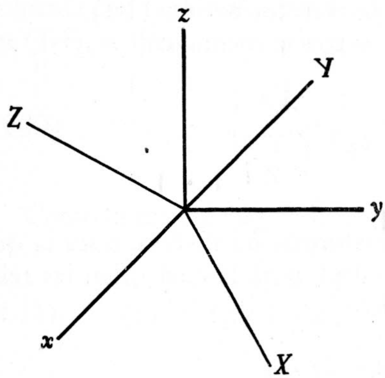
INVARIANTES ABSOLUTOS EN LA FORMA CUADRATICA TERNARIA

Por Luis de Greiff Bravo

1. Antes de analizar los invariantes absolutos en la forma cuadrática ternaria, de tan grande importancia en Geometría analítica, conviene revisar las propiedades principales de la sustitución lineal ortogonal de coordenadas. Sea la terna ortogonal directa de ejes coordenados cartesianos, a saber, $O\ (x, y, z)$ (Sistema I). Una segunda terna de igual origen $O\ (X, Y, Z)$ (Sistema II) queda localizada con respecto a la primera, al conocerce los parámetros que contiene el siguiente esquema:



	X	Y	Z
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

en el cual α_1, β_1 γ_1 designan los valores de los cosenos de los ángunos formados por OX con Ox, Oy, Oz respectivamente, etc. Se les llama cosenos directores.

Se sabe que las fórmulas de transformación que permiten pasar del sistema I al II, son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
x &= \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z \\
y &= \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z \\
z &= \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z
\end{aligned}
\tag{1-1}
$$

La matriz de la transformación, es,

$$(1\text{-}2) \qquad (\mu) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz cuadrada de orden tres, se designa así,

$$(1\text{-}3) \qquad |\mu| = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

y recibe el nombre de módulo de la transformación (1-1).

Las fórmulas (1-1) se escriben matricialmente así,

$$(1\text{-}4) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\mu) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Ahora vamos a considerar la transformación inversa, o sea la que permite pasar del sistema II al sistema I, para la cual valen las relaciones de transformación que siguen:

$$(1\text{-}5) \qquad \begin{aligned} X &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ Y &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ Z &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z \end{aligned}$$

Se advierte que la matriz de la transformación inversa (1-5), viene a ser la transpuesta de la primera matriz, (1-2), a saber,

$$(1\text{-}6) \qquad T\ (\mu) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

Entre los determinantes de las dos matrices (1-2), (1-6) existe igualdad. En efecto, el determinante de la transpuesta, es,

$$(1\text{-}7) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = |\mu|$$

según propiedad elemental de los determinantes. La circunstancia apuntada se puede expresar con otros símbolos, así:

$$|\mu| = |T\ (\mu)| \tag{1-8}$$

Las relaciones (1-5) escritas en forma matricial son, a saber,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = T\ (\mu) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1-9}$$

Ahora consideremos el **producto** de las transformaciones directa e inversa, el cual da por resultado que la posición final de los ejes coincida con la inicial (transformación **idéntica**). Sustituyendo (1-9) en (1-4), se tiene,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\mu)\ T\ (\mu) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1-10}$$

Como la matriz $(\mu)\ T\ (\mu)$ no es singular, de la (1-10) se deduce,

$$(I) = (\mu)\ T\ (\mu); \qquad (I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1-11}$$

La relación (1-11) implica la siguiente igualdad entre sus de-determinantes,

$$|I| = |\mu| . |T\ (\mu)| \tag{1-12}$$

Ahora bien, se tiene,

$$|I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \tag{1-13}$$

y, al tener en cuenta (1-8), se llega finalmente a

$$1 = |\mu| . |\mu| = |\mu|^2 \tag{1-14}$$

de donde,

$$|\mu| = \pm 1 \tag{1-15}$$

resultado que se enuncia así: el *módulo de una transformación ortogonal es igual a la unidad*. El signo positivo corresponde a las transformaciones por rotación; el signo negativo corresponde a la transformación por simetría, la cual dejaremos de tener en consideración.

Al efectuar de manera explícita el producto de matrices indicado en (1-11) e igualar elementos correspondientes, se tienen las seis conocidas relaciones entre los nueve parámetros de la transformación (1-1), a saber,

$$\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j = \delta_{ij} \text{ para } \begin{array}{l} i = 1,2,3 \\ j = 1,2,3 \end{array} \tag{1-16}$$

donde δ_{ij} es el símbolo de KRONECKER, que toma por valor la *unidad* para $i = j$; valiendo en cambio *cero*, para $i \neq j$.

