FUNDAMENTOS DE ARITMETICA

Por Carlo Federici Casa

CAPITULO 0

PANORAMA ESTRUCTURAL E HISTORICO DEL CONCEPTO DE NUMERO

0 . 0 - El número cardinal.

El primer tipo de Número (Nm) que el hombre logra abstraer en su comercio con la Naturaleza es el de Natural (Nt) o Cardinal finito (Cf) o simplemente Cardinal. La fecha de nacimiento o mejor de concepción del Número natural (Nt) o finito (Cf) se pierde en la prehistoria humana.

0 . 1 - El número entero.

Empujado en parte por la misma dinámica del concepto de Nm -la imposibilidad en muchos casos de ejecutar la disminución o sustracción- y en parte, y no la menor, por pragmáticas necesidades, la de representar, por ejemplo, deudas y créditos, el hombre logra abstraer el concepto de Entero (Et) distinguiendo entre los mismos Et positivos (Ep) o aparentes (Ea) de los Et negativos (En) o efectivos (Fe) asimilando y hasta identificando los Ea con los Nt. La fecha de concepción del Número entero (Et) se puede hacer remontar a la época en que vive el matemático y astrónomo Brahamagupta (600 a 660) y en la que el - mismo publica un tratado de Astronomía, el Brahamasputthasiddhantha que, entre los demás, comprende dos capítulos el 12 y el 18, dedicados, respectivamente, a la Aritmética y al Algebra.

Los árabes nada nuevo añaden a los conocimientos hindúes y tampoco las obras de Chuquet (1450 - 1500) y de Stifel (1487 - 1567), y se necesita llegar hasta Cardano (1501 - 1576) para encontrar un tratamiento apenas suficiente de los Enteros, y a Girard (1595 - 1632) y a Newton (1642 - 1727) para encontrar quien tenga un concepto claro y preciso de magnitudes dotadas de sentido y representables analiticamente con Enteros.

0 . 2 - El número fraccionario.

Siempre empujado por los factores arriba mencionados -de particular manera por la imposibilidad en muchos casos de ejecutar la división o partición y la necesidad de representar cuocientes -entre valores de una misma magnitud- el hombre logra abstraer el concepto de Fraccionario (Fc) distinguiendo entre los mismos los aparentes (Fa) de los efectivos (Fe), asimilando y hasta identificando los Fa a los Et. La fecha de concepción del Número fraccionario (Fc) se puede, tal vez, hacer remontar a la época 3000 a 2000, puesto que en el Papiro Ahmes (nombre del escriba egipcio que lo compiló) pero conocido más bien como Papiro Rhind -por el apellido del inglés que lo compró), Papiro que se remonta a la época 2000 a 1500 y que sólo fué interpretado en 1877 por Eisenlohr, ya se usan los Fraccionarios. En efecto, el Papiro mismo es una tabla de "disgregación" en donde se dan resultados del tipo:

$$\text{“ } 5/12 = 1/3 + 1/12 = 1/4 + 1/6 = \ldots\ldots\ldots \text{ ”}$$

El primero en comprender los Fraccionarios bajo la común denominación de Número (aritmoi) es -Diofanto de Alejandría, que vivió en la época 200 a 300.

0 . 2 - El número real.

Muy pronto el hombre se da cuenta de que debe introducir Nm más finos, en parte por la imposibilidad, en muchos casos, de ejecutar la radicación y la logaritmación, y por otra parte, la necesidad de representar el cuociente de valores de una misma magnitud entre sí inconmensurables, y abstrae entonces a los Reales (Rl), distinguiendo entres éstos los aparentes (Ra) o racionales (Rc) de los efectivos (Re) o irracionales (Ir), asimilando como siempre, y hasta identificando, los Ra a los Fc.

La fecha de concepción del Número real (Rl) se puede hacer remontar a la época de la "fraternidad pitagórica", en Crotone, es decir, -600-500 cuando estalla el "escándalo" de las magnitudes inconmensurables y por lo tanto de los Números irracionales, y más precisamente el de la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con relación al lado.

El descubrimiento de los Irracionales aparece en su verdadera luz a través de la profunda crítica desarrollada por los eleáticos y de particular manera por Zenón (495 - 435), y Eudoxio (408 - 435) al último de los cuales se le debe el concepto de cociente entre valores de una misma magnitud como ente aparte, independiente de la mal llamada conmensurabilidad numérica. Estas investigaciones se resumen en el libro V de los Elementos de Euclides (365 - 275) matemático que floreció hacia el 300 aunque éste no tenga todavía una concepción clara y completa de los Reales.

Se necesita llegar hasta Gherardo de Cremona, (1140 - 1187) y Leonardo (Fi-Bonacci) Pisano (1200 - 1250) para encontrar tratados como "surdi", es decir "absurdas", todavía, las raíces del Nt no cuadrados y a Stifel (1486 - 1567), quien afirma "Irrationalis numeros non est verum numerus", Sólo con Newton se puede afirmar que se alcanza el verdadero concepto del RI.

0 . 4 - El número complejo binario.

No obstante las sucesivas ampliaciones descritas, el hombre sigue encontrando en el manejo de los Nm, excepciones como por ejemplo la radicación de índice par de Números negativos y la logaritmación de Números Negativos que lo llevan muy pronto a reconocer la presencia de nuevos Nm, más finos todavía que los RI, Nm en los cuales se cierra, por así decir, un ciclo: estamos hablando de los Complejos binarios (Cb) entre los cuales el hombre distingue los aparentes (Ca) de los efectivos (Ce) llegando a asimilar los Ca y hasta a identificarlos con los RI. La fecha de concepción del Número complejo binario (Cb) se puede hacer remontar a la época 1400 - 1500 en que se desarrolla la "Escuela algebrista italiana" y más precisamente en la época en que la misma escuela se enfrenta al problema siguiente : "Si es verdad que las ecuaciones del 2º grado pueden conducir a veces a raíces de Números Negativos así como las de 3º. también es verdad que en el primer caso (2º. grado) estamos frente a problemas "imposibles" mientras que en el segundo caso (3º. grado) estamos frente al caso así llamado "real" o "irreductible".

Bombelli (1500 - 1600) en 1572 precisamente se da cuenta por primera vez que en el caso irreductible la raíces son Reales y expresa ordenada y completamente el algoritmo del Imaginario. Pero se necesita llegar hasta Wessel (1745 - 1818) y a Argand (1768 - 1812) para tener (1806) una interpretación coherente y útil de los Números complejos y hasta Bellavitis (1803 - 1880) que los pone en la base de su "cálculo de las equipolencias".

0 . 5 - El Número complejo (de más de dos unidades).

Continuando en la búsqueda de los elementos que le permiten representar é interpretar la Naturaleza, el hombre encuentra los Números complejos de n unidades, $(n > 2)$. La fecha de concepción del Número complejo (Cm) de más de 2 unidades se puede hacer remontar a la época 1800 - 1850 puesto que Wessel (1745 - 1818) por primera vez (1797) busca desarrollar una aritmética de los vectores en el espacio, seguido por Argand (1768 - 1812) y por Gauss (1777 - 1855) que se da cuenta (1834) de algunas irregularidades, mas para encontrar tratamientos sistemáticos de los mismos hay que llegar a Bellavitis, (1803 - 1880), a Grassmann (1809 - 1877), al Hamilton (1805 - 1865), el último de los cuales desarrolla la teoría de los "cuaterniones", y por fín a Hankel (1814 - 1899), que desarrolla una teoría analítica de los Números complejos de n unidades.

0 . 6 - El Número transfinito.

Por fín, el hombre en su esfuerzo por explicar ciertas antinomías que surgen al tratar de un tipo peculiar de proposiciones ("Hay más puntos en un segmento o en el segmento doble?") se encuentra con los llamados Cardinales transfinitos (Ct) o, simplemente, Transfinitos (Tf).

