaló en su artículo "Integral Geometry in Projective and Affine Space" demuestra los siguientes teoremas:

TEOREMA 1. *Los subespacios lineales no tienen densidad invariante respecto del grupo proyectivo.*

TEOREMA 2. *Una condición necesaria y suficiente para que el subespacio $S_{h_1}+\ldots+S_{h_m}$, compuesto de m-subespacios lineales de dimensión h_i, sin puntos comunes y con la condición $h_1+h_2+\ldots+h+m < n+1$, tenga una densidad invariante respecto del grupo proyectivo, es que $h_1+h_2+\ldots+h_m+m = n+1$.*

Por otra parte, M.I.Stoka en su artículo "Géometrie Intégrale dans l'espace Projectif P_n", prueba los siguientes teoremas:

TEOREMA 3. *Las familias de sistemas de r puntos, $r \neq n+1$,* *independientes del espacio proyectivo P_n no son medibles. La familia de sistemas de $n+1$ puntos independientes es medible.*

TEOREMA 4. *Para $r \leqslant n$, la familia de r hiperplanos independientes del espacio proyectivo P_n no es medible.*

TEOREMA 6. *La familia del espacio proyectivo P_n de sistemas de punto más hiperplano, con el punto no perteneciente al hiperplano, es medible.*

TEOREMA 7. *La familia de hiperparoboloides no degenerados del espacio proyectivo P no es medible.*

Para cada una de las familias no medibles de los Teoremas 3, 4 y 7, Stoka prueba que existen dos subgrupos del grupo proyectivo respecto de los cuales las familias admiten dos medidas distintas.

En el presente artículo se estudia la medibilidad de algunos subespacios del espacio proyectivo respecto de dos subgrupos del grupo proyectivo, a saber: el grupo triangular especial $ST(n+1)$, $n > 1$, de matrices triangulares con determinante 1, y el grupo $ST_1(n+1)$ de matrices triangulares con unos en la diagonal.

1. Grupo triangular especial $ST(n+1)$. El grupo triangular $ST(n+1)$ con $n > 1$ es el grupo de las matrices triangulares $(n+1) \times (n+1)$ de determinante uno, tales que $ST(n+1) = ((a_{ij}))$ con $a_{ij} = 0$ para $0 \leqslant j < i \leqslant n$ (ver [5], pág.64).

Cuando el grupo triangular $ST(n+1)$ opera sobre el espacio proyectivo P_n puede ser representado por el sistema de ecuaciones

$$x'_k = \sum_{i=k}^{n} a_{ki} x i, \quad k = 0,1,\ldots n \qquad (1)$$

con $|a_{ki}| = 1$, siendo $x_o, x_1, \ldots, x_n$ (respectivamente $x'_o, \ldots, x'_n$) las coordenadas homogéneas en P_n. Las ecuaciones (1) dan lugar a la representación matricial $X' = AX$ donde A es la matriz triangular $((a_{ij}))$ con $a_{ij} = 0$ para $0 \leqslant j < i \leqslant n$, $a_{ii} > 0$, $i = 0,\ldots,n$, X' y X son matrices columnas cuyos elementos son las coordenadas homogéneas $x'_o,\ldots,x'_n$ y $x_o,\ldots,x_n$, respectivamente. Esto significa que podemos considerar el grupo (1) como el grupo de transformaciones determinado por los n+1 puntos analíticos:

$$\begin{aligned} A_o &= (a_{oo},0,\ldots,0) \\ A_1 &= (a_{o1},a_{11},0,\ldots 0) \\ A_2 &= (a_{o2},a_{12},a_{22},0,\ldots,0) \\ &\vdots \\ A_n &= (a_{on},a_{1n},a_{2n},\ldots,a_{nn}) \end{aligned} \tag{2}$$

con

$$\det(A_oA_1\ldots A_n) = \det A = 1. \tag{3}$$

Así considerado, el grupo (1) depende de $\frac{n(n+3)}{2}$ parámetros independientes. Las *Formas de Maurer-Cartan* son los elementos (1-formas) linealmente independientes de la matriz

