PROBLEMAS PROPUESTOS

Los problemas son señalados por cero, uno o dos asteriscos según su grado de dificultad. Las soluciones deben ser enviadas a REVISTA DE MATEMATICAS ELEMENTALES, Apartado Nacional 2521, Bogotá, Colombia, antes del 30 de agosto de 1956. La solución a cada problema debe venir en hoja por separado. Los alumnos de bachillerato deben enviar, junto con las soluciones, el nombre del colegio y de su profesor de matemáticas.

108. Demostrar que si a es un número entero, entonces uno de los números $a^2, a^2 - 1, a^2 - 4$ es divisible por 8.

109. Para un número real x, sea $sgn\ x = x/|x|$, si $x \neq 0$, y $sgn\ x = 0$, si $x = 0$. Demostrar la identidad

$$sgn\ x\,(1 + sgn\,(x - y)\ sgn\ y) = sgn\ y + sgn\,(x - y).$$

* 110. Encontrar todas las soluciones x, y en números enteros de la ecuación diofántica $x\,(x + 1) = 2y\,(y + 1)$.

Pablo Montañés

111. ¿A qué hora exacta (hora, minuto, segundo y fracción de segundo) coinciden por primera vez después de las doce el horario y el minutero del reloj? ¿A qué hora exacta están en oposición por primera vez?

112. Demostrar que para que el sistema

$$\begin{aligned} x &= by + cz, \\ y &= ax + cz, \\ z &= ax + by, \end{aligned}$$

$(a \neq -1, b \neq -1, c \neq -1)$ tenga una solución distinta de $x = 0, y = 0, z = 0$, se necesita tener

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 1.$$

Miguel V. García

113. Resolver la ecuación

$$\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{x+2}+\frac{3x}{x+3}+\frac{4}{(x+1)(x+2)(x+3)}=0\,.$$

114. Sean $x'Ox$ e $y'Oy$ dos ejes perpendiculares y A un punto situado sobre la bisectriz interior de xOy (en el interior de este ángulo). Se pone $OA = a$. Un círculo variable pasa por O y A, y corta a $x'x$ en M y a $y'y$ en N.

a) Lugar del punto medio de MN. Encontrar la curva a la cual MN permanece tangente. Sea (P) esta curva. Construír el punto de contacto de (P) y de MN. Mostrar que (P) es tangente a $x'x$ y a $y'y$.

b) Mostrar que se puede pasar de N a M por una rotación, cualquiera que sea la pareja de puntos considerada; se pide el centro y el ángulo de esta rotación. Deducir de allí que $OM + ON$ es constante. Calcular su valor en función de a.

c) Mostrar que el área del cuadrilátero $OMAN$ es constante si M y N permanecen sobre las semirrectas Ox y Oy.

d) Examinar si los resultados precedentes subsisten cuando los ejes $x'Ox$ e $y'Oy$ dejan de ser rectangulares.

(Bachillerato, 2ª parte, Madagascar, 1950).

115. Demostrar que un número de la forma $4^k\,(8m+7)$ (donde k y m son enteros positivos) no es la suma de tres cuadrados.

* 116. Para que los números enteros positivos n y k satisfagan a la relación

$$\binom{n}{2} = k^2$$

es necesario y suficiente que sean de la forma $n = (x_r + 1)/2$, $k = y_r$, donde los números x_r e y_r están definidos por la relación $(3+\sqrt{8})^r = x_r + y_r\sqrt{8}$ $(r = 1, 2, 3, \ldots)$[1].

117. Demostrar que si un número entero termina por 12 890 625, entonces todas sus potencias terminan por 12 890 625.

[1] cf. G. Kurepa: Uber die Binomialkoeffizienten. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie, 5 (1953). pp. 33-44. Esta es la versión correcta del problema 63 (vol. III, p. 65).

118. Sea

$$S_{n,p} = 1^p + 2^p + \ldots + n^p.$$

Demostrar la relación

$$S_{n,p+1} = (n+1)\, S_{n,p} - (S_{1,p} + S_{2,p} + \ldots + S_{n,p}).$$

119. n mujeres están sentadas en un orden dado alrededor de una mesa redonda. ¿De cuántas maneras se pueden colocar sus maridos alrededor de la mesa de manera que un hombre esté siempre entre dos mujeres, pero nunca al lado de su esposa?

120. Se da en el plano P un cuadrado $ABCD$ (con diagonales AC y BD) inscrito en un círculo de radio R y, perpendicularmente al plano P, la semirrecta AK.

Siendo S un punto de esta semirrecta tal que $AS = h$, se considera la pirámide $SABCD$.

a) Mostrar que todas las caras laterales de esta pirámide son triángulos rectángulos y que existe una esfera circunscrita a esta pirámide. Determinar los centros y los radios de las secciones de esta esfera por los planos SAB y SBC. Encontrar, cuando h varía, el lugar geométrico del centro ω de esta esfera.

b) Se supone $h = 2R$; por un punto variable I del segmento AC se traza el plano Q paralelo a BD y AK; sea y el área de la sección de la pirámide $SABCD$ por el plano Q. Calcular y en función de R y de $AI = x$, y estudiar las variaciones de y en función de x; trazar la curva representativa, suponiendo $R = 1$; mostrar que esta curva tiene una tangente en el punto de abscisa $x = 1$ y construír esta tangente.

(Bachillerato, 1ª parte, París, 1951).