La fecha de concepción del Número transfinito (Tf) se puede hacer remontar a la época 1600 - 1650 cuando Galileo (1564 - 1642), por primera vez, da el criterio para distinguir entre una clase finita y una infinita, criterio que Leibnitz (1646 - 1716) había tomado como una contradicción encerrada en el concepto de "número" de todos los Números naturales". Pero hay que llegar hasta Bolzano (1781 - 1848) y a Cantor (1829 - 1920) para encontrar la manera explícita de distinguir y definir con plena claridad clase finita y clase infinita.

Sólo después de las investigaciones de Cantor y de Bolzano las proposiciones: "el número de los elementos de una clase es independiente del orden de los mismos" y "el todo es mayor que la parte", dejan de describir propiedades "evidentes" de las clases en general para describir sólo propiedades de las clases finitas.

0.7 - El nacimiento del concepto de cardinalidad,

Es asunto de gran interés histórico el hecho de que el sabio Galilei (Galileo: Pisa 1564, Arcetri 1642) en el año de 1638 comprendiera de manera tan firme y tan clara la propiedad cardinal de las clases infinitas.

Esta idea la desarrolla Galilei en uno de esos inolvidables "discorsi" entre el preguntón Simplicio y el sagaz Salviati, y precisamente en el discurso que trata sobre los "indivisibles" y el "infinito". Este discurso se encuentra en la obra que, si bien no goza como otros trabajos del mismo autor de mayor popularidad, hay, sin embargo, que considerarla como el exponente más cabal de su labor científica, como la obra cumbre del genial y perseguido (como otros muchos) pensadores. Queremos hablar de la obra intitulada "Discorsi e dimostrazioni matematiche in torno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti lolali", en la cual están contenidos en su forma definitiva los estudios mecánicos a los cuales Galilei se había dedicado a lo largo de toda su vida desde su magisterio en Padua hasta el fín de su vida en el exilio de Arcetri.

Creemos conveniente presentar traducido el discurso mencionado.

"Salviati": Entre las primeras dificultades que se suelen alegar contra los que hacen componer de indivisibles el contínuo, suele estar la de que un indivisible unido a otro indivisible no produce nada divisible, porque si esto sucediera, se seguiría que aún lo indivisible fuera divisible; dado que si dos indivisibles, como ser dos puntos, reunidos hicieren una cantidad, como sería una línea divisible, con mucha mayor razón sería divisible la que estuviera compuesta de tres, de cinco, de siete y de otros números impares.

"Ahora bien, al ser estas líneas seccionables en dos partes iguales hacen seccionable aquel indivisible que está colocado en el medio. A esta y a otras objeciones del mismo tipo se da satisfacción en parte con decir que un grandor divisible y entero no puede estar constituído ni por dos puntos solos, ni por diez, ni por cien, ni por mil, pero que si lo puede estar por infinitos.

"Simplicio": Aquí surge de súbito una duda que me parece insoluble: y es que estando seguros de que existe una línea mayor que otra, si contienen ambas a dos infinitos puntos, es fuerza confesar que se da en un mismo género alguna cosa mayor que lo infinito, porque la infinidad de los puntos de la línea mayor excederá a la infinidad de los puntos de la menor.

"Ahora bien, esto de darse un infinito mayor que lo infinito, me parece concepto que de ningún modo puede comprenderse.

"Salviati" : Estas dificultades son las que derivan del modo que tenemos nosotros de discurrir con nuestro entendimiento finito acerca de los infinitos, asignándoles aquellos atributos que damos a las cosas finitas y limitadas; lo que reputo inconveniente porque juzgo que estos atributos de prevalencia, subvalencia e igualdad no convienen a los infinitos, de los cuales no se puede decir que uno es mayor o menor o igual al otro. Para probarlo se me ocurre un razonamiento que, para mayor claridad en su desarrollo, propondré en forma de preguntas a Simplicio, promotor de la dificultad.

"Supongo muy bien sabido de vosotros, cuáles son los números cuadrados y cuáles los no cuadrados.

"Simplicio": Sé muy bien que el número cuadrado es el que resulta de la multiplicación de otro número por sí mismo: así el cuatro, el nueve,... son números cuadrados, ya que se originan uno del dos y el otro del tres..., multiplicados por sí mismos.

"Salviati": Muy bien, y sabeis, además, que así como los productos se llaman cuadrados, los que lo producen, o sea los que se multiplican, se llaman lados o raíces. Por consiguiente, los otros que no nacen de números multiplicados por sí mismos, no son cuadrados. De donde, si yo dijera que todos los números, incluyendo los cuadrados, son más que los cuadrados solos, habré enunciado una proposición verdadera. No es así?.

"Simplicio": No se puede decir lo contrario.

"Salviati": Si después yo preguntara cuántos son los números cuadrados se podría con toda verdad responder que son tantos como son sus respectivas raíces, puesto que todo cuadrado tiene su raíz y toda raíz su cuadrado, sin que haya ningún cuadrado que tenga más de una raíz, ni raíz ninguna que tenga más de un cuadrado.

"Simplicio" : Así es.

"Salviati": Mas si yo preguntara cuántas son las raíces, no podrá negarse que son tantas como sean todos los números, porque no hay ningún número que no sea raíz de algún otro: y sentado esto, habrá que decir que los números cuadrados son tantos como sean todos los números, ya que son tantos como sus raíces, y raíces son todos los números.

"Y sin embargo, nosotros en un principio dijimos que los números en conjunto son muchos más que todos los cuadrados por ser no cuadrados la mayor parte.

"Todavía más, la multitud de cuadrados va disminuyendo progresivamente a medida que pasamos a números más grandes; porque hasta ciento hay diez cuadrados, que es como decir que son cuadrados una décima parte; en diez mil sólo la centésima parte son cuadrados; en un millón sólo la milésima. Y sin embargo, en un número infinito, si pudiéramos concebirlo, sería necesario decir que son tantos los cuadrados cuanto son todos los números en conjunto.

"Sagrado": Y qué se puede deducir de tal conjetura?.

"Salviati": No veo que se pueda llegar a otra decisión, sino a la de decir que es infinita la totalidad de los números, infinitos los cuadrados, infinitas sus raíces; y que la multitud de cuadrados no es menor que la de la totalidad de los números, que los atributos de "igualdad", "mayor" y "menor" no tienen lugar en los infinitos, sino sólo en las cantidades limitadas.

"Por ello cuando Simplicio me propone varias líneas desiguales, y me pregunta cómo puede ser que no haya en las mayores más puntos que en las menores, yo le respondo que no hay más, ni menos, ni tantos, sino infinitos en cada una. Porque si yo le respondiera que en una los puntos son tantos como son los números cuadrados, en otra mayor, tanto como son la totalidad de los números, en otra pequeñita tantos como son los cubos, acaso no podría haberle dado satisfacción al poner más en una que en otra, y sin embargo infinitos en cada una ? ".

CAPITULO I

LAS TEORIAS ARIMETICAS

1 . 0 - La necesidad de las teorías.

Del siglo III al siglo XIII la Matemática cae en un profundo letargo, pero el ritmo de vida reaparece cuando Leonardo Fi (glio Di) Bonacci (1200 - 1250) con su obra "Liber Abaci" hace que Europa se convierta a la Matemática hindú-arábiga.

Desde entonces la vida de la Matemática florece ilimitadamente y mientras el material va acumulándose, más y más claramente se presenta al matemático la necesidad de ordenarlo en una teoría.

En efecto, si es común tanto a los hombres como a los animales la posibilidad de acumular conocimientos, así parece exclusivo del hombre no solo la posibilidad sino la necesidad de estructurar en una teoría el cúmulo de conocimientos adquiridos, y más precisamente, por lo que nos interesa, la elaboración de una teoría apropiada para cada una de las etapas de desarrollo del concepto de Número y la coordinación de estas teorías en un concepto orgánico.

1 . 1 - Las teorías sintéticas.

En la búsqueda de tal sistematización es lo más natural que nuestra mente busque recorrer lo que puede considerarse: que haya sido el camino por el cual se ha constituído la Aritmética, y por lo tanto, en un primer tiempo, la atención se volverá hacia el estudio de las magnitudes (en particular geométricas) para encontrar la génesis del concepto de número tanto en la primera como en otra cualquiera de sus etapas de desarrollo, y con dicha génesis, el significado de las nociones de igualdad, adición, multiplicación etc.- y además para dar a conocer los motivos de las definiciones de las demás funciones aritméticas. Una teoría que deduzca el concepto de Número a través de la consideración de magnitudes geométricas, mecánicas etc., y que defina las operaciones artiméticas como imágenes de operaciones o construcciones a las cuales se sujetan las magnitudes y por ende los objetos, se llama una "teoría sintética".

