POTENCIAS DE UN POLINOMIO

Por Alberto Rodríguez, S. I.

El problema de elevar un polinomio a una potencia dada presenta un interés teórico más bien que práctico. En cualquier caso, y sea cual fuere el método utilizado, resulta una operación en extremo laboriosa cuando tanto el grado del polinomio como el exponente de la potencia son relativamente grandes.

Varios son los procedimientos que se pueden seguir :

-El elemental de multiplicar por sí mismo el polinomio tantas veces como unidades tiene el exponente;

-El de descomponer el polinomio dado en un binomio cuyo primer término es el primero del polinomio base, y el segundo, la suma de los restantes. Se aplica entonces la fórmula para elevar un binomio a una potencia, y en el desarrollo aparecerán ahora potencias de polinomios cuyo grado es en una unidad inferior al grado del polinomio base, y que a su vez se descomponen en otros binomios, procediéndose así sucesivamente hasta llegar a potencias de auténticos binomios;

-Mediante la teoría del análisis combinatorio, y como aplicación de las permutaciones con repetición, se prueba con facilidad que el término general del desarrollo.

(1) $$(a_o + a_l + \dots + a_i + \dots + a_m)^n$$

es de la forma

$$\frac{n!}{\alpha_o!\,\alpha_2!\dots\alpha_i!\dots\alpha_m!}\; a_o^{\alpha_o}\dots a_l^{\alpha_i}\dots a_i^{\alpha_i}\dots a_m^{\alpha_m}$$

y siendo

$$\alpha_o + \alpha_1 + \dots \alpha_1 + \dots \alpha_m = n$$

y recibiendo todos los sistemas posibles de valores naturales en que se puede descomponer el exponente n.

-Utilizando la fórmula de Maclaurin :

$$f(x) + (o) + f'(o)\frac{x^2}{2!} + f''(o)\frac{x^2}{2!} f'''(o\frac{x^3}{3!} + \dots f^{(n)}(o)\frac{x^n}{n!} + \dots$$

en la que f (x) representaría la expresión (1), y que requiere el cálculo de las diversas derivadas sucesivas de dicha función. Por ejemplo, en el caso de un polinomio de grado cuarto elevado a la cuarta potencia, exigiría el cálculo de dieciseis derivadas, en las que luégo habría que particularizar su valor para $x = o$.

Cada procedimiento tiene sus ventajas y sus inconvenientes. Tal vez el mayor de éstos en los primeros sea la imposibilidad de su aplicación cuando el exponente "n" deja de ser un número natural.

Como elemental aplicación de la primera derivada de un polinomio y mediante el método de los coeficientes indeterminados, vamos a indicar un nuevo procedimiento, posiblemente más práctico, y valedero para cualquier valor que reciba el exponente "n".

Dado el polinomio base, siempre le podemos considerar como una función de la variable "x", y ordenar conforme a las potencias crecientes de esta variable. Si el polinomio careciera de tal variable, podríamos considerar cada uno de sus términos como coeficientes de dichas potencias crecientes de una variable auxiliar "x"; en los resultados finales bastaría hacer $x = 1$ para obtener la solución deseada.

Sea, pues, el polinomio base grado "m", que deseamos elevar a la potencia de exponente "n", de la forma

$$(2) \qquad f(x) = a_o + a_1 x_1^1 + a_2 x_2^2 + \cdots a_i x_i^i + \ldots + a_m x_m^m$$

$$= \sum_{i=o}^{i=m} a_i x^{i-1}$$

y su derivada

$$(3) \qquad f'(x) = a_1 + 2a_2 x \ldots \ldots + i\, a_i x^{i-1} + \ldots \ldots + a_m x^{m-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=m} i\, a_i x^{i-1}$$

$$(4) \qquad F(x) = [f(x)]^n = A_o + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_i x^i + \ldots$$

y su derivada

$$(5) \qquad F'(x) = A_1 + 2\, A_2 x + 3\, A_3 x^2 + \ldots + A_i x^{i-1} + \ldots$$

