Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXIV (1990), págs. 145-151

UNA NOTA SOBRE M_3-RETICULADOS

por

Aldo V. FIGALLO

Resumen. En el presente artículo determinamos las M_3-congruencias. Probamos que todo M_3-reticulado es un álgebra de Brouwer. Hallamos la relación existente entre los n-ideales de un M_3-reticulado A y los ideales del (0)-reticulado distributivo $K(A)$ de sus elementos invariantes. Finalmente probamos que todo M_3-reticulado con último elemento es un álgebra de Lukasiewicz trivalente centrada.

1. Preliminares y notaciones. En [4] se introduce una definición equivalente a la siguiente:

1.1. DEFINICION. Un M_3-*reticulado* es un álgebra $(A,\wedge, \vee,-,\Delta,0)$ de tipo $(2,2,1,1,0)$ tal que el reducto $(A,\wedge,\vee,0)$ es un (0)-reticulado distributivo y se satisfacen las siguientes propiedades:

(A0) (definición) $\nabla x = x \vee -x$,

(A1) $\Delta(x \wedge -x) = 0$,

(A2) $--x = x$,

(A3) $-\Delta x \leqslant \Delta x$ (donde $x \leqslant y$ si $x \wedge y = x$ o $x \vee y = y$),

(A4) $\Delta\nabla x = \nabla x$,

(A5) $\Delta(x \vee y) = \Delta x \vee \Delta y$,

(A6) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$.

Cuando no haya lugar a dudas, denotaremos a cualquier M_3-reticulado por su conjunto soporte. Representaremos las variedades de los (0)-reticulados distributivos y los M_3-reticulados con R_0 y M_3 respectivamente.

1.2. DEFINICION. ([4]). Si $A \in M_3$ entonces:

(1) $a \in A$ se dice *invariante* si cumple $a = \nabla a$,

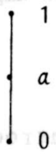
(2) si $X \subseteq A$, representaremos al conjunto $\{\nabla x : x \in X\}$ con $K(X)$.

1.3. LEMA. ([4]). *Si* $A \in M_3$, *entonces:*

(1) $b \in K(A)$ *si y sólo si se cumple* $b = \Delta b$,

(2) $(K(A), \wedge, \vee, 0) \in R_0$.

1.4. Un ejemplo importante de M_3-reticulado, es $T = (T, \wedge, \vee, -, \Delta, 0)$ [4], cuyo diagrama de Hasse y operaciones correspondientes son:



x	$-x$	Δx
0	0	0
a	1	0
1	a	1

1.5. TEOREMA ([4]). *Si* $A \in M_3$ *no es trivial, entonces existe un conjunto no vacío* $E(A)$ *tal que* A *es isomorfo a un* M_3*-subreticulado de* $T^{E(A)}$.

Sea $A \in R_0$, un ideal I de A es un subconjunto de A con las siguientes propiedades:

(N1) $0 \in I$,

(N2) si $x, y \in I$ entonces $x \vee y \in I$,

(N3) si $x \in I$ entonces $x \wedge y \in I$ para todo $y \in A$.

1.6. DEFINICION. ([4]). Un *n-ideal* de un M_3-Reticulado A es un ideal N de A que verifica:

(N4) Si $x \in N$ entonces $-x \in N$.

La condición N4 es equivalente a (N'4): Si $x \in N$ entonces $\nabla x \in N$.

Un n-ideal es *primo, irreducible o completamente irreducible* si es un ideal primo, irreducible o completamente irreducible respectivamente.

Representaremos la familia de todos los n-ideales de A con $\mathbb{N}(A)$.

Si $A \in M_3, M \in \mathbb{N}(A)$ es un *n-ideal maximal* si verifica:

(M1) $A \neq M$,

(M2) si $M \subseteq N$ y $N \in \mathbb{N}(A)$ entonces $M = N$ o $N = A$.

Si $A \in M_3$ y $X \subseteq A, I(X), F(X)$ representan al ideal y al n-ideal generado por X respectivamente.

1.7. LEMA ([4]). $F(X) = I(K(X))$.

1.8. LEMA. *Si* $A \in M_3$, *entonces se satisfacen:*

(A7) $\Delta x \wedge \Delta-(\Delta x \vee -\Delta y) = 0$,

(A8) $\Delta y \leqslant \Delta x \vee \Delta-(\Delta x \vee -\Delta y)$,

(A9) $x \leqslant y \vee \Delta(-(x \vee \nabla y) \vee -(y \vee -x))$,

(A10) $(x \wedge y \wedge z) \vee \Delta(-(x \vee \nabla y) \vee -(y \vee -x)) \leqslant z$,

(A11) (*definición*) $x/y = x \wedge \Delta(-(x \vee \nabla y) \vee -(y \vee -x))$,

(A12) $x \wedge (x/y) = x/y$,

(A13) $\Delta(x/y) = \Delta x/\Delta y$,

(A14) $-x/-y \leqslant -(x/y) \vee -(y/x)$,

(A15) $-(x \vee y) \leqslant -x \vee -y$ ([4]),

(A16) $\nabla\Delta x = \Delta x$ ([4]),

(A17) $\Delta x \leqslant x$ ([4]).

