Revista

de

Matemáticas Elementales

VOLUMEN IV FASCICULOS 2-5

Tarifa Postal Reducida. — Licencia Nº 1993 del Ministerio de Correos y Telégrafos.

COMENTARIOS SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA TRIGONOMETRIA

Por T. F. Hickerson

La Trigonometría se originó con los problemas de levantamiento de planos y navegación, pero se siguió desarrollando continuamente y se extendió a numerosos campos del análisis matemático y científico.

Sin restarle importancia al tema de la computación, el presente trabajo es un intento de simplificación, especialmente del tópico relacionado con la derivación de fórmulas para resolver triángulos. (Los estudiantes deben estar bien familiarizados con el método de las proyecciones y con los conceptos de transversa abierta y cerrada).

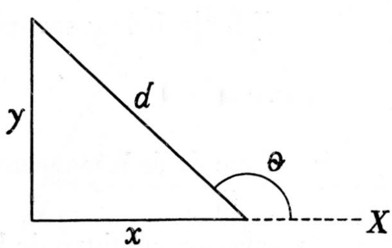

Figura 1

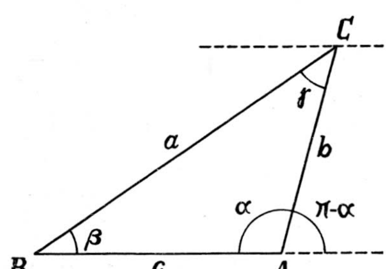

Figura 2

Tratando el triángulo $A\ B\ C$ como una transversa cerrada y teniendo en cuenta que las proyecciones horizontal y vertical son (Fig. 1):

$$x = d \cos \theta, \; y = d \operatorname{sen} \theta$$

en donde d es la longitud de una línea y θ el ángulo que ella forma con el eje de las X, procedemos en la siguiente forma (Fig. 2):

	DISTANCIA	ANGULO	x	y
AC	b	$\pi - \alpha$	$-b\ cos\ \alpha$	$b\ sen\ \alpha$
CB	a	$\pi + \beta$	$-a\ cos\ \beta$	$-a\ sen\ \beta$
BA	c	0	c	0
			$\Sigma\ x = 0$	$\Sigma\ y = 0$

De $\Sigma\ y = 0$ se deduce que:

(1) $$a\ sen\ \beta = b\ sen\ \alpha$$ (ley de los senos)

De $\Sigma\ x = 0$ se deduce que:

(2) $$a\ cos\ \beta = c - b\ cos\ \alpha$$ (ley de la proyección)

Elevando al cuadrado las ecuaciones (1) y (2) y sumando (teniendo en cuenta que $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$ y $sen^2\,\beta + cos^2\,\beta = 1$) se tiene que:

(3) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \alpha$$ (ley del coseno)

Dividiendo la ecuación (1) por la ecuación (2) (teniendo en cuenta que: $tg\ \beta = \frac{sen\ \beta}{cos\ \beta}$) se tiene que:

(4) $$tg\ \beta = \frac{b\ sen\ \alpha}{c - b\ cos\ \alpha}$$ (fórmula de la tangente)

Intercambiando las letras b y c, se tiene que:

(5) $$tg\ \gamma = \frac{c\ sen\ \alpha}{b - c\ cos\ \alpha}$$ (fórmula de la tangente)

La ecuación (4) [o la (5)] se presenta como un substituto de la familiar ley de las tangentes, la cual, en la opinión del escritor, es objetable por 2 razones: [1] su prueba no es simple, [2] depende de la diferencia de dos números y por lo tanto puede no ser suficientemente exacta cuando los dos números dados son casi iguales.

Dados b, c y α (dos lados y el ángulo comprendido) es aconsejable usar la fórmula (4) si $c > b$ o la fórmula (5) si $b > c$; siendo, además, deseable (pero no necesario) que el denominador sea positivo y el ángulo computado menos que $\pi/2$.

Aplicando estas fórmulas o cualesquiera otras análogas (obtenidas por medio de un cambio cíclico de letras) la primera parte que debe ser calculada es el ángulo opuesto al más corto de los dos lados dados. Para completar la solución, el tercer lado se encuentra por medio de la ley de los senos. Así, si $c > b$ usamos el siguiente par de fórmulas:

$$\text{(a) } tg\, \beta = \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{c - b \cos \alpha}; \quad \text{(b) } a = \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta}.$$

Obsérvese que los numeradores de las ecuaciones (a) y (b) son idénticos y que al usar logaritmos, el antilogaritmo del producto $b \cos \alpha$ debe calcularse por separado; por lo demás la solución por logaritmos se obtiene fácilmente.