Derivando con respecto a " x " la expresión (4), y multiplicando luégo por f (x) :

$$(6) \qquad f(x)\,F'(x) = n\, f(x)^{n-1}\, f'(x)\, f(x) = n\, f'(x)\, F(x)$$

Los coeficientes de las diversas potencias en orden creciente $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^{i-1}, x^i \ldots$ del producto $f(x)\,F'(x)$ son respectivamente,

$$a_0 A_1$$

$$a_1 A_1 + 2 a_0 A_2$$

$$a_2 A_1 + 2 a_1 A_2 + 3 a_0 A_3$$

$$(7) \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$a_{i-1} A_1 + 2 a_{i-2} A_2 + 3 a_{i-3} A_3 + \cdots + (i-1) a_1 A_{i-1} + i a_0 A_i$$

$$a_i A_1 + 2 a_{i-1} A_2 + 3 a_{i-2} + 3 a_{i-2} A_3 + \cdots + (i-1)\, a_2 A_{i-1} + i a_1 A_i + (i+1)\, a_0 A_{i+1}$$

y los coeficientes del producto $n\ f'(x)\ F(x)$ son, respectivamente

$$n\, a_1 A_0$$

$$2n\, a_2 A_0 + n\, a_1 A_1$$

$$3n\, a_3 A_0 + 2n\, a_2 A_1 + n\, a_1 A_2$$

$$(8) \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$i n a_i A_0 + (i-1)\, n a_{i-1} A_1 + (i-2)\, n a_{i-2} A_2 + \cdots + 2n a_2 A_{i-2} + n a_1 A_{i-1}$$

$$(i+1)\, n a_{i+1} A_0 + i n a_i A_1 + (i-1)\, n a_{i-1} A_2 + \cdots + 3n a_3 A_{i-2} + 2n a_2 A_{i-1} + n a_1 A_i$$

Para que la expresión (6) se cumpla independientemente del valor de "x", es preciso que se convierta en una entidad, es decir, que sean iguales en uno y otro miembro los coeficientes correspondientes a las diversas potencias de "x". Las diversas identidades que iremos estableciendo según este criterio nos permitirán obtener los coeficientes A_i en función de los anteriores y de otros datos conocidos.

Con el fin de simplificar la notación, hagamos

$$(9) \qquad n + 1 = p \quad \alpha_1 = \frac{a_1}{a_2} \quad \alpha_2 = \frac{a_2}{a_0} \quad \cdots \quad \alpha_i = \frac{a_i}{a_0} \quad (1 \leq i \leq m)$$

El primer coeficiente A_o de F (x), lo obtenemos al hacer x = o en la expresión (4), de donde

$$(10) \qquad A_o = a_o^m$$

Identificando ahora los términos independientes en (7) y (8),

$$a_o A_1 = n\, a_1 A_o \quad \text{de donde} \quad A_1 = A_o \frac{a_1}{a_o} n = A_o \frac{a_1}{a_o} \frac{n+1-1}{1}$$

y considerando (9).

$$(11) \qquad A_1 = A_o \; \alpha_1 \frac{p-1}{1}$$

Analogamente, para calcular A_2 identificamos los coeficientes de "x" en (7) y (8), y considerando luego (9) tendremos sucesivamente

$$a_1 A_1 + 2 a_o A_2 = 2 n a_2 A_o + A_1 a_1 (n-1)$$

$$2 a_o A_2 = A_o a_2 2n + A_1 a_1 (n-1)$$

$$A_2 = A_o \frac{a_2}{a_o} \frac{2(n+1)-2}{2} + A_1 \frac{a_1}{a_o} \frac{(n+1)-2}{2}$$

$$(12) \qquad A_2 = A_o \; \alpha_2 \; 2p-2/2 + A_1 \alpha_1 \; p-2/2$$

Para calcular A_3 identificaremos los coeficientes de la potencia cuadrada de la variable,