$$\Omega = A^{-1}dA, \tag{4}$$

siendo A la matriz determinada por los puntos analíticos (2) y dA la diferencial de ésta. Si ω_{ij} son las 1-formas de Maurer-Cartan, ellas (por (3) y (4)) satisfacen la relación

$$dA_j = \sum_{k=o}^{j} A_k\omega_{kj}, \quad \begin{matrix} j = 0,\ldots,n \\ k \leqslant j \end{matrix} \tag{5}$$

con

$$\sum_{i=o}^{n} \omega_{ii} = 0. \tag{6}$$

Diferenciando (5) y utilizando (5) y (6) obtenemos las ecuaciones

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=i}^{j} \omega_{ik}\wedge\omega_{kj}, \quad \begin{matrix} i,j = 0,\ldots,n, \\ i < k \end{matrix} \tag{7}$$

llamadas las *ecuaciones de estructura de Maurer-Cartan* del grupo (1). El grupo (1) no es unimodular (ver [5] pag. 64); luego, para las constantes de estructura se tiene $\sum_{k=0}^{n} C_{ik}^{k} = 0$ (ver [8] pág. 178). Con estos elementos dados, procedemos al estudio de densidades invariantes de subespacios del espacio proyectivo P_n, respecto del grupo (1)

1.1. Densidad para subespacios lineales. Sea S un subespacio lineal del espacio proyectivo P_n, de dimensión $h, h \leq n$. Suponemos que S está determinado por los puntos analíticos: A_n, $A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_{n-h}$. S permanece fijo si, y sólo si, las diferenciales dA_i para $i = n, n-1, \ldots, n-h$, son combinaciones lineales de los puntos A_i para $i = n, n-1, \ldots, n-h$. Dada la relación (5), esto quiere decir que S determina el sistema:

$$\omega_{ij} = 0 \text{ para } \begin{cases} i = 0, 1, \ldots, n-(h+1) \\ j = n, n-1, \ldots, n-h. \end{cases}$$

Para facilitar los cálculos llamamos

$$\Omega_0 = \bigwedge_{i=0}^{n-(h+1)} \omega_{in}, \qquad \Omega_1 = \bigwedge_{i=0}^{n-(h-1)} \omega_{i,n-1}, \ldots$$

$$\Omega_h = \bigwedge_{i=0}^{n-(h+1)} \omega_{i,n-h} \quad \text{y} \quad \Omega = \Omega_0 \wedge \Omega_1 \wedge \ldots \wedge \Omega_h.$$

Entonces la $(h+1)(n-h)$-forma Ω es la densidad invariante para S, si, y solo si, $d\Omega = 0$. De la relación (7) se tiene para cada $j = 0, \ldots, h$

$$d\Omega_j = \Omega_j \wedge \sum_{i=0}^{n-(h+1)} (\omega_{ii} - \omega_{n-j,n-j}). \tag{8}$$

Usando (8) la diferencial de Ω resulta ser:

$$d\Omega = (-1)^h \Omega \wedge \left[\sum_{i=0}^{n-(h+1)} (\omega_{ii} - \omega_{nn}) + \ldots + (\omega_{ii} - \omega_{n-h,n-h}) \right].$$

De la relación (6) y simplificando podemos escribir:

$$d\Omega = (-1)^{h+1}(n+1)\Omega \wedge \sum_{n-h}^{n} \omega_{ii}. \tag{9}$$

Esta diferencial es cero sólo si $n-h = 0$ (por (6)), es decir, cuando S tiene dimensión n. Luego hemos probado:

TEOREMA 1.1. *El conjunto de subespacios lineales de dimensión $h < n$ no tiene densidad invariante respecto del grupo $ST(n+1)$.*

1.2. Densidad para pares de h-plano S y punto P, con $P \notin S$, $h = 0,1,2,\ldots,n-1$. Tomamos el h-plano S generado por los puntos analíticos: $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_{n-h}$ (ver 1.1.) y el punto determinado por la suma $A_n + A_{n-(h+1)}$.