1 . 2 - Las teorías analíticas.

Pero si se mira a la reconstrucción sintética de la Aritmética se encuentra que a Números enteros, fraccionarios, reales, complejos.. se pueden coordinar Números naturales o clases de Números naturales, por ejemplo clases de duplas, llegando así naturalmente a la que se llama la "aritmetización" de la Matemática que, aunque pueda quedar más o menos ampliamente vinculada a la consideración de magnitudes, a fín tiene que desprenderse de éstas puesto que tal vinculación paso a paso aparece como menos útil y termina por desaparecer cuando se llega a tratar de las últimas funciones de la Aritmética.

Se sigue de aquí que en la sistematización de la Aritmética al período de las construcciones sintéticas sucede un período de reelaboración para fundar solamente sobre la teoría de los Nt todas las demás, pasando así a las teorías analíticas o al aspecto genético de la Aritmética que, incluyendo la definición de Nt por medio de las funciones lógicas permite llegar a la llamada fase de la Logicización de la Matemática.

1 . 3 - Las teorías axiomáticas.

A los aspectos reconstructivos citados -el sintético y el analítico o genético- se necesita añadir un tercer -el axiomático- que tiende a eliminar, como en efecto elimina, algunas deficiencias de los ya indicados aspectos sintético y analítico.

(Una reconstrucción axiomática de una teoría consiste en :

0) Elegir entre las ideas inherentes a la teoría cierto número de ellas y por medio de un sistema de reglas definitorias definir las demás.

1) Elegir entre las proposiciones constituyentes de la teoría cierto número de ellas y por medio de un oportuno sistema de reglas deductorias demostrar las demás.

Actualmente resulta claro prescindir del aspecto sintético y considerar el genético y el axiomático como dos aspectos que se inte. gran en los llamados problemas de la "existencia" y de la "homogeneidad".

1 . 4 - Las fases de la reconstrucción genética de la Aritmética.

La "Aritmetización" . La aritmetización de la Matemática se inicia con Hamilton (1805 a 1865) cuando éste da la conocida teoría analítica de los Cb como duplas ordenadas de Rl, investigación que se continúa en las teorías analíticas (Weintrass (1851 a 1897), Cantor (1829 - 1920), y Peano (1858 - 1932) de los Rl debidas a Dedeking (1831 - 1916) en las teorías analíticas de los Tc. de Meray (1858-1911), Peano, Padoa, Russel (1872 a) y en las teorías analíticas de los Et de Peano.

1 . 5 - La "logicización"

La fase de aritmetización encuentra su prolongación natural en el de "logicización" de la Matemática que se inica con las teorías analíticas de los Nt de Frege (1848 - 1925), Russell..... Como se ve, el desarrollo histórico de este proceso es una confirmación del principio de psicología debido a Claparede y que afirma que "los conceptos que psiquicamente aparecen primeros son los últimos en hacerse conscientes.".

1 . 6 - La "axiomatización".

La axiomatización de la Matemática, es decir, el método abstracto y la manera crítica de abordar la Matemática se desarrolla en la época 1850 a 1900. El impulso inicial es debido a Peano que publica en 1889 la primera axiomatización de la Aritmética, en donde, siguiendo el ideal euclidiano, emprende la tarea de reducir la Aritmética a un sistema explícitamente enunciado de postulados tan libres de hipótesis implícitas como pudo hacerlo.

Este método no atrajo mucho la atención de los matemáticos hasta que en el año de 1899 Hilbert (1862 - 1943) publica su obra sobre los fundamentos de la Geometría señalando al mismo tiempo la importancia básica que tiene para todas las Matemáticas el demostrar la coherencia de la Aritmética. Mientras la crítica se demuestra necesaria para ver qué es lo firme para poder dar el paso siguiente con una seguridad razonable, la axiomatización se demuestra necesaria además como catalogación y clarificación, como creación pero de una naturaleza más sustancial que la exuberancia desordenada del siglo 19.

En efecto, a menos que se clasifique y reduzca a proporciones manejables la enorme emulación del más prolífico siglo de la historia de la Matemática, ésta se asfixiará en su propia riqueza.

Este proceso de reconstrucción que reduce las Matemáticas a sus estructuras básicas (algebráicas, ordenales, topológicas) culmina hoy con la publicación, todavía en curso, de la obra magistral de los Baurkaki.

CAPITULO II

LOS CONCEPTOS BASICOS DE LA MATEMATICA

2.0 - Los hechos, las clases, las relaciones.

Entre los Nm de un mismo tipo el hombre aprende a ejecutar ciertas operaciones, como las siete bien conocidas: adición, multiplicación, potenciación, disminución o sustracción, división o partición, logaritmación y radicación, y a establecer ciertas relaciones como las bien conocidas: ser menor que, ser mayor que, ser factor de, ser múltiplo de, etc. Pero si queremos entender bien y manejar mejor los conceptos arriba expresados y los demás no expresados, es necesario aclarar que los conceptos básicos que necesitamos, aquí como para cualquier otra ciencia, son los de: hecho, clase y relación.

En las pocas páginas que siguen -y que con las pocas que las preceden dan cuerpo a lo que llamamos introducción metodológica- buscaremos aclarar estos conceptos y los que con éstos forman pléyade, es decir, los que con éstos están íntimamente ligados.

Veremos que "hecho" es el núcleo al rededor del cual nacen y se desarrollan los conceptos de "proposición", "símbolo", "conexion", "conjunción", "cuantificador", "variable", "constante", "condición", "solución",......;

Que "clase" es el núcleo al rededor del cual nacen y se desarrollan los conceptos de "elemento", "propiedad", "referencia", "pertenencia", "contenencia", "existencia",........ ;

Que "relación" es el núcleo al rededor del cual nacen y se desarrollan los conceptos de: "dupla", tripla ",...."n-pla", "transformación", "operador", "operación", "función", "descripción",.....

2 . 1 - Hechos, símbolos y proposiciones.

El concepto de "hecho" es, sin duda, uno de los conceptos más primitivos que el hombre posee. Por este motivo tal vez la dificultad, si no la imposibilidad de definirlo.

Todo hecho se representa por medio de una proposición, es decir, que una proposición es la imagen o el símbolo de un hecho.

Es conveniente hacer la siguiente observación :

"Como para tratar con ciertos entes que llamamos números se se usan ciertos símbolos que llamamos cifras, así, de la misma manera, para tratar con los entes que llamamos hechos se usan los símbolos que llamamos proposiciones".

Tambien nos parece necesario afirmar lo siguiente:

"El hombre entiende solamente si se le habla en términos de hechos (de proposiciones)".

Sabemos, por ejemplo, muy bien que "fuego" no es un hecho (proposición) y por lo tanto pensamos que si una persona se nos acerca y nos dice "fuego", posiblemente no la entenderemos pero, no obstante, si oímos gritar la misma palabra en la sala oscura de un cine podemos afirmar que sí la entenderemos, y la entendemos como proposición (hecho) y cargada afectivamente como lo es tal palabra gritada en semejantes circustancias.

La psicología y la antropología aportan un notable apoyo a la precedente afirmación.

En efecto, a través de sus investigaciones Paolo Lombroso en "La vita dei bambini" llega a la conclusión de que: "El niño comprende primero el sentido de una proposición que el de las palabras que la componen". También el científico, por otra parte, se encuentra a menudo en el caso de emplear frases a las cuales atribuye un determinado y preciso significado y que, sin embargo, están compuestas de palabras de cuyo sentido no se preocupa, llegando hasta a admitir que pueden no tener ninguno; precisamente del mismo modo como para el físico, que tiene una clarísima idea de lo que quiere expresar cuando afirma que "dos cuerpos tienen masas, la una doble de la otra" y no obstante declara ociosa y hasta sin sentido la pregunta "Qué es la masa" ?.