2. Forma cuadrática ternaria. Se da este nombre a la siguiente función cuadrática a tres variables,

$$\begin{aligned} f = f\,(x, y, z) = {} & a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + a_{33}\,z^2 + \\ & + 2a_{12}\,xy + 2a_{13}\,xz + 2a_{23}\,yz \end{aligned} \tag{2-1}$$

donde los a_{ij} son coeficientes constantes reales o complejos

Semi-derivadas parciales: sean las semi-derivadas parciales de la forma f:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\delta f}{\delta x} &= a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z \\ \frac{1}{2}\frac{\delta f}{\delta y} &= a_{12}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z \\ \frac{1}{2}\frac{\delta f}{\delta z} &= a_{13}\,x + a_{23}\,y + a_{33}\,z \end{aligned} \tag{2-2}$$

Designando con (Δ) la matriz de los coeficientes de las (2-2), pueden éstas escribirse como sigue:

$$(2\text{-}3) \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{\delta f}{\delta x} \\ \frac{1}{2}\frac{\delta f}{\delta y} \\ \frac{1}{2}\frac{\delta f}{\delta z} \end{pmatrix} = (\Delta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Al determinante de la matriz de los coeficientes de las semiderivadas parciales, a saber, al determinante simétrico,

$$(2\text{-}4) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

se da el nombre de **discriminante** de la forma f.

Vamos a demostrar que si en la forma (2-1), se opera la sustitución ortogonal (1-1), el discriminante de la transformada $F(X, Y, Z)$ el cual designaremos con Δ_1 tiene valor igual a Δ o sea que se cumple la igualdad,

$$(2\text{-}5) \qquad \Delta = \Delta_1$$

lo cual enunciaremos así,

Teorema.—El discriminante de la forma cuadrática f es un invariante absoluto con respecto a la sustitución lineal ortogonal (1-1).

En efecto, operando en la forma cuadrática f, la sustitución (1-1), se obtiene,

$$(2\text{-}7) \qquad f(x, y, z) = F(X, Y, Z)$$

Por derivación parcial de f según x se tiene,

$$(2\text{-}8) \qquad \frac{\delta f}{\delta x} = \frac{\delta F}{\delta X}\,\frac{\delta X}{\delta x} + \frac{\delta F}{\delta Y}\,\frac{\delta Y}{\delta X} + \frac{\delta F}{\delta Z}\cdot\frac{\delta Z}{\delta X}$$

los segundos factores de estos productos se obtienen derivando las (1-5) según x pudiendo escribirse las (2-8) así,

$$(2\text{-}9) \qquad \frac{\delta f}{\delta x} = \alpha_1 \frac{\delta F}{\delta X} + \alpha_2 \frac{\delta F}{\delta Y} + \alpha_3 \frac{\delta F}{\delta Z}$$

De manera análoga se obtienen las siguientes expresiones,

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \beta_1 \frac{\delta F}{\delta X} + \beta_2 \frac{\delta F}{\delta Y} + \beta_3 \frac{\delta F}{\delta Z} \tag{2-10}$$

$$\frac{\delta f}{\delta z} = \gamma_1 \frac{\delta F}{\delta X} + \gamma_2 \frac{\delta F}{\delta Y} + \gamma_3 \frac{\delta F}{\delta Z} \tag{2-11}$$

Las (2-9), (2-10) y (2-11) se sintetizan en la siguiente expresión matricial,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\delta f}{\delta x} \\ \dfrac{\delta f}{\delta y} \\ \dfrac{\delta f}{\delta z} \end{pmatrix} = (\mu) \begin{pmatrix} \dfrac{\delta F}{\delta X} \\ \dfrac{\delta F}{\delta Y} \\ \dfrac{\delta F}{\delta Z} \end{pmatrix} \tag{2-12}$$

Multiplicando los dos miembros por $\frac{1}{2}$ y teniendo en cuenta las (2-3), las (2-12) dan origen a la siguiente,

$$(\Delta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\mu)\ (\Delta_1) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = (\mu)\ (\Delta_1)\ \mathrm{T}\ (\mu) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2-13}$$