De (1.1.) sabemos que S determina el sistema:

$$\omega_{ij} = 0 \text{ para } \begin{cases} i = 0,1,\ldots,n-(h+1) \\ j = n,n-1,\ldots,n-h \end{cases}$$

y, por (5), P determina el sistema:

$$\begin{cases} \omega_{in-(h+1)} = 0 & \text{para } i = 0,\ldots,n-(h+2) \\ \omega_{kn} = 0 & \text{para } k = n-h,\ldots,n-1 \\ \omega_{nn} - \omega_{n-(h+1)n-(h+1)} = 0. \end{cases}$$

Llamamos

$$\Omega_1 = \bigwedge_{\substack{i=0 \\ j=n,n-1,\ldots n-h}}^{n-(h+1)} \omega_{ij} \quad , \quad \Omega_2 = \bigwedge_{i=0}^{n-(h+2)} \omega_{i,n-(h+1)}$$

$$\Omega_3 = \bigwedge_{i=n-h}^{n-1} \omega_{in} \quad , \quad \Omega_4 = (\omega_{nn} - \omega_{n-(h+1),n-(h+1)})$$

De (9) se tiene

$$d\Omega_1 = (-1)^{h+1}(n+1)\Omega_1 \wedge \sum_{i=n-h}^{n} \omega_{ii}$$

De (5) se obtiene:

$$d\Omega_2 = \Omega_2 \wedge \sum_{i=0}^{n-(h+2)} (\omega_{ii} - \omega_{n-(h+1),n-(h+1)})$$

$$d\Omega_3 = \Omega_3 \wedge \left[\sum_{i=n-h}^{n-1} \omega_{ii} - h\omega_{nn} \right]$$

$$d\Omega_4 = 0.$$

Si Ω es el producto exterior:

$$\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2 \wedge \Omega_3 \wedge \Omega_4,$$

Ω será la densidad para $S+P$, con $P \notin S$, si, sólo si, $d\Omega = 0$. Diferenciando Ω se llega a la expresión:

$$d\Omega = -(n+1)\Omega \wedge \sum_{i=n-(h+1)}^{n} \omega_{ii} \tag{10}$$

Puesto que las ω_{ij} están relacionadas únicamente por la ecuación (6), esta diferencial es cero sólo en el caso $n-(h+1) = 0$, esto es, cuando $h = n-1$. Hemos probado:

TEOREMA 1.2. *La suma de un subespacio lineal más punto, con $P \notin S$, admite una densidad invariante respecto al grupo $ST(n+1)$ sólo si el subespacio es un hiperplano.*

1.3. Densidad para pares de h-plano S y punto P, con $P \in S$, $h = 0,1,2,\ldots,n-1$. Sea S el h-plano determinado por los puntos $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_{n-h}$ y P el punto analítico A_n. Por el numeral (1.1.) sabemos que S así definido determina el sistema:

$$\omega_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad \begin{cases} i = 0,\ldots,n-(h+1) \\ j = n,\ldots,n-h. \end{cases}$$

Por el mismo numeral (1.1.)($h = 0$), P define el sistema:

$$\omega_{in} = 0 \quad \text{para } i = 0,1,\ldots,n-1.$$

Luego, el par $S+P$ con $P \in S$ define el sistema:

$$\begin{cases} \omega_{ij} = 0 \quad \text{para} \begin{cases} i = 0,\ldots,n-(h+1) \\ j = n,n-1,\ldots,n-h \end{cases} \\ \\ \omega_{in} = 0 \quad \text{para } i = n-h,\ldots,n-1 \end{cases}$$

Llamando

$$\Omega_1 = \bigwedge_{\substack{i=0 \\ j=n,n-1\ldots n-h}}^{n-(h+1)} \omega_{ij} \quad , \quad \Omega_2 = \bigwedge_{i=n-h}^{n-1} \omega_{in}$$

y

$$\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2$$

El conjunto $S+P$ con $P \in S$ tiene densidad invariante respecto al grupo (1) si, y sólo si, $d\Omega = 0$. De (9) la diferencial de Ω_1 resulta ser

$$d\Omega_1 = (-1)^{h+1}(n+1)\Omega_1 \sum_{i=n-h}^{n} \omega_{ii}$$

y, de (5),

$$d\Omega_2 = -\Omega_2 \wedge \left[\sum^{n-(h+1)} \omega_{ii} + (h+1)\omega_{nn} \right]$$