Por otra parte, es conveniente recordar la teoría de Epicuro, que hace nacer el lenguaje de las interjecciones como expresiones atónicas, inanalizables, de hechos, teoría que tiene entre sus "avatares" las de G. B. Vico, de M. Mueller, W. Wundt, L. Geiger, M. Bechterew.

W. M. Urban en su tratado "Lenguaje y Realidad"(Fondo de Cultura Económica de Méjico) hablando de las teorías interjeccional y onomatopéyica dice: "La posición general de la lingüística quizá pueda expresarse del modo siguiente: ninguna de estas teorías, tomada por sí misma, es capaz de explicar el lenguaje humano. Cada una explica sólo parte de él y no hay nada que nos impida combinarlas. Pero aun cuando se contienen, no llegan a explicarlo todo, y especialmente fracasan al tratar de explicar las partes fundamentales del lenguaje y su compleja estructura, las partes fundamentales del discurso y sus relaciones gramaticales".

Además, las teorías dichas admiten inconscientemente ciertos supuestos que no están en armonía con los resultados de la lingüística actual ni con las nociones actuales de las funciones sicológicas. En lo que toca a la lingüística, esas teorías afirman que las palabras, como tales, son las unidades de comunicación y que se desarrollan aisladamente mientras lo probable es que las oraciones y otras unidades sintaxicas hayan sido las primeras en aparecer y que las palabras sean los resultados del análisis, con apoyo en el lenguaje escrito. Sicológicamente, también, la noción de que las oraciones y las otras unidades sintáxicas hayan sido lo primero y que las palabras aisladas sean resultado del análisis está más en armonía con la actual idea de la primacía de las "estructuras" (("Gertalten") y de los elementos como resultado del análisis.

También Pelsma afirma que las primeras expresiones del niño deben considerarse como "frases palabras" en vez de vocablos; cada expresión es "todo un discurso", y Stern, entre otro, abunda en estos conceptos cuando escribe que "las primeras emisiones del niño no son palabras en el sentido estricto sino frases completas; puesto que el novel hablador no habla para exteriorizar conceptos como tales, sino para manifestar su actitud frente a ellos. Gestos, entonaciones y la situación en su totalidad, todos estos factores contribuyen de consuno a matizar el sentido necesario de la corta emisión, dándole uno de las sentidos posibles".

Si lo anterior no fuera suficiente, habría entonces lugar a recordar que una investigación sobre la escritura conduce a análogos resultados. Escribe Higounet en "L'escriture" (pag. 8): "La etapa más elemental de la escritura es aquélla en la cual un signo o grupo de signos ha servido para sugerir una frase o las ideas contenidas en una frase"....... "Un progreso incalculable se ha obtenido cuando se ha logrado la descomposición de la frase en sus elementos, las palabras, y cada signo, desde entonces, ha servido para simbolizar una palabra".

2 . 2 - Hechos simples y compuestos :

Conexiones y conjunciones: conexiones singulares y binarias, operadores y operaciones.

Son hechos, por ejemplo, los siguientes :

"0 es un Nt" ________ (0)

"1 es un Nt" ________ (1)

"2 es un Nt" ________ (2)

"1 + 0 = 1" ________ (3)

"1 + 1 = 2" ________ (4)

"1 + 2 = 3" ________ (5)

"6 es un múltiplo de 2 y de 3" ________ (6)

"15 es un múltiplo de3 y de 5" ________ (7)

Algunos de éstos como (0), (1), (2), (3), (4), (5), son hechos simples, y otros, como (6), (7), son hechos compuestos.

El (6) es un hecho compuesto de los hechos simples :

"6 es un múltiplo de 2" ________ (6')

"6 es un múltiplo de 3" ________ (6'')

ligados entre sí por medio de una conexión que se representa por medio de la conjunción "y".

El (7) es un hecho, compuesto de los hechos simples :

"15 es un múltiplo de 3" ________ (7')

"15 es un múltiplo de 5" ________ (7'')

ligados entre sí por medio de una conexión que se representa por medio de la conjunción "y".

Se puede demostrar que en total el hombre tiene que manejar, y en efecto maneja, once conexiones, que es necesario por lo tanto hacer ver explícitamente para entender bien tanto la Matemática como cualquier otra Ciencia.

Las once conexiones son las siguientes:

no	como abreviación de	no es el caso de que
et	" "	y
mn	" "	sí, mas no
np	" "	no, pero sí
nn	" "	no, ni
eq	" "	sí y sólo sí
vl	" "	o (en el sentido de vel. ú o inclusive)
pq	" "	porque
en	" "	entonces
sh	" "	o (en el sentido de o negativo)
at	" "	o (en el sentido de aut. u o exclusivo)

Es conveniente ver ejemplos de cada una:

no (5 = 3) ______ (8)

(5 > 4) et (5 > 3) ______ (9)

(5 > 4) mn (5 < 3) ______ (10)

(5 > 4) np (5 > 3) ______ (11)

(5 < 4) nn (5 < 3) ______ (12)

(5 > 4) eq (5.6 > 4.6) ______ (13)

(5 < 4) eq (5.6 < 4.6)

(5 > 4) vl (5.6 > 4.6) ______ (14)

(5 > 4) vl (5.6 > 4.6)

(5 < 4) vl (5.6 < 4.6)

(5 > 4) pq (5.6 > 4.6) ______ (15)

(5 > 4) pq (5.6 < 4.6)

(5 < 4) pq (5.6 < 4.6)

(5 > 4) en (5.6 > 4.6) ______ (16)

(5 < 4) en (5.6 > 4.6)

(5 < 4) en (5.6 < 4.6)

$(5 > 4)$ sh $(5.6 < 4.6)$ ——— (17)
$(5 < 4)$ sh $(5.6 > 4.6)$
$(5 < 4)$ sh $(5.6 < 4.6)$

$(5 > 4($ at $(5.6 < 4.6)$ ——— (18)
$(5 < 4)$ at $(5.6 > 4.6)$

Desde el punto de vista didáctico nos parece conveniente usar el siguiente sistema para recordar el uso lícito de las diferentes conexiones :

Sean a y b los platos, en su órden, de una comida. Una comida del tipo "et" es una comida en donde es de buena educación comer tanto de a como de b, y por lo tanto, de mala educación los demás tres casos.

Una comida del tipo "mn" es una comida en donde es de buena educación de a mas no de b, y por lo tanto de mala educación los demás tres casos.

Una comida del tipo "np" es una comida en donde es de buena educación no comer de a pero sí comer de b, y por lo tanto de mala educación los demás tres casos.

Una comida del tipo "nn" es una comida en donde es de buena educación no comer de a ni comer de b y por lo tanto son de mala educación los demás tres casos.

Una comida del tipo "eq" es una comida en donde es de buena educación o comer de ambos platos o no comer de ninguno, y por lo tanto son de mala educación los demás dos casos. Lo mismo puede expresarse diciendo: si como de a me toca comer de b y si no como de a tampoco puedo comer de b.

Una comida del tipo "vl" es una comida en donde es de mala educación no comer de a y sí comer de b y por lo tanto son de buena educación los demás tres casos. Lo mismo se puede expresar diciendo: como de a o como de b o como de ambos.

Una comida del tipo "pq" es una comida en donde es de mala educación no comer de a y sí comer de b y por lo tanto son de buena educación los demás tres casos. Lo mismo se puede expresar diciendo: como de a porque quiero comer de b.

Una comida del tipo "en" es una comida en donde es de mala educación comer de a y no comer de b, y por lo tanto son de buena educación los demás tres casos. Lo mismo se puede expresar diciendo: si como de a entonces me toca comer de b.

Una comida del tipo "sh" es una comida en donde es de mala educación comer de a y comer de b y por tanto son de buena educación los demás tres casos. Lo mismo se puede expresar diciendo: o como de a, o como de b o nó como de ninguno.

Una comida del tipo "at" es una comida en donde es de buena educación comer de a y no de b o no comer de a y sí de b, y por lo tanto de mala educación los otros dos casos.

