SOBRE LA INTERPRETACION DEL SIGNO $\supset$

Por John Myhill

(The Journal of Symbolic Logic, Vol. 18, Number 1, Pag. 60 - 62)

El signo $\supset$ (o$\rightarrow$o $\subset$) funciona en muchos sistemas lógicos de una manera tal que impide su interpretación, ya sea como "implicación estricta" o como "implicación material". Por ejemplo, en los sistemas de Heyting[1], Johansson[2], Fitch[3], Bernays[4] (lógica positiva), lo siguiente son teoremas:

1. $p \supset p$
2. $p \supset p \supset p$

Ahora, si $\supset$ fuese interpretado como "implicación estricta" $\supset$2 significaría: "si p es cierto, entonces p es estrictamente implicado por cada (toda proposición", i. e. "si p es cierta, ella es necesariamente cierta", lo cual es falso para la contingentemente verdadera p. Por otra parte, si $\supset$ fuese interpretado como "implicación material" $\supset$1 se reduciría a: $\sim p \vee p$ i. e. a la ley del "tercer excluído", la cual falta conspicuamente en los sistemas mencionados. En la práctica, el lector es propicio para vacilar entre estas dos interpretaciones. Así, en Fitch[5] o en Hayeting[6] realizamos que: $\sim p \supset - p \supset q$ es un teorema, y uno piensa que significa: "una proposición falsa implica todo", y se considera la implicación como <u>material</u>; pero la presencia de $p \supset q$ como un teorema, aún para escogencias de p que no satisfagan a la ley del "tercer excluído", nos inclina a la interpretación estricta. Esta vacilación, aunque no conduzca al cometimiento de alguna falacia formal, tiende a desjarretar nuestra intuición y perder así el tiempo. El propósito de este trabajo es el de sugerir una interpretación de $\supset$ que prevenga lo anterior.

Sean A y B dos fórmulas que llamaremos "interdeducibles" si, $A \vdash B$ y $B \vdash A$. Mostraremos cómo, otorgando ciertas propiedades muy generales de "implicación estricta" y "cuantificación existencial" cualquier fórmula $A \supset B$ es "interdeducible" con:

$$\text{I} \qquad (\exists r)(r \,\&)(r \,\&\, A) \dashv B)$$

en cualquiera de los sistemas mencionados.

En palabras esto se lee :

A implica B en el sentido establecido, si "la conjunción de A con alguna proposición verdadera r implica estrictamente B".

Dos fórmulas interdeducibles, o, que A implica naturalmente a B si nos referimos a estos como a una "implicación natural".

Llamaremos a un sistema "adecuado para implicación natural" si contiene un signo $\supset$ y un signo & con las siguientes propiedades :

P1.	$A, A \supset B \vdash B$	Si A es verdadero y A implica B, entonces se deduce B.
P2.	Si $A \vdash B$, entonces $\vdash A \supset B$	Si de A se deduce B entonces se deduce que A implica B.
P3.	$A \& B \vdash A$.	De la conjunción de A y B se deduce A.
P4.	$A \& B \vdash B$.	De la conjunción de A y B se deduce B.
P5.	$A, B \vdash A \& B$	Si A y B son verdaderos, entonces se deduce la conjunción de A y B.
P6.	$A \& B. \supset C \vdash A \supset. B \supset C$	Si la conjunción de A y B implica C se deduce que A implica que B implica C.

En virtud de P2 podemos añadir consistentemente al sistema en cuestión las siguientes reglas para la implicación estricta :

S1.	Si $A \vdash B$, entonces $\vdash A \prec B$	Si de A se deduce B, entonces se deduce que A implica estrictamente a B.
S2.	Si $\vdash A \prec B$, entonces $\vdash A \supset B$	Si se deduce que A implica estrictamente a B, entonces se deduce que A implica materialmente a B.

La consistencia del sistema así aumentado resulta del hecho de que podemos reemplazar $\prec$ por $\supset$ a traves de cualquier prueba en donde se usen S1 - 2 y obtener una prueba que no las use. Porque de S1 se llega a P2 mientras que S2 se reduce a una mera repetición de A ⊃ B.

Podemos también, de acuerdo con las principales ideas del intuicionismo, agregar las siguientes reglas para el "cuantificador existencial":

E1. . . . A - - - ⊢ (∃ r) (. . . r - - -)

E2. Si . . . r - - - ⊢ A, entonces (∃ r) (. . . r - - -) ⊢ A en donde A no contiene a r.

Mostraremos ahora que con base en P1. P3 - 6, S1 - 2 E1 - 2 se puede probar la interdeducibilidad de A B y L.

Demostración :

1.	A ⊃ B. & A ⊢ A ⊃ B	P2.
2.	A ⊃ B. & A ⊢ A.	P4.
3.	A ⊃ B. & A ⊢ B	1, 2, P1.
4.	⊢ A ⊃ B. & A : ⥽ B	3 S1.
5.	A ⊃ B ⊢ A ⊃ B. &:. A ⥽ B. & A : ⥽ B	4, P5.
6.	A ⊃ B ⊢ I	5, E1.
1'.	r : r & A. ⥽ B ⊢ r	P 3.
2'.	r : r & A. ⥽ B ⊢ r & A, ⥽ B	P4.
3'.	r : r & A. ⥽ B ⊢ r & A. ⊃ B	2'. S2.
4'.	r : & A. ⥽ B ⊢ r ⊃. A ⊃ B	3'. P6.
5'.	r: r & A. ⥽ B ⊢ A ⊃ B	1'. 4'. P 1.
6'.	I ⊢ A ⊃ B	5'. E2.

A ⊃ B y I son interdeducibles (6, 6'). Entonces A ⊃ B se puede interpretar como :

"La conjunción de A con alguna proposición verdadera implica estrictamente B". Q. E. D.

Yale University.

1. - A. Heyting, "Die formalen Regeln der intiuitionistischen Logik"

Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physykalisch-matematische Lkasse 1930 pp 42 - 56.

2. - I. Johansson, "Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionisthscher Formalismus", Compositio mathematica, vol. 4 (1936) pp. 119 - 136.

3. - F. B. Fith, "A further consistent of basic logic", extension The journal of Symbolic Logic, vol 14 (1949) pp. 209 - 218.

4. - D. Hilbert and P. Bernays, "Grundlagen der Mathematik", vol 2, Berlín 1939, pp. 422 - 439.

5. - F. B. Fitch, loc. cit., 3.13 (p. 212).

6. - Cf. the review by Barkeley Rosser in the Journal of Symbolic Logic, vol,3 p. 169 of Mordchaj Wajsberg's "Untersuchunben Über den Aussagenkalkül von A. Heyting, Wiadomosci matematyczne, vol. 16 (1938) pp. 45 - 101.

≡ → ≡ → ≡ → ≡ → ≡ → ≡ → ≡ → ≡ → ≡ → ≡ → ≡ →