Luego

$$d\Omega = \Omega \wedge \left[(n+2) \sum_{i=n-h}^{n} \omega_{ii} + (h+1)\omega_{nn} \right] \tag{11}$$

producto exterior que es diferente de cero para todo $h < n$. Luego hemos probado:

TEOREMA 1.3. *El conjunto $S+P$ con $P \in S$ no tiene densidad invariante respecto del grupo triangular $ST(n+1)$.*

§2. Grupo triangular $ST_1(n+1)$. El grupo $ST_1(n+1)$ es el grupo de matrices $((a_{ij}))$, $(n+1)\times(n+1)$, tales que: $a_{ij}=0$ para $0\leqslant j<i\leqslant n$ y $a_{ii}=1$ para $0\leqslant i\leqslant n$ (ver [5] pág. 65).

$ST_1(n+1)$ por ser un subgrupo normal de $ST(n+1)$, es un grupo unimodular (ver [8] pág. 158), es decir, el elemento de volumen de $ST_1(n+1)$ invariante a izquierda, es también invariante a derecha.

Considerando el grupo $ST_1(n+1)$ como grupo de transformaciones sobre el espacio proyectivo P_n, puede ser definido por las ecuaciones:

$$x_i^* = x_i + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}x_k, \qquad i = 0,\dots,n, \tag{1}$$

siendo $x_0\dots x_n$ coordenadas homogéneas en P_n, y los $\frac{n(n+1)}{2}$ parámetros del grupo a_{ij}, los elementos de la matriz

$$A = ((a_{ij})), \quad \text{con} \begin{cases} a_{ij} = 0 & \text{para } 0\leqslant j<i\leqslant n \\ a_{ii} = 1 & \text{para } 0\leqslant i\leqslant n \end{cases}$$

Las ecuaciones (1) también las podemos expresar en forma matricial por

$$X^* = AX, \quad \text{con } |A| = 1,$$

X^* y X vectores columnas $(x_0^*,\dots,x_n^*)$ y $(x_0,\dots,x_n)$ respectivamente. Definiendo los puntos $A_0,A_1,\dots,A_n$ por

$$\begin{aligned} A_0 &= (1,0,\dots,0)\\ A_1 &= (a_{01},1,0,\dots,0)\\ &\vdots\\ A_j &= (a_{0j},a_{1j},\dots,a_{j-1,j},1,0,\dots,0)\\ &\vdots\\ A_n &= (a_{0n},a_{1n},\dots,a_{n-1,n},1) \end{aligned} \tag{2}$$

la matriz A será la matriz de columnas $A_0\dots A_n$, con $|A| = |A_0A_1\dots A_n| = 1$.

Formas de Maurer-Cartan. Las 1-formas ω_{ij} definidas por la matriz triangular

$$\Omega = ((\omega_{ij})) = A^{-1}dA$$

son las $\frac{n(n+1)}{2}$ componentes relativas del grupo o formas de Maurer-Cartan. Si

$$((\alpha_{ij})) = A^{-1} \quad \text{y} \quad ((da_{ij})) = dA,$$

ellas están dadas por la expresión

$$\omega_{ij} = da_{ij} + \sum_{k=i+1}^{j-1} \alpha_{ik}da_{kj}, \qquad i < j, \tag{3}$$

y también verifican

$$da_{ij} = \omega_{ij} + \sum_{k=i+1}^{j-1} a_{ik}\omega_{kj}, \qquad i < j. \tag{4}$$

De (2) y (4) se encuentra para cada A_j la expresión:

$$\begin{cases} dA_j = \sum\limits_{k=o}^{j-1} A_k\omega_{kj}, \qquad k < j = 1,\dots,n, \\ \\ dA_o = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Las ecuaciones de estructura, obtenidas al diferenciar (5) son:

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=i+1}^{j-1} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}, \qquad i < j. \tag{6}$$

De donde

$$d\omega_{ii+1} = 0, \qquad i = 0\dots n-1. \tag{7}$$

2.1. Densidad para subespacios lineales. Sea S_h el subespacio generado por los puntos $A_n, A_{n-1}\dots A_{n-h}$ con $h < n$. El subgrupo de $ST_1(n+1)$ que deja invariante a S_h define, por (5), el sistema completamente integrable:

$$\omega_{ij} = 0 \quad \text{para} \begin{cases} i = 0, \ldots, n-(h+1) \\ j = n, \ldots, n-h. \end{cases} \tag{8}$$