Además, es conveniente anotar que el uso de la negación es siempre de tipo litótico (litote: figura retórica con la cual, negando el contrario, se quiere significar más de lo que se dice), es decir que la negación de un hecho es otro hecho.

En otras palabras, "un mismo hecho lo podemos expresar en dos formas: afirmativa: el cielo está nublado; negativa: el cielo no está sereno".

De éstas once conexiones algunas no se usan, como por ejemplo: mn, np, nn, otras se usan muy pocas veces, como por ejemplo, at, mientras que de las demás el uso es frecuente.

Es conveniente aclarar que la conexión "no" es una conexión singular, y que se puede tomar como primer ejemplo de operador y las otras diez, es decir: "et",...."at" son conexiones binarias y se pueden tomar como primer ejemplo de operaciones.

2 . 3 - Hechos generales.

Cuantificadores universales, particulares, singulares, positivos, negativos, numéricos; símbolos constantes y variables; variables aparentes y efectivas; proposiciones y condiciones; símbolos completos e incompletos; condiciones vacías, llenas, propias; soluciones de una condición.

Vamos a considerar los siguientes hechos simples:

"0 + 0 = 0 + 0" "0 + 1 = 1 + 0" "0 + 2 = 2 + 0" . . . .
"1 + 0 = 0 + 1" "1 + 1 = 1 + 1" "1 + 2 = 2 + 1" . . . .

$$
\begin{array}{llll}
\text{“}2+0=0+2\text{”} & \text{“}2+1=1+2\text{”} & \text{“}2+2=2+2\text{”} & \ldots. \\
\quad .. & \quad . & \quad .\ 2 & \ldots. \\
\quad . & \quad . & \quad . & \ldots. \\
\quad . & \quad . & \quad . & \ldots. \ (19)
\end{array}
$$

y el hecho compuesto con los mismos

$$
\begin{array}{l}
\text{“}0+0 = 0+0, \text{ et } 0+1 = 1+0, \text{ et } 0+2 = 2+0 \text{ et} \ldots \text{et} \\
\text{“}1+0 = 0+1, \text{ et } 1+1 = 1+1, \text{ et } 1+2 = 2+1 \text{ et} \ldots \text{et} \\
\text{“}2+0 = 0+2, \text{ et } 2+1 = 1+2, \text{ et } 2+2 = 2+2 \text{ et} \ldots \text{et} \quad (20)
\end{array}
$$

Este hecho compuesto del cual queremos hablar no ha sido expresado, simbolizado íntegramente, sino que para su representación nos hemos ayudado repetidamente con el símbolo "..." que equivale a la frase latina, bastante ambigua, "etcétera".

Hay más: se pensará que no sólo no lo hemos expresado íntegramente sino que, por razones más que obvias, no lo podemos expresar íntegramente.

Este no es el caso, ya que sí podemos expresar íntegramente el hecho en cuestión, que arriba hemos enunciado apenas parcialmente, de la siguiente manera :

"La suma de dos Nt es independiente del órden de los sumandos", o más bien, "cualesquiera sean los Nt a y b, a + b = b + a", o todavía mejor, "para cualquier b, a y b son Nt, en, a+b = b+a___(21)

El mismo hecho: "La suma de dos Nt no depende del orden de los sumandos", ha sido representado simbolizado de dos maneras completamente diferentes, que son respectivamente la (20) y la (21).

La diferencia esencial entre las expresiones (20) y (21) (recuérdese que el hecho por ellas simbolizado es el mismo) consiste en lo siguiente: si llamamos símbolo a todo signo que no sea de puntuación, entonces podemos afirmar que mientras la (20) está constituída solamente de símbolos constantes es decir, símbolos detrás de cada uno de los cuales esté un objeto bien determinado al contrario de la (21) al lado de símbolos constantes aparecen también símbolos variables (la a y la b), es decir símbolos detrás de cada uno de los cuales no está un objeto bien determinado.

(Hemos excluído los signos de puntuación del género símbolo porque los mismos no son necesarios para enunciar hechos por complejos que éstos sean. A tal resultado llega en 1929 el matemático y lógico polaco Lukasiewicz).

Para simplificar, desde ahora en adelante hablaremos simplemente de constantes y variables.

Con la nomenclatura establecida podemos entonces afirmar que el hecho llamado normalmente propiedad conmutativa de la adición entre Nt se puede expresar de dos maneras esencialmente diferentes: de la manera (20), es decir, por medio de una proposición en la cual aparecen sólo constantes, o de la manera (21), es decir, por medio de una proposición en la cual aparecen también variables.

Una observación de suma importancia es la siguiente:

Si en el enunciado (21) en el lugar de la variable a se pone la variable x, y en el de la b, la y, entonces el enunciado se transforma como sigue:

"Para cualquier x, para cualquier y, xy son Nt, en, x+y = y+x" (21) y el significado de (21') no es ni más ni menos que el significado de (21). Es por esto por lo que las variables eventuales que entran a hacer parte del enunciado de un hecho han sido llamadas: aparentes (Peano), seudo variables (Padoa), ligadas, mudas . . . . .

De lo dicho se sigue que cuando las variables (aparentes) son varias es lícito cambiar o trocar cuantas se quieran pero teniendo en cuenta que donde quiera que haya variables (aparentes) repetidas y diferentes se siga encontrando variables repetidas y diferentes.

En el enunciado (21) interviene la frase para cualquier repetidamente: "para cualquier a" "para cualquier b". Esta frase es la que se llama "cuantificador universal afirmativo"

De cuantificadores hay tantos cuantos uno quiera, pero los que se usan son muy pocos, y éstos es necesario presentarlos explícitamente.

$$\begin{array}{lll} 0+0=0, & 1+0=1, & 2+0=2, \ldots . \\ 0+1=1, & 1+1=2, & 2+1=3 \ldots . . \\ 0+2=2, & 1+2=3, & 2+2=4 \ldots . . . \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ . & . & . \end{array} \qquad (22)$$

La idea, tal vez la más obvia, que este cuadro nos sugiere es la siguiente: " La adición entre dos Nt siempre tiene resultado y siempre este resultado es un Nt ".

Este hecho es lo que comúnmente se llama: "propiedad clausurativa de la adición entre los Nt" y puede expresarse también de la manera siguiente: "cualesquiera que sean los Nt a y b siempre existe un Nt c tal que a + b = c " ——————————(23)
o mejor todavía,

"Para cualquier a, para cualquier b, para algún c, a b c son Nt, en, a + b = c " ——————————(23')

En el enunciado (23') además del cuantificador universal positivo <u>para cualquier</u> ya conocido interviene una nueva frase "<u>para algún</u> " que se llama <u>cuantificador particular positivo o afirmativo o cuantificador existencial.</u>

En general una proposición en la cual intervenga el cuantificador existencial se llama proposición existencial.

Observando bien el cuadro (22), en particular el primer renglón, nos damos también cuenta de lo siguiente :

"Hay por lo menos un Nt que adicionado a cualquier otro Nt hace que éste no varíe. Y además, (pero de esto nos ocuparemos más adelante), "y de Nt que gocen de esta propiedad no hay más que uno que es el 0".

En total el hecho enunciado se dice que expresa: "la propiedad modulativa del 0 con respecto a la adición entre los Nt", o más simplemente que: "el 0 es el módulo o el indiferente de la adición entre Nt".

La primera parte, sin tener en cuenta la segunda, nos habla de "la existencia de un módulo con respecto a la adición entre Nt".

Bien. Cómo poder expresar este hecho con cuantificadores? De la siguiente manera:
"Para algún a, para cualquier b, a b son Nt, en, b + a = b" ——(24)

La segunda parte nos habla de "la unicidad de tales módulos con respecto a la adición entre Nt".

Bien. Cómo podemos expresar este hecho con cuantificadores? De la siguiente manera:
"Para cualquier a', para cualquier a'', para cualquier b, a' a'' b son

Nt, et, b + a = b, et, b + a'' = b,, en, a' = a''' ________________(25)

Es conveniente entonces adoptar un nuevo cuantificador que llamaremos cuantificador singular positivo o afirmativo que y expresaremos de la siguiente manera: "para uno y uno solo".

