# TRISECCION DE ANGULOS

Por ALBERTO RODRÍGUEZ, S. J.

En diversas construcciones gráficas se presenta frecuentemente el problema de la trisección de un ángulo. Cuando éste es de 90°, su solución es inmediata. ¿Pero será posible en el caso general?

Los profundos estudios realizados en la teoría de ecuaciones permiten hallar las condiciones que deben cumplir los ángulos susceptibles de trisección gráfica, mediante el exclusivo empleo de la regla y el compás. Así se ha comprobado que su número es relativamente muy pequeño.

Nos dará una ligera idea el hecho de que si consideramos todos los ángulos cuyos cosenos están expresados por fracciones irreducibles de denominador menor que $7^3 = 343$, de los 71.000 que aproximadamente contiene este conjunto tan sólo 38 admiten la trisección, es decir, uno por cada 1.871.

Ya desde los primeros tiempos en que se empezó a cultivar metódicamente las Matemáticas, los geómetras griegos se ingeniaron buscando curvas de orden superior al círculo e ingeniosas construcciones mecánicas que les permitieran tal construcción.

De creer a Proclo, hacia el 420 a. C., un contemporáneo de Sócrates llamado Hippias descubrió una curva para dividir un ángulo cualquiera en *n* partes iguales. Expresada en coordenadas polares y en cartesianas (de sencilla representación gráfica) son sus ecuaciones respectivamente,

$$\rho = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\omega}{sen\ \omega} \qquad y = x\ ctg\ \frac{\pi x}{2a}$$

en las que *a* representa un parámetro. Por el posterior empleo que de ella hiciera Dinostrato (370 a. C.) para la cuadratura del círculo, esta curva suele conocerse con el nombre de "cuadratriz".

En el decurso de los siglos posteriores, matemáticos de muy diversas naciones volvieron a ocuparse de este problema, deduciendo nuevas y originales curvas e incluso planeando numerosos aparatos para obtener de un modo mecánico dicha trisección.

Expondremos en este artículo la curva ideada por un matemático sudamericano en la segunda mitad del siglo pasado, el profesor de Huánuco (Perú), don Mariano Beraun, completando en algunos puntos su interesante estudio y relacionándolo con otros similares.

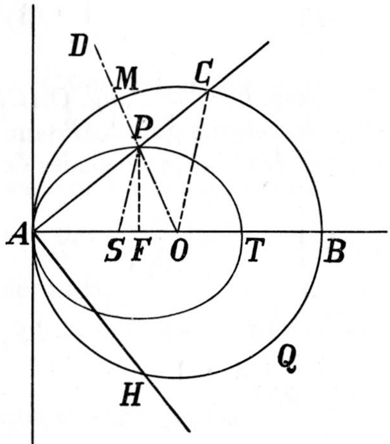


Figura 1

Consideremos la circunferencia de diámetro $AOB$ y el ángulo inscrito $CAB$ (Fig. 1). Tomemos un arco $CM$ medio del $BC$. El radio $OM$ corta a la cuerda $AC$ en un punto $P$, y se verifica que

$$ang.\ BOM = 3\ ang.\ BAC\ .$$

Si triplicamos todos los ángulos posibles construídos con diámetro fijo $AB$ y cuerda variable $AC$, de modo que el ángulo inscrito esté comprendido entre $0°$ y $60°$, los puntos $P$ de intersección de los radios y cuerdas correspondientes determinan una curva cerrada a la que el profesor Beraun denominó "trisectriz" por su propiedad de trisecar un ángulo cualquiera dado.

En efecto, bastaría colocar el vértice de este ángulo en $O$, un lado coincidiendo con $OB$, el otro $OD$ cortaría a la trisectriz en un punto $P$; uniendo $A$ con $P$, por lo expuesto anteriormente se cumplirá que:

$$ang.\ BAP = \frac{1}{3}\ ang.\ BOD.$$

Si el ángulo que debe triplicarse para construír la trisectriz vale $60°$, $BAH$, entonces el arco $BQH = 120°$, y el que debe tomarse a continuación será de $60°$, esto es, el $HA$, y el radio $OA$ será diametralmente opuesto al $OB$ luego el ángulo formado por ellos vale $180°$ que es triple de $60°$.

Por la construcción de la curva, vemos que es simétrica respecto al diámetro $AB$. El punto $A$ pertenece a la curva; hallemos el de su intersección con $AB$. De la semejanza de los triángulos isósceles $OAC$ y $POC$, se deduce, $OC : AC = PC : OC$, luego $\overline{OC}^2 = r^2 = AC\ .PC$, es decir, que el radio es media proporcional entre la cuerda $AC$ y el segmento $PC$. En la posición límite, cuando $AC$ es el diámetro $AB$, seguirá cumpliéndose $r^2 = AB . TB$ de donde $TB = \dfrac{r^2}{2r}$ , luego el punto $T$ es el medio de $OB$.