Demostración. Es consecuencia inmediata del teorema 1.5.

2. Congruencias y n-ideales.

2.1. LEMA. *Si* $A \in M$, *entonces se satisfacen:*

(A18) $x \leq y \vee (x/y)$,

(A19) *si* $x \leq y \vee z$ *entonces* $x/y \leq z$.

Demostración.

(A18) De $x \leq x \vee y$ y A9 $x \leq y \vee \Delta(-(x \vee \nabla y) \vee -(y \vee -x))$, luego por A11 tenemos $x \leq y \vee (x/y)$.

(A19) Sea $x \leq y \vee z$, entonces por A12, A11 y A10:

$$x/y = x \wedge x/y \wedge (y \vee z) = (y \wedge x/y) \vee (z \wedge x/y)$$

$$= (x \wedge y \wedge z) \vee \Delta(-(x \vee \nabla y) \vee -(y \vee -z)) \leq z.$$

2.2. OBSERVACION. De 2.1. resulta que si $(A, \wedge, \vee, -, \Delta, 0) \in M_3$, entonces $(A, \wedge, \vee, 1, 0)$ es un álgebra de Brouwer [2,pag. 173] (ver también [9, pag. 78]).

Representaremos la clase de las álgebras de Brouwer con Br. Es bién conocido que si $(A, \wedge, \vee, 1, 0) \in Br$ y $B \subseteq A$ es un ideal entonces $R(B) = \{(x,y) \in A^2 : (x/y) \vee (y/x) \in B\}$ es un Br-Congruencia sobre A. Además para cada $R \in \mathrm{Con}_{Br}(A)$, existe un ideal $B \subseteq A$ tal que $R = R(B)$. Si $[X]_R$ denota la R-clase de equivalencia del elemento $x \in A$, entonces $[0]R = B$.

2.3. LEMA. *Si* $R \in \mathrm{Con}_{M3}(A)$, *entonces existen* $N \in \mathbb{N}(A)$ *tal que* $R = R(N)$.

Demostración. Sea (1) $(x,y) \in R(N)$ entonces se cumplen:

(i) $(\Delta x, \Delta y) \in R(N)$,

(ii) $(-x, -y) \in R(N)$,

En efecto, (i) y (ii) son consecuencia de la hipótesis (1), A5, A13 y A14.

El teorema 2.4. y el lema 2.5. generalizan al lema 1.3. y corolario 1.4. de [5], y ponen en evidencia la impor cia del M_3-Reticulado $K(A)$.

2.4. TEOREMA. *Si* $A \in M_3$ *entonces* $K(A) \in R_0$ *es un álgebra de Boole generalizada* ([2,pag. 55]).

Demostración. Es suficiente probar que para cada

$y \in K(A)$ el segmento $[0,y] = \{x \in K(A) : 0 \leq x \leq y\}$ es un álgebra de Boole. Es claro que $[0,y]$ es un subreticulado distributivo de $K(A)$. Resta ver que todo $x \in [0,y]$ tiene un complemento. El elemento $x' = \Delta\text{-}(x \vee -y)$ pertenece a $K(A)$, además por A7 $x \wedge x' = \Delta x \wedge \Delta\text{-}(\Delta x \vee -\Delta y) = 0$. Por otra parte como $x \leq y$, de A0 y A16 $-x \leq \nabla x = \nabla\Delta x = \Delta x = x \leq y$, luego de A17, A15 y A2 $x' = \Delta\text{-}(x \vee -y) \leq -(x \vee -y) \leq -x \vee y = y$, y por lo tanto $x \vee x' \leq y$. Finalmente, teniendo en cuenta A8 $y = \Delta y \leq \Delta x \vee \Delta\text{-}(\Delta x \vee -\Delta y) = x \vee \Delta\text{-}(x \vee -y) = x \vee x'$.

Si $A \in M_3$, representaremos la familia de todos los ideales de $K(A)$ con $I(K(A))$. Sea $C_1 : \mathbb{N}(A) \to I(K(A))$ la aplicación definida por $C_1(N) = N \cap K(A)$ para cada $N \in \mathbb{N}(A)$, entonces:

2.5. LEMA. *Si consideramos los conjuntos* $\mathbb{N}(A)$, $I(K(A))$ *ordenados por la relación de inclusión, entonces la aplicación* C_1 *es un isomorfismo de orden.*

Demostración. Sólo probaremos que C_1 es sobre. Sea $B \in I(K(A))$ y $N = F(B) \in \mathbb{N}(A)$. Como $B \subseteq N$ entonces $B \subseteq K(N) = N \cap K(A)$. Además si $z \in N \cap K(A)$ entonces $z \in I(K(B)) = I(B)$, luego existe $z_1 \in B$ tal que $z \leq z_1$ y como $z \in K(A)$ resulta que $z \in B$. Tenemos así $B = N \cap K(A) = C_1(N)$.