El uso de estas fórmulas es, en efecto, una proyección sobre el más largo de los dos lados dados y por lo tanto para tener una comprobación válida e independiente debemos proyectar sobre el más corto de los dos lados dados. Así, en nuestro caso la comprobación es la siguiente:

$$b = c \cos \alpha + a \cos \gamma.$$

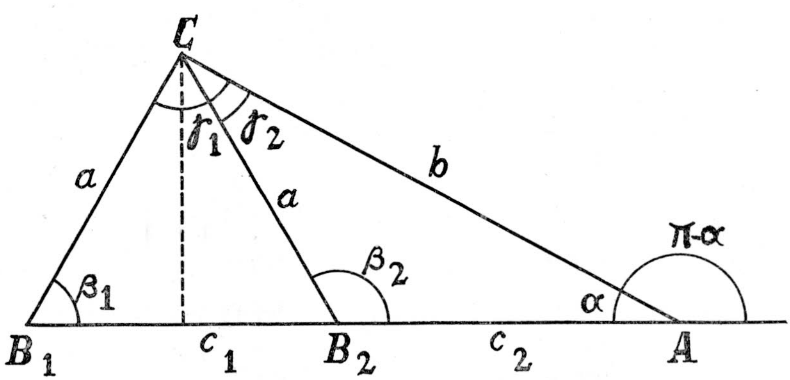

Figura 3

Dados α, a, y b en [donde $\alpha < \pi/2$ y $a < b$] la figura 3 ilustra claramente el caso ambigüo. Aplicando la ecuación (1) tenemos que:

$$\operatorname{sen} \beta_1 = \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a}.$$

Puesto que $\beta_2 = \pi - \beta_1$, la solución de los dos triángulos puede, ahora, completarse por medio de métodos bien conocidos.

Las anteriores fórmulas representan todo lo que necesitamos para la resolución de triángulos oblicuos.

Puesto que la ley de los cosenos no se adapta convenientemente cuando se usan números muy grandes, en los textos de Trigonometría se dan las fórmulas llamadas del "ángulo medio" para poder usar fácilmente los logaritmos. Sin embargo se puede ahorrar tiempo usando solamente el seno y omitiendo la tangente o sea usando las siguientes fórmulas:

$$sen^2 \frac{\alpha}{2} = \left(\frac{s-b}{b}\right)\left(\frac{s-c}{c}\right);\ sen^2 \frac{\beta}{2} = \left(\frac{s-a}{a}\right)\left(\frac{s-c}{c}\right);$$

$$sen^2 \frac{\gamma}{2} = \left(\frac{s-a}{a}\right)\left(\frac{s-b}{b}\right).$$

Ejemplo:

		logs.	
$a = 444.88$	$\longrightarrow$	2.64824	
$b = 466.22$	$\longrightarrow$	2.66859	7.00677
$c = 398.86$	$\longrightarrow$	2.60082	7.91765
1309.96		7.91765	9.08912

$$\frac{a+b+c}{2} = s = 654.98$$

$s - a = 210.10$	$\longrightarrow$	2.32243
$s - b = 188.76$	$\longrightarrow$	2.27591
$s - c = 256.12$	$\longrightarrow$	2.40843
654.98		7.00677

$(s-a)/a$	$\longrightarrow$	9.67419
$(s-b)/b$	$\longrightarrow$	9.60732
$(s-c)/c$	$\longrightarrow$	9.80761
		29.08912

sen $(\alpha/2)$	$\longrightarrow$	9.70747
sen $(\beta/2)$	$\longrightarrow$	9.74090
sen $(\gamma/2)$	$\longrightarrow$	9.64075
		29.08912

$$\begin{aligned} \alpha/2 &= 30^\circ\ 29'\ 24'' \\ \beta/2 &= 33^\circ\ 24'\ 48'' \\ \gamma/2 &= \underline{25^\circ\ 55'\ 48''} \\ & \ 90^\circ\ 00'\ 00'' \end{aligned}$$

Universidad de Carolina del Norte.