La propiedad modulativa del 0 con respecto a la adición entre los Nt se expresa entonces de la manera siguiente:
"para uno y un solo a, para cualquier b,, a b son Nt, en b+a = b"__(26)

Es conveniente entonces hacer las siguientes convenciones:

up es la abreviatura de para cualquier
pp " " " para algún
sp " " " para uno y uno solo

Entonces las proposiciones (21), (23), (24), (25), (26) toman las siguientes formas abreviadas:
"up a, up b,, a b son Nt, en a + b = b + a" ________________ (27)
"up a, up b,pp c,, a b c son Nt, en a + b = c" ________________ (28)
"pp a, up b,, a b son Nt, en, b + a = b" ________________ (29)
"up a', up a'', up b,,, a' a'' b son Nt, et, b + a' = b,
et, b + a'' = b, en, a' = a'' ________________ (30)
"sp a, yp b,, a b son Nt, en, b + a = b" ________________ (31)

Los cuantificadores que hemos visto hasta ahora son los afirmativos o positivos y precisamente el universal (up) el particular (pp) y el singular (sp).

Es conveniente, aunque sea en forma breve, indicar los cuantificadores negativos; el universal (un) el particular (pn), el singular (sn) que simbolizan las ideas expresadas respectivamente por "para ningún", "para algún no", "para uno y uno solo, no". Vamos a aclarar con algunos ejemplos el uso de estos tres cuantificadores. Por ejemplo, para indicar que:

"Para ningún a,, a es Nt, et, $a^2 + 5a + 6 = 0$,

escribiremos:

"un a,, a es un Nt, et, $a^2 + 5a + 6 = 0$

y para indicar que

"para algún a, no,, a es Nt, et $a^2 - 5a + 6 = 0$

escribiremos:

"p n a,, a es un Nt,et,$a^2 - 5a + 6 = 0$"

y en fin, para indicar que

"para uno y un solo a no y para algún a b = sc b"

escribiremos :

"s n a, p p b,, a = sc b"

Es conveniente notar que "sp" y "sn" abren toda una sucesión de cuantificadores numéricos como "para dos y solo dos ".. .

Hemos visto que "el hombre sólo entiende si se le habla en términos de hechos" y hemos visto también que los hechos se representan, se simbolizan, por medio de proposiciones que pueden ser simples, compuestas y generales.

Mientras en las simples y las compuestas los signos que intervienen son (símbolos) constantes, en las generales intervienen también (símbolos) variables, y por un motivo que aclaramos, a estos últimos se le llama también variables aparentes.

Bien, por el hecho de que una proposición está constituída de símbolos, por el hecho de que ella misma simboliza algo (un hecho) la proposición es un símbolo (compuesto) .

Además, por lo que hemos recordado -que el hombre entiende sólo el simbolismo discursivo, es decir, sólo entiende proposiciones, por este motivo se dice que la proposición es el único símbolo completo (o constante completa).

Vamos ahora a considerar la siguiente proposición general:

"pp a,, a es un Nt, et, $a^2 - 5a + 6 = 0$ ____________ (32)

y vamos a considerar lo que queda de la misma cuando se borra el cuantificador:

"a es un Nt, et, $a^2 - 5a + 6 = 0$" ____________ (33)

Lo que queda es una expresión que tiene la misma estructura gramatical de una proposición (y un gramático afirmaría que lo es) pero que no es proposición (por no ser el reflejo, la imagen, el símbolo de algún hecho).

A una expresión como la (33), algo como un esqueleto, una estructura, una forma, una matriz de proposiciones pero que no es proposición, se le llama una condición.

La (33) es una condición compuesta por medio de la conjunción "et" y de las condiciones simples :

"a es un Nt"

$$\text{"}a^2 - 5a + 6 = 0\text{"}$$

Una condición, por motivos obvios, es lo que se llama un "símbolo incompleto".

El símbolo "a" que entra en el enunciado de la (32) hemos visto que se llama "variable aparente" o "pseudo-variable" o "variable ligada" o . . . .

El mismo símbolo que aparece en la (33) o (34) o 35), es decir una variable que ya no es aparente porque faltan los cuantificadores (o algo semejante a un cuantificador) se llama una "variable efectiva o variable verdadera, o variable libre" o . . . .

La distinción que hemos hecho de la variables en ligadas y libres ha sido hecha por primera vez por Peano al finalizar el siglo pasado. Peano, de verdad, distinguía las variables en aparentes y reales, según que en el discurso en que la distinción tiene que ser hecha sea o no lícito cambiarlas. Pero como estas dos palabras por el hecho de usarlas en las frases "fracciones aparentes" y "números reales" podrían dar lugar a ambiguedades, Padoa empleó, para hacer la misma distinción, las frases "pseudo-variable" y "variable efectiva", y más adelante otros lógicos propusieron la siguiente nomenclatura "variable ligada" en el primer caso, y "variable libre" en el segundo.

A nosotros nos parece conveniente usar las siguientes alternativas

"Variable ligada o aparente" en el primer caso, y "variable libre o efectiva" en el segundo.

De esta manera no se excluye que en una condición puedan encontrarse también variables ligadas como en el ejemplo siguiente:

$$\text{"up } a\text{,, } a \text{ es Nt, en, } a + b = a\text{"},$$

en donde "a" es variable aparente y "b" efectiva.

Vamos a considerar la condición

$$\text{"}a \; b \text{ son Nt, en, } a + b = b + a\text{"} \qquad (36)$$

Sabemos ya, recuérdese la (27), que esta condición está satisfecha o verificada para cualquier "a" y para cualquier "b"; una condición como la (36) que está satisfecha para cualquier valor que se atribuya a su o a sus variables se llama una condición llena o idéntica o simplemente una identidad.

Vamos ahora a considerar la siguiente condición :

$$\text{"}a \text{ es Nt, et } a^2 + 5a + 6 = 0\text{"} \qquad (37)$$

Es fácil darse cuenta de que cualquier Nt, que sí satisface la primera parte (a es Nt) no puede satisfacer la segunda, ($a^2 + 5a + 6 = 0$), lo que se puede expresar de la siguiente manera (usando del cuantificador universal negativo "un").

"un a,, a es Nt, et, $a^2 + 5a + 6 = 0$" ____________ (38)

y entonces el mismo hecho se expresa diciendo que la condición (37) es vacía o absurda o simplemente una absurdidad.

Si ahora consideramos la condición

"a es Nt, et $a^2 - 5a + 6 = 0$"

entonces es fácil darse cuenta de que se verifica por los valores "2" y "3" de "a" y que para los demás se falsifica lo que se puede enunciar de la manera siguiente:

"pp a,, a es Nt, et $a^2 - 5a + 6 = 0$ et

"pp a,, no (a es Nt, et, $a^2 - 5a + 6 = 0$)" ____________ (40)

En este caso, es decir, cuando una condición no es ni vacía, ni llena, es decir, cuando se verifica para algunos valores de "a" y se falsifica para otros, entonces se dice que estamos tratando de una condición propia.

Los valores de la o de las variables que verifican una condición, es decir, que la transforman en una proposición verdadera se llaman soluciones de la condición.

Una condición propia, o más simplemente una condición puede poseer un número finito (diferente de 0) de soluciones o un número infinito.

Por ejemplo la condición :

"x es un Rl, et sn x = + /2 /2" ____________ (41)

posee infinitas soluciones dadas po lo x iguales a $(-1)^k /4 + k$, siendo K un Nt, mientras que la condición

"a es un Nt, et, $a^2 - 7a + 12 = 0$" ____________ (42)

posee sólo 2 soluciones respectivamente iguales a 3 y a 4.

La distinción de los discursos (que no sean sin sentido) en proposiciones y condiciones equivale más o menos a la distinción escolástica de los juicios en categóricos e hipotéticos y es una extensión obvia de la distinción de las igualdades numéricas en idéntidades y ecuaciones bajo dos aspectos: el de la forma del discurso que puede no ser una igualdad y el del significado de cada variableque puede no ser un número.