Del lema 2.5 resulta que las nociones de n-ideal maximal, n-ideal primo, n-ideal irreducible y n-ideal completamente irreducible coinciden en los M_3-Reticulados, dado que las nociones de correspondientes para ideales coinciden para las álgebras de Boole generalizadas, y la transformación C_1 respeta estos conceptos.

2.6. COROLARIO. *Todo* n*-ideal propio de un* M_3*-Reticulado* A *es intersección de* n*-ideales maximales.*

3. M_3-Reticulados con último elemento. En este apartado consideramos las álgebras $(A,\wedge,\vee,-,\Delta,0,1)$ tales que $(A,\wedge,\vee,-,\Delta,0) \in M_3$ y $1 \in A$ verifica $x \vee 1 = 1$ para todo $x \in A$. Representamos esta variedad con $M_{3,1}$.

Es claro que $(T,\wedge,\vee,-,\Delta,0,1)$, donde $(T,\wedge,\vee,-,\Delta,0)$ es el indicado en 1.4, es un $M_{3,1}$-Reticulado. Si sobre T definimos las operaciones $\to$ y $\neg$ por las fórmulas:

(H1) $x \to y = \Delta-(x \vee -1) \vee y$,

(H2) $\neg x = \Delta-(\nabla x \vee -1)$,

cuyas tablas correspondientes son:

$\to$	0	a	1
0	1	1	1
a	1	1	1
1	0	a	1

x	$\neg x$
0	1
a	0
1	0

entonces se verifica:

(H3) $\nabla x = \neg\neg x$.

Además si definimos $\sim$ por medio de la fórmula:

(H4) $\sim x = (\neg\neg x \to x) \wedge (x \to \neg x)$,

tenemos que $(T,\wedge,\vee,\sim,\nabla,1) \in L_3$, donde L_3 representa la vavariedad de las álgebras de Lukasiewicz trivalentes en el sentido de [8] (ver al respecto [1],[6],[11],[12]).

Teniendo en cuenta el teorema 1.5. resulta:

3.1. TEOREMA. *Si* $(A,\wedge,\vee,-,\Delta,0,1) \in M_{3,1}$ *y* $\sim,\nabla$ *son las indicadas en* A_0 *y* H_4, *entonces* $(A,\wedge,\vee,\sim,\nabla,1) \in L_3$.

Por otra parte como $\sim -1 = -1$, entonces $(A,\wedge,\vee,\sim,\nabla,1)$ es un álgebra de Lukasiewicz trivalente centrada con centro $c = -1$ (ver [11]).

REFERENCIAS

[1] Abad, M. and Figallo, A.V., *Charaterization of three valued Lukasiewicz algebras*, Rep. on Math. Logic, 18 (1984), 47-59.

[2] Balbes, R. and Dwinger, P.H., *Distributive lattices*, Univ. Missouri Press, Columbia (1974)

[3] Birkhoff, G., *Lattice theory*, 3rd edition, Amer. Math. Soc., Providence R.I. (1967).

[4] Figallo, A.V., *Los M_3-Reticulados*, Rev. Colombiana de Matemáticas, XXI(1987), 95-106.

[5] Figallo, A.V., *M_3-Reticulados finitos*, por aparecer en Rev. de la Unión Matemática Argentina.

[6] Figallo, A.V. y Tolosa, J.J., *Algebras de Lukasiewicz trivalentes*, Univ. Nac. San Juan, Argentina (1982).

[7] Moisil, G.C., *Essais sur les logiques non chrysippiennes*, Ed. Academiei Bucarest (1972).

[8] Monteiro, A., *Sur la definition des algebres de Lukasiewicz trivalentes*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys, R.P. Roum, 7 (55), (1963), 3-12.

[9] Monteiro, A., *Filtros e Ideales II*, Notas de Matemática Nº 5, Instituto de Matemática Pura e aplicada do conselho Nacional de Pesquisas, Rio de Janeiro, (1959).

[10] Monteiro, A., *Axiomes independants pour les algebres de Brouwer*, Rev. de la Unión Matemática Argentina, XVII (1955), 149-160.

[11] Monteiro, L., *Axiomes independants pour les algèbres de Lukasiewicz trivalentes*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P. Roum., 7 (55)(1963), 199-202.

[12] Monteiro, L., *Algèbres de Post et de Moisil trivalentes monadiques libres*, Logique et Analyse, 79 (1977), 329-337.

Instituto de Ciencias Basicas
Universidad Nacional de San Juan
Ava. Ignacio de la Roza 230 (0)
5400 - SAN JUAN
ARGENTINA

(Recibido en Noviembre de 1989; la versión revisada en Junio de 1990.)