Luego si Ω es el producto exterior

$$\Omega = \bigwedge_{\substack{i=0 \\ n\ h\leqslant j\leqslant n}}^{n-(h+1)} \omega_{ij} \tag{9}$$

Ω será la densidad invariante para S_h sespecto del grupo $ST_1(n+1)$ si, y sólo si, $d\Omega = 0$. De (6)

$$d\Omega = \sum_{\substack{\ell=0 \\ n-h\leqslant j\leqslant n}}^{n-(h+1)} (-1)^{\ell} \left[\bigwedge_{i=\ell+1}^{n-(h+1)} \omega_{ij} \wedge \sum_{k=\ell+1}^{j-1} \omega_{\ell k} \wedge \omega_{jk} \right] \tag{10}$$

Pero para cada j en (10) el producto exterior en el paréntesis cuadrado es nulo, luego

$$d\Omega = 0$$

Hemos, pues, probado:

TEOREMA 2.1. *Los subespacios lineales de dimensión $h < n$ admiten una densidad invariante respecto del grupo $ST_1(n+1)$.*

Si S_h tiene una densidad invariante respecto de $ST_1(n+1)$, entonces tiene una medida invariante, dada por $\int_{S_h} \Omega$.

Si $h = 0$, S_h es el conjunto de puntos P para el cual el sistema completamente integrable (8) es, $\omega_{in} = 0$ para $0 \leqslant i \leqslant n-1$, y su densidad invariante está dada por:

$$dP = \bigwedge_{i=0}^{n-1} \omega_{in}. \tag{11}$$

Usando (3), dP es el producto exterior:

$$dP = da_{0n} \wedge da_{1n} \wedge \ldots \wedge da_{n-1,n}.$$

Tomando coordenadas no homogéneas $(x_o,\ldots,x_{n-1})$ para el punto P tales que $x_i = a_{in}$ para $0 \leqslant i \leqslant n-1$, resulta

$$dP = dx_o \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}. \tag{12}$$

Es decir, la densidad para puntos es el elemento de volumen del espacio.

Si $h = n-1, S_h$ es el hiperplano H, para el cual el sistema (8) está dado por

$$\omega_{oj} = 0, \quad j = 1,2,\ldots n-1,n, \tag{13}$$

y su densidad invariante por:

$$dH = \bigwedge_{j=1}^{n} \omega_{oj}. \tag{14}$$

De (3) encontramos que ω_{ij} puede ser expresado en la forma:

$$\omega_{ij} = -\left[d\alpha_{ij} + \sum_{k=i+1}^{j-1} a_{kj} d\alpha_{ik}\right], \quad 0 \leqslant i < j \leqslant n \tag{15}$$

de donde dH resulta ser:

$$dH = d\alpha_{o1} \wedge d\alpha_{o2} \wedge \ldots \wedge d\alpha_{on}, \tag{16}$$

siendo $((\alpha_{ij})) = A^{-1}$. Por (1) la ecuación del hiperplano H está dada por:

$$x_o + \alpha_{o1}x_1 + \ldots + \alpha_{on}x_n = 0.$$

Tomando coordenadas no homogéneas z_i, k_i tales que

$$z_i = \frac{x_i}{x_n} \quad \text{y} \quad k_i = \frac{\alpha_{oi}}{\alpha_{on}}, \quad \text{con} \quad k_o = \frac{1}{\alpha_{on}}$$

$$i = 0\ldots n \qquad i = 1\ldots n-1$$

la ecuación de H puede escribirse:

$$k_o z_o + k_1 z_1 + \ldots + k_{n-1} z_{n-1} + 1 = 0,$$

y dH resulta:

$$dH = \frac{dk_o \wedge d_{k1} + \ldots + dk_{n-1}}{(k_o)^{n+1}}.$$

Con el fin de simplificar esta expresión llamamos $dK = dk_o \wedge \ldots \wedge dk_{n-1}$. Entonces