Es conveniente dejar explícito que una condición compuesta como:

"a es un Nt, et, $a^2 - 5a + 6 = 0$"

en la cual se indica explícitamente el campo en donde la variable (a) toma sus valores -en este caso el campo es Nt- se dice "completa" en el caso opuesto, "incompleta".

El descriptor objetal.

Consideramos una proposición general que empieza con el cuantificador singular positivo (sp), por ejemplo:

"spa, upb,, a b es Nt, et $a + b = b$ ( )

y consideramos la expresión que se obtiene borrando "spa":

"upb,, a b es Nt, at, $a + b = b$"

Sabemos ya que esta expresión es una condición y además que -siendo el resultado de haber borrado el "spa" en ( )- es verificada por uno y un solo valor de a (que es el cero).

Bien. Esta condición la podemos precisamente usar como base para describir al cero y dar la definición o descripción del mismo de la siguiente manera :

"o = el (solo) a tal que [upb,, a b es Nt, et, a † b = o]"

que simbolizaremos mejor como sigue :

"o = el a tl [upb,, a b es Nt, et, a † b = b]

La expresión "el c tl" (que se lee "el a tal que", o "el único a que verifica"), se llama obviamente "el descriptor objetal" porque es un "operador" que transforma una condición (oportuna) en un objeto.

2 . 4 - Un poco de historia y de crítica sobre el concepto de variable.

Se sabe que el desarrollo del simbolismo algebraico mucho debe a Vieta (1540 - 1605) quien escribe, en el año de 1591, su "In artem analiticom isagoje" iniciando de esta manera la que Nesselman bautiza como tercera fase del desarrollo del álgebra -la simbólica- siendo las otras dos la retórica y la sincopada, esta última iniciada por Diofanto.

Las principales mejorías introducidas por Vieta en la notación algebraica consisten en el uso de letras, sea para indicar las incógnitas, sea para indicar las cantidades conocidas, empleando para las primeras las vocales y para las segundas las consonantes estando, de tal manera, capacitado a considerar problemas con más de una incóg. nita. Escribe Boutroux "En établissant une distinction systematique entre la 'logística numerosa' (calcul numerique) et la 'logística speciosa' (calcul portant sur des lettres) Viete constitua l'Algebre moderne en science autonome".

Por este motivo se puede afirmar que con Vieta se engendra el concepto tan fudamental de "variable" concepto que en su desarrollo se presenta a los que quieren ahondar en él, como el místico Proteo: a veces una variable ya no es tal sino sólo un parámetro o un argumento, a veces es una constante arbitraria, es decir una constante variable, a veces un número arbitrario constante (Cuáles son los números variables?) y como si todo esto no fuera bastante, las variables ora son pseudo-variables o mudas o ligadas o saturadas o impropias o aparentes, ora son efectivas o reales o libres o propias.

Los que enseñamos matemática sabemos el infierno en que podría sumirse una clase si cuando hablando de la ecuación de una recta genérica (qué es una recta variable?) ax † by † c = 0 (en coordenadas cartesianas) un alumno preguntase: "Por qué son variables x o y y no lo son a, b y c? En efecto, siendo a, b, c letras, así como los son x o y también ellas son variables; y entonces? La cuestión se puede poner todavía peor si se examina detenidamente una escritura del tipo bien conocido,

$$\int_a^b (mx^2 + n x + p).\ dx$$

En esta escritura tenemos la llamada variable de integración -la x- los parámetros -m, n, p, de la función integranda $m\,x^2 + n\,x + p$ (es de verdad esta la función integrada?) y los extremos de la integral -a y b.

Y de la "d" que hay? Oh, es el signo de diferenciación ("dx" es la diferencia de x) y por tanto no es una variable sino el símbolo de una constante o mejor dicho de un operador tal como el símbolo de integración "$\int$".

Esto significa que a las variables de diferentes tipos que se presentan en la escritura en exámen (x; a, b; m. n,p) hay que añadir una séptima, la dx que, como todos sabemos, es independiente de la x.

Ahora bien, todos sabemos que el valor, el significado de:

$\int_a^b (m\,x\ + n\,x + p).dx$ es el siguiente

$m\,(b^3 - a^3)\,/3 + n\,(b^2 - a^2)\,/2 + p\,(b - a)$ independiente tanto de x como de dx y sí dependiente de todas las demás variables que son independientes de ex, es decir, a, b, m, n, p .

Pero ya afirmamos que dx es una variable independiente de x, y entonces, de dónde viene esta horrible manera de comportarse del dx ? cómo es que siendo dx variable independiente de x no se comporta como tal ? .

La cosa se presenta engorrosa y todavía presenta un lado más peliagudo si sacamos dx, como es lícito, fuera de la integral, puesto que una constante multiplicativa, y dx lo es, se puede siempre sacar fuera del signo de integración.

Además si dx es independiente de x debe poderse indicar de cualquier otra manera, pongamos h, y entonces, cómo saber que la variable de integración es la x ?.

Si una ciencia es un lenguaje bien hecho -condición apenas necesaria- entonces sí debemos estar decepcionados del simbolismo matemático. El problema (sintáctico) expuesto y otros semejantes llevan a Peano (1858 - 1932) a introducir la clasificación de las variables en aparentes y reales modificada por Padoa (1864 - 1936) en pseudovariables y efectivas para eliminar las ambigüedades que pudieran surgir del hecho que las palabras usadas por Peano son empleadas también en las frases "fracción aparente" y "número real". Al mismo tiempo Peano resuelve el engorroso problema del simbolismo de la integración poniendo en general

$$\int_a^b (\,fn\,x\,)\ x$$

que se lee - "la integral entra a y b de fn x variando x".

Veremos en lo sucesivo la profunda importancia del concepto "variano" introducida por un matemático que tal vez se adelantó demasiado a su tiempo (forma cómoda e hípócrita para no decir la verdad de otra manera).

Entonces en el caso que estamos considerando en la expresión

$$\int_a^b (m\,x^2 + n\,x + p)\ /x$$

la x es una variable aparente y a, b, m, n, p, son variables efectivas.

La clasificación hecha por Peano de las variables aparentes y efectivas ha sido aceptada por los lógicos y matemáticos de este siglo y sobre esta base se desarrollan tanto la lógica como la matemática actual.

Hoy en día, y especialmente por parte de los lógicos en vez de decir variables aparentes y efectivas se usa más bien decir variables ligadas y libres. Por lo poco que hemos visto es posible darse cuenta de que en un tratado de matemática, y en general en cualquier ciencia, no puede haber sino un solo tipo de variables: las aparentes o ligadas, mas por una cuestión de rapidez en el manejo de las fórmulas o tal vez por una simple cuestión de costumbre -y de pereza! por lo tanto - se han introducido al lado de las variables ligadas las libres.

Fundamental es haberse dado cuenta de esta clasificación en primer lugar, y en el segundo lugar haberse dado cuenta de la posibilidad de usar un solo tipo de variable (la ligada) .

CAPITULO III

Igualdad

Otro concepto fundamental es el de "igualdad" que simbolizaremos con el signo "=" en cuanto sustituya la frase "es lo mismo que", como en la siguiente proposición :

"Triángulo equiángulo = Triángulo equilátero"

Desde Vieta hasta Leibniz este significado se atribuyó al signo "ω" deformación de la inicial de la palabra latina aequalis.

Recorde le dió la forma actual, probablemente sacada de manuscritos medioevales, forma que Newton adoptó y difundió.

Habitualmente entre operaciones indicadas como en la "5 + 3 = 3 + 5" se lee "es igual", cuidado de no abreviar la lectura con la supresión del verbo, y por lo tanto se llama igualdad cada fórmula como "a = b" en la que a y b se llaman los miembros de la igualdad. Es éste el único símbolo lógico cuyo uso se ha vuelto universal pero solamente entre Números mientras que entre figuras para decir "es lo mismo que" se usa la frase "coincide con"; al contrario el signo " = "aun leyéndolo "es igual a" se usa para decir: "es superponible a" y por lo tanto como símbolo geométrico.