La (2-13) implica la igualdad matricial,

$$(\Delta) = (\mu)\ (\Delta_1)\ T\ (\mu) \tag{2-14}$$

Ahora bien, el determinante del producto de dos matrices no-singulares es igual al producto de los determinantes de las mismas matrices, luego, de la anterior se tiene,

$$\Delta = |(\mu)\ (\Delta_1)|\ |T\ (\mu)| = |\mu|\ \Delta_1\ |T\ (\mu)| \tag{2-15}$$

de donde, en virtud de (1-8),

$$\Delta = |\mu|\ \Delta_1\ |\mu| \tag{2-16}$$

pero como hemos visto que el módulo de la transformación es igual a la unidad (1-15), se tiene finalmente,

$$\Delta = \Delta_1 \tag{2-17}$$

lo cual demuestra el teorema enunciado.

Ha quedado pues demostrado que el discriminante de una forma cuadrática ternaria es un invariante con respecto a la sustitución ortogonal (1-1). Mas no es el único invariante que dichas formas poseen porque como veremos en seguida, existen otros dos.

Para hallar los otros dos invariantes absolutos de f, escribimos la transformada de manera explícita, o sea,

$$F(X,Y,Z) = b_{11} X^2 + b_{22} Y^2 + b_{33} Z^2 + 2b_{12} XY + 2b_{13} XZ + 2b_{23} YZ \tag{2-18}$$

Sea, por otra parte, la forma simétrica,

$$\phi = x^2 + y^2 + z^2 \tag{2-19}$$

es fácil comprobar —y el lector puede hacerlo como ejercicio— que la sustitución (1-1) transforma la ϕ forma en

$$\Phi = X^2 + Y^2 + Z^2 \tag{2-20}$$

resultado previsible puesto que ϕ, Φ, expresan el cuadrado de la distancia del origen de coordenadas a un mismo punto.

Consideremos ahora la siguiente forma cuadrática,

$$f - \lambda\phi \tag{2-21}$$

es claro que la sustitución (1-1) le transforma en $F - \lambda\Phi$ pudiendo en consecuencia, escribirse,

$$f - \lambda\phi = F - \lambda\Phi \tag{2-22}$$

En estas formas han de ser iguales los discriminantes, según el teorema ya demostrado (2-17), o sea,

$$(2\text{-}23) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22}-\lambda & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33}-\lambda \end{vmatrix}$$

Desarrollando estos determinantes se tiene,

$$-\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{23})\,\lambda^2 - (A_{11} + A_{22} + A_{23})\,\lambda + \Delta =$$

$$(2\text{-}24) \quad = -\lambda^3 + (b_{11} + b_{22} + b_{33})\,\lambda^2 - (B_{11} + B_{22} + B_{33})\,\lambda - \Delta_1$$

de donde, al igualar coeficientes, se obtiene,

$$(2\text{-}25) \qquad a_{11} + a_{22} + a_{33} = b_{11} + b_{22} + b_{33}$$

$$(2\text{-}26) \qquad A_{11} + A_{22} + A_{33} = B_{11} + B_{22} + B_{33}$$

En la última expresión se indica con letras mayúsculas a los cofactores de los términos de la diagonal principal en Δ y Δ_1. Por ejemplo B_{11} designa el cofactor correspondiente b_{11} en Δ_1

$$(2\text{-}27) \qquad B_{11} = b_{22}\, b_{33} - b^2_{23}$$

La (2-25) contiene el invariante lineal de la forma *f,* a saber, $a_{11} + a_{22} + a_{33}$. La (2-26) contiene el invariante *cuadrático* de la misma, o sea, $A_{11} + A_{22} + A_{33}$. El discriminante es el invariante cúbico de la forma.

Los invariantes en la forma cuadrática *binaria* se deducen de la terciaria por supresión de una de las variables, por ejemplo la z. En efecto, la forma,

$$(2\text{-}28) \qquad \Psi = a_{11}\, x^2 + a_{22}\, y^2 + 2a_{12}\, xy$$

tiene un invariante cuadrático: el discriminante

$$(2\text{-}29) \qquad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a^2_{12}$$

y un invariante lineal, a saber $a_{11} + a_{22}$.

La generalización de esta teoría a formas cuadráticas con mayor número de variables, no ofrece dificultad.