$$dH = \frac{dK}{(k_o)^{n+1}} \tag{17}$$

2.2. Densidad para h-plano y punto (S_h+P) con $P \notin S_h$. Sea S_h el plano generado por los puntos $A_n, A_{n-1} \ldots A_{n-h}$, con $h < n$, y P el punto de coordenadas no homogéneas $x_i, 0 \leqslant i \leqslant n-1$, tales que $x_i = \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, i = 0, \ldots n-1$, entonces, de (4) y (8), el subespacio S_h+P define el sistema completamente integrable:

$$\begin{cases} \omega_{ij} = 0 \quad \text{para} \begin{cases} i = 0 \ldots n-(h+1), \\ j = n, n = 1, \ldots n-h, \end{cases} \\ \\ \sum_{j=i+1}^{n} \omega_{ij} = 0 \quad \text{para } i = 0, \ldots, -1. \end{cases} \tag{18}$$

Llamamos

$$\Omega_s \quad \bigwedge_{\substack{i=o \\ n-h \leqslant j \leqslant n}}^{n-(h+1)} \omega_{ij}, \qquad \Omega_p = \bigwedge_{i=o}^{n-1} \quad \sum_{j=i+1}^{n} \omega_{ij}$$

entonces $\Omega = \Omega_s \wedge \Omega_p$ es la densidad invariante para S_h+P si, y sólo si, $d\Omega = 0$. Por el teorema 2.1, $d\Omega_s = 0$ y $d\Omega_p = 0$, luego:

$$d\Omega = d\Omega_s \wedge \Omega_p + (-1)^n \Omega_s \wedge d\Omega_p = 0.$$

Hemos probado:

TEOREMA 2.2. *Los subespacios compuestos de un h-plano $S_h (h < n)$ y punto, con $P \notin S_h$, admiten una densidad inva-*

riante respecto del grupo $ST_1(n+1)$.

Es decir, (S_h+P) con $P \notin S_h$ admite una medida inveriante respecto de $ST_1(n+1)$, dada por la integral $\int_{S_{h+P}} \Omega$.

Llamando $dS_h = \Omega_h$ y $dP = \Omega_p$, la densidad de (S_h+P) resulta:

$$d(S_h+P) = dS_h \wedge dP$$

Si $h = 0, S_h$ es un conjunto de puntos, luego la densidad para S_h+P es la densidad para pares de puntos P_1+P_2, igual al producto de las densidades:

$$d(P_1+P_2) = dP_1 \wedge dP_2$$

Si $h = n-1, S_h$ es un hiperplano H y

$$d(S_h+P) = d(H+P) = dH \wedge dP.$$

Reemplazando en (12) y (17) resulta:

$$d(H+P) = \frac{dK \wedge dP}{(k_o)^{n+1}}, \qquad (19)$$

donde $k_o z_o + \ldots + k_{n-1} z_{n-1} + 1 = 0$ es la ecuación del hiperplano y, $dP = dx_o \ldots dx_{n-1}$ la densidad de P con coordenadas no homogéneas $(x_o \ldots x_{n-1})$.

Llamando p y $\mathcal{D}$ a las distancias de H al origen y al punto P, respectivamente, (19) se transforma en

$$d(H+P) = \left(\frac{p}{\mathcal{D}}\right)^{n+1} dK \wedge dP$$

con $dK = dk_o \wedge \ldots \wedge dk_{n-1}$. Expresión encontrada por Luccioni [4] para la densidad invariante de $H+P$ respecto del grupo proyectivo. Es decir, la densidad para $H+P$ en el espacio proyectivo, coincide respecto de los grupos $ST_1(n+1)$ y proyectivo, como debe ocurrir (por ser $ST_1(n+1)$ un subgrupo del grupo proyectivo (ver [7])

2.3. Densidad para h-plano y punto (S_h+P) con $P \in S_h$. Sea S_h el subespacio generado por los $h+1$ puntos $A_n, A_{n-1} \ldots A_{n-h}$ y P el punto A_n. El subespacio (S_h+P) así definido por (8) y (11) determina el sistema completamente integrable:

$$\begin{cases} \omega_{ij} = 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-(h+1), \quad n-h \leqslant j \leqslant n, \\ \omega_{in} = 0, \quad \text{para } n-h \leqslant i \leqslant n-1. \end{cases} \tag{21}$$

Llamando

$$\Omega_s = \bigwedge_{\substack{i=0 \\ n-h\leqslant j\leqslant n}}^{n-(h+1)} \omega_{ij} \qquad \text{y} \qquad \Omega_p = \bigwedge_{i=n-h}^{n-1} \omega_{in},$$

S_h+P admite una densidad invariante $\Omega = \Omega_s \wedge \Omega_p$ si, y sólo si, $d\Omega = 0$.