En lo que sigue siempre le atribuiremos el significado declarado aunque variando la lectura de manera conforme al uso; por ejemplo "da" entre una operación indicada y su resultado como en la "5 + 3 = 8" "es" o "vale" como en la proposición :

"cs 0 = 1"

"se lee" en el acto de presentar una nueva escritura como en:

"tg x = la tangente de x"

"significa" o "se podría definir" como en:

"tg x = sn x / es x"

según que la igualdad es una definición o una definición posible. Escribiremos el signo "=" entre condiciones que tengan las mismas variables efectivas o libres para decir que tienen las mismas soluciones. (Para el mismo efecto se puede usar "eq").

Por ejemplo, si x es un número, entonces

"(10 x + 9 = 3 x + 100) = (x = 13)".

En esta proposición el segundo "=" es el símbolo principal que se debe leer "cuando" o "equivale decir que" mientras que el primero que hay leerlo "es igual a" y el tercero "vale".

De esta manera mientras la equivalencia entre polígonos o poliedros indica una relación geométrica no confundible con la igualdad, sea la lógica, de la cual nos estamos ocupando, sea la geométrica en el sentido de superponibilidad, al contrario toda equivalencia de fracciones o de ecuaciones no indica ninguna relación numérica sino simplemente una igualdad lógica.

El símbolo "=" permite escribir la siguiente proposición : "x = x", cuya lectura se puede volver más expresiva si se hace proceder o seguir de la frase "para cualquier (significado o valor momentáneo de) x". Esta proposición enuncia la exigencia esencial del lenguaje, es decir, la constancia no sólo del significado de cada símbolo sino del significado momentáneo de cada variable en una misma lectura de un mismo discurso.

La lógica escolástica lo llama el "principio de identidad" y Vailati lo llamó propiedad reflexiva de la igualdad.

Aparentemente estéril este principio es al contrario fuente rica y variada de verdad.

Ante todo llamaremos identidad lógica toda igualdad que se saque de la proposición (43) atribuyendo a x un significado momentáneo arbitrario en que puedan intervenir símbolos extraños a la lógica y de los cuales no importa conocer el significado, como,

$$“15 = 15”$$

y también con variables como,

$$“a + b = a + b”$$

Al contrario diremos que

$$“8 + 7 = 3 \times 5”$$

es una identidad aritmética porque su verdad no puede ser conocida si no se conocen los símbolos aritméticos que en ella se emplean. Mas para los que los conocen, de dónde emana la certeza de su verdad ? Del hecho de que ejecutando las operaciones indicadas se convierte en la identidad lógica (43) .

La verificación de la resolución de una ecuación qué otra cosa es sino la conversión de ésta en tantas identidades cuantas son las soluciones encontradas ? .

Además, la verificación no sirve sólo para asegurarse de no haber cometido errores. Muchas veces completa la resolución puesto que sólo recurriendo a la misma se pueden eliminar la soluciones extrañas. Por ejemplo, la que habitualmente se llama resolución de la ecuación.

$$“\nu (x - 12) + \nu (x - 9) = \nu (x - 4)” \tag{44}$$

nos lleva a encontrar la dos soluciones 13 y 11/3.

'hora, mientras la verificación de la pr imera solución conviette la (44) en la identidad arimética “1 + 2 = 3” reductible a la identidad lógica “3 = 3” al contrario la verificación de la segunda, eliminando el denominador común 3, conduce a la igualdad falsa “5i + 4i = i” y por lo tanto elimina esta solución.

No sólo: la verificación hecha, además de enseñarnos que 13 es la solución de la (44) nos revela que 11/3 es al contrario la solución de la ecuación

$$“\nu (x - 12) - \nu (x\ 9) = \nu (x - 4)”$$

y que la ecuación,

$$“\nu (x - 9) - \nu (x - 12) = \nu (x - 4)”$$

no tiene soluciones.

Evidentemente los escépticos que niegan la fecundidad de la proposición (43) ignoran el uso continuo que de la misma se hace. Por este motivo hemos creído oportuno recordarla.

Además de la propiedad reflexiva (proposición 43) la igual-

Además de la propiedad reflexiva (proposición 43) la igualdad goza de las propiedades

"x = y, e, y = x" (simétrica)

"x = y, et, y = z, en, x = z" (transitiva)

Es conveniente hacer notar que habitualmente se enuncian las tres propiedades nombradas (reflexiva, simétrica, transitiva) como fundamentales o características de la igualdad, lo que es falso.

En efecto, por ejemplo las relaciones geométricas de "superponibilidad", de "equivalencia" de "semejanza" gozan de estas mismas propiedades. Lo que sí caracterizan estas tres propiedades son las relaciones ecualiformes, o equivalencias como las ya citadas, relaciones que juegan un papel fundamental en la ciencia: en general todo "concepto" corresponde a una "equivalencia".

Por ejemplo el concepto de "forma" corresponde a la relación de "semejanza", el de área" a la de "equivalencia (superficial), el de "longitud" a la de "superponibilidad" (segmentaria) . . . . .

Cualesquiera que sean las escrituras "x y", "u x", "u x v" en las que ningún símbolo está subentendido entre x y u, o entre u y x, o entre u y x y v, sólo que no sean sin sentido, entonces,

"x = y, en, x u = y u" (45)

"x = y, en, u x = u y" (46)

"x = y, en, u x v = u y v" (47)

Estas tres proposiciones dicen que "si x = y entonces la substitución de y a x al principio de una escritura "x u", o al término de una escritura, "u x" o en el contexto de una escritura "u x v" no altera el significado o la verdad misma.

Esta fue llamada por Padoa "propiedad sustitutiva de la igualdad" y fue enunciada por Leibnitz como sigue: "Eadem sunt quorum unum in alterius locum substitui potest, salva veritate".

Como hemos visto, las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva no caracterizan a la igualdad sino solamente a las equivalencias; al contrario la propiedad substitutiva es exclusiva de la igualdad y por lo tanto queda superfluo añadir "de la igualdad".

Las proposiciones (45) y (46) otorgan el derecho de operar arbitrariamente, basta que sea de la misma manera, sobre ambos miembros de toda igualdad, tanto a derecha como a izquierda.

La proposición (47) se deduce de (46) (operar a izquierda) por por medio de una aplicación de la (45) (operar a derecha).

No reconocer una vez para todas este derecho lógico lleva ca- casi todos los tratadistas a establecer caso por caso, algunos presu- midos derechos algebraicos llamados "teoremas generales sobre las ecuaciones". De estos teoremas las pretendidas "demostraciones" en cuanto invoquen proposiciones numéricas otra cosa no son sino vanilo- quios que disfrazan aplicaciones inmediatas de la propiedad sustituti- va, (que por lo dicho se podría llamar mejor operativa).

Por ejemplo, no se necesita conocer el significado de las es- crituras:

"2 x", "s n x", "x^2" "x^3", . . .

para saber que

"si "x = y", entonces "2 x = 2 y", "s n x = sn y",

"$x^2 = y^2$", "$x^3 = y^3$", . . .

Lo que sí se necesita poner de relieve es que la lógica no o- torga el derecho de invertir las aplicaciones enunciadas; es decir, permite escribir, pero no cancelar indicaciones iguales a derecha o a izquierda de los dos miembros de la igualdad.

El derecho de cancelación hay que examinarlo caso por caso y mediante cogniciones extrañas a la lógica, a menos que no se trate de operaciones lógicas.

Por ejemplo, en las implicaciones arriba enunciadas es lícito invertir la primera, cualquiera que sean los números x, y, la segunda si x, y son números entre - /2 y + /2, la tercera si x, y son números positivos, la cuarta si x, y son números reales, ... Cuando se trata de las cuatro operaciones fundamentales ejecutadas sobre los dos miembros de una ecuación (con exclusión del 0 como factor o como di- visor) toda cancelación puede y debe pensarse o como obtenida por medio de la operación inversa y sucesiva simplificación de cada miem- bro, o como resultado de una propiedad postulada para una doduopera- ción, cancelación que es por lo tanto el resultado de una propiedad de las operaciones y no de las ecuaciones.

Por ejemplo, por el derecho lógico "2 x = 2 y", implica "2 x/2 = 2 y/2", de donde mediante simplificación aritmetica "x = y".

(Continuará)