Para hallar la ecuación cartesiana de esta curva tomemos el diámetro $AB$ como eje $X$, y la tangente en $A$ como eje $Y$. Proyectado el punto $P$,

$$x = AF\ ; \quad y = FP$$

Si $PS$ es la bisectriz del $ang.\ APO = 2ang.\ PCO = 2\ ang.\ OAC,$ se cumplirá que $ang.\ APS = ang.\ SAP,$ luego el triángulo $SAP$ también es isósceles. Aplicando en el triángulo $APO$ las propiedades de la bisectriz,

(1) $$AP : AS = OP : OS$$

y reemplazando valores, $AS = PS\,, OS = OA - AS = r - PS$ ,

(2) $$AP : PS = OP : (r - PS)$$

y de la semejanza de los triángulos isósceles $SAP$ y $POC,$

(3) $AP : PS = OC : OP$ y como $OC = r,$ sustituyendo

(4) $$AP : PS = r : OP\ ;$$

comparando (2) y (4),

(5) $OP : (r - PS) = r : OP$ de donde $r^2 - r . PS = OP^2$

pero

$$OP^2 = PF^2 + OF^2 = y^2 + (r - x)^2 = y^2 + r^2 + x^2 - 2rx$$

y sustituyendo este valor en (5),

(6) $$PS = (2rx - y^2 - x^2)/r\ .$$

En el triángulo rectángulo $FSP$ se verifica

$$\overline{PS}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{FS}^2 = y^2 + x^2 - 2x . PS + \overline{PS}^2$$

ya que $PF = y, SF = AF - AS = x - PS$, de donde

$$(7) \qquad PS = (x^2 + y^2)/2x$$

igualando ahora los valores de $PS$ obtenidos en (6) y (7), al despejar $y$, obtenemos como ecuación cartesiana de la curva.

$$(8) \qquad y^2 = \frac{x^2\,(3r - 2x)}{r + 2x}$$

Como la fracción tiene que ser positiva, sólo existirá curva en el intervalo $-\frac{r}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3r}{2}$. Es simétrica con relación al eje $X$. Presenta un bucle cuya intersección en este eje corresponde a los valores: $x = 0$, $x = \frac{3r}{2}$. La recta $x = -\frac{r}{2}$ es la única asíntota. Calculando la derivada,

$$y' = \sqrt{\frac{r + 2x}{3r - 2x}} \cdot \frac{3r^2 - 4x^2}{(r + 2x)^2}$$

que se anula para $x = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ (ya que no es admisible el valor negativo), luego la curva presenta sólo un máximo y un mínimo correspondiente a los valores $x = \frac{r\sqrt{3}}{2}$; $y = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{3(3-\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}}}$

Para $x = 0$, $y' = \sqrt{3}$, luego las tangentes forman en el origen un ángulo de $60^\circ$ con el eje $X$. La representación gráfica de la curva se indica en la Fig. 2.

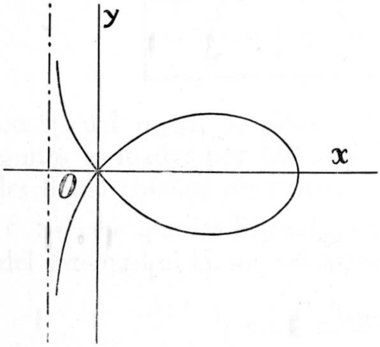


Figura 2

Aunque el profesor Beraun sólo emplea el bucle para la trisección, vemos que, hablando con rigor, la ecuación obtenida representa una curva abierta. No podemos dudar de su sinceridad al manifestarnos en su trabajo que no conoce otra curva igual a su trisectriz. Sin embargo, esta misma curva había sido ya obtenida anteriormente por MacLaurin, quien también le dio el nombre de trisectriz, pero parece que la dedujo por un procedimiento distinto al expuesto.

De hecho, Mac Laurin presenta su ecuación bajo la forma

$$x\,(x^2 + y^2) = a\,(y^2 - 3x^2)$$

Si en esta ecuación despejamos $y^2$,

$$y^2 = \frac{x^2\ (3a + x)}{a - x}$$

Basta hacer ahora un cambio de ejes, $y = Y\,, x = -X$ y variar la expresión del parámetro poniendo $a = r/2$ para obtener la ecuación del profesor Beraun.

La anterior observación no disminuye en modo alguno el mérito de su trabajo, sobre todo si consideramos la dificultad de obtener en aquellos tiempos libros europeos de Matemáticas y de estar al corriente de los progresos realizados en esta ciencia.

La invención del cálculo infinitesimal en forma casi simultánea por Newton y Leibnitz no es el único ejemplo que presenta la historia de las Matemáticas de descubrimientos realizados con absoluta independencia por varios investigadores.