Por el teorema 2.1. $d\Omega_s = 0$, luego $d\Omega = 0$, si, y sólo si, $\Omega_s \wedge d\Omega_p = 0$. Por (6)

$$d\Omega_p = \sum_{\ell=n-h}^{n-1} \left\{ (-1)^{(n-h)-\ell} \left[\bigwedge_{i=n-h}^{n-1} \omega_{in} (\omega_{\ell n}) \right] \wedge \sum_{k=\ +1}^{n-1} \omega_{\ell k} \wedge \omega_{kn} \right\} \tag{22}$$

donde $(\omega_{\ell n})$ significa el término excluído del producto $\bigwedge_{i=n-h}^{n-1} \omega_{in}$ en cada sumando. Fácilmente se observa que para cada valor de ℓ aparecen 1-formas repetidas, luego el producto exterior se hace cero para cada $\ell, n-h \leqslant \ell \leqslant n-1$ y $d\Omega_p = 0$. Así queda probado el:

TEOREMA 2.3. *Los subespacios compuestos de h-plano $S_h (h < n)$ y punto, S_h+P, con $P \in S_h$, admiten una densidad invariante respecto del grupo $ST_1(n+1)$ dada por:*

$$d(S_h+P) = \Omega = \Omega_s \wedge \Omega_p$$

Si $h = n-1$, S_h es el hiperplano y

$$d(S_h+P) = d(H+P) = \bigwedge_{j=1}^{n} \omega_{0j} \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} \omega_{in}$$

Por (14) sabemos que $dH = \bigwedge_{j=1}^{n} \omega_{oj}$, luego

$$d(H+P) = dH \wedge \bigwedge_{i=j}^{n-1} \omega_{in}$$

De (17) y (3) resulta:

$$d(H+P) = \frac{dK \wedge (da_{1n} \wedge da_{2n} \wedge \ldots \wedge da_{n-1n})}{(k_o)^{n+1}}$$

siendo $dK = dk_o \wedge \ldots \wedge dk_{n-1}$, con $k_o z_o + \ldots + k_{n-1} z_{n-1} = 0$ la ecuación de H. Si $(x_o \ldots x_{n-1})$ son las coordenadas no homogéneas de P, con $x_i = a_{in} 0 \leqslant i \leqslant n-1$, entonces

$$d(H+P) = \frac{dK \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}}{(k_o)^{n+1}}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Cartan, M.E., *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile*, Paris, Gauthier-Villars, 1937.

[2] Chern, S., *On Integral Geometry in Klein spaces*, Ann. of Math. 43 (1942), 178-189.

[3] Chevalley, C., *Theory of Lie Groups*, Princeton Univ. Press, 1946.

[4] Luccioni, R.E., *Geometría Integral en Espacios Proyectivos*, Instituto de Matemática, Univ. Nac. de Tucumán, Vol. 15 (53-80), 1964.

[5] Reiter, H., *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups*, Oxford Univ. Press, London and New York, 1968.

[6] Santaló, L.A., *Integral Geometry in Projective and Affine Spaces*, Ann. of Math. (2) (739-755), 1950.

[7] Santaló, L.A., *Introduction to Integral Geometry*, Hermann et Cie Editeurs, Paris, 1953.

[8] Santaló, L.A., *Integral Geometry and Geometric Probability*, Addison-Wesley Publishing Company, U.S.A. 1976.

[9] Stoka, M., *Géométrie Intégrale. (Memorial de Sciences Mathematiques, Fasc. 165)*, Gauthier-Villars Ed., Paris, 1968.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
BOGOTA. D.E. Colombia

(Recibido en diciembre de 1989, la versión revisada en febrero de 1990).