$$a_2 A_1 / 2 a_1 A_2 + 3 a_o A_3 = 3 n a_3 A_o + 2n\, a_2 A_1 + n a_1 A_2$$

$$3 a_o A_3 = A_o a_3 3n + A_1 a_2 (2n-1) + A_2 a_1 (n-2)$$

$$A_3 = A_o \frac{a_3}{a_o} \frac{3(n+1)-3}{3} + A_1 \frac{a_2}{a_o} \frac{2(n+1)-3}{3} + A_2 \frac{a_1}{a_o} \frac{(n+1)-3}{3}$$

$$(13) \qquad A_3 = A_o \; \alpha_3 \frac{3p-3}{3} + A_1 \alpha_2 \frac{2p-3}{3} + A_2 \alpha_1 \frac{p-3}{3}$$

Vamos ahora a calcular el coeficiente general A_i de F (x); bastará identificar los coeficientes de la variable de exponente $\cancel{(i-1)}$.

$$a_{i-1} A_1 + 2 a_{i-2} A_2 + 3 a_{i-3} A_3 \ldots + (i-1)\, a_1 A_{i-1} +$$

$$i\, a_o A_1 = i n a_i A_o + (i-1) n a_{i-1} + (i-2) n a_{i-2} A_2 +$$

$$\ldots + 2 n a_2 A_{i-2} + n a_1 A_{i-1}$$

$$i a_o A_1 = A_o a_i i n + A_1 a_{i-1} \left[(i-1) n - 1\right] + A_2 a_{i-2} \left[(i-2)\right.$$

$$n-2] + \cdots A_{i-2}a_2\left[2-n(i-2)\,n-2\right] + A_{i-1}a_1\left[n-(i-1)\right]$$

$$A_i = A_o\frac{a_i}{a_o}\,\frac{i(n+1)-i}{i} + A_1\frac{a_{i-1}}{a_o}\,\frac{(i-1)(n+1)-i}{i} +$$

$$A_2\frac{a_{i-2}}{a}\,\frac{(i-2)(n+1)-i}{i} + A_{i-2}\frac{a_2}{a_o}\,\frac{2(n+1)-i}{i} +$$

$$A_{i-1}\frac{a_1}{a_o}\,\frac{(n+1)-i}{i}$$

ya que

$$(1-1)n-1 = in-n-1+i-i = (i-1)n + (i-1)-i = (i-1)$$

$$(n+1)-i\;(i-2)n-2 = (i-2)n-2+i-i = (i-2)n + (i-2)-i =$$

$$(i-2)(n+1)-i$$

y considerando (9), queda finalmente,

$$A_i = A_o\,\alpha_i\,\frac{ip-i}{i} + A_1\,\alpha_{i-1}\,\frac{(1-1)\,p-i}{i} + A_2\,\alpha_{i-2}$$

$$\frac{(i-2)\,p-i}{i} + A_{i-2}\,\alpha_2\,\frac{2p-i}{i} + A_{i-1}\,\alpha_1\,\frac{p-i}{i}$$

que nos da A_i en función de los "m" coeficientes anteriores, ya que para valores de "i" mayores que "m" los correspondientes "A" no existen. De la observación de (11), (12), (13) y (14) deducimos la fórmula que nos expresa el coeficiente general A_i

$$(15)\quad A_i = \sum_{h=o}^{h=i-1} A_h\,\alpha_{i-h}\,\frac{(i-h)\,p-i}{i}$$

Este proceso lo hemos realizado independientemente del valor del exponente "n". Cuando "n" es un número natural, $\left[f(x)\right]^n$ tendrá mn+l términos, luego la fórmula (15) para valores de i > mn+l los coeficientes A_i son nulos. Si el exponente "n" no fuera un número entero y positivo, entonces esta misma fórmula nos daría los sucesivos coeficientes del desarrollo en serie de f (x).

El desarrollo de las potencias naturales del binomio no es sino un caso particular del presente. La ley de formación de sus coeficientes, fórmula de Targaglia generalizada posteriormente por Newton para exponentes no enteros, es equivalente a la obtenida en (15) y particularizada para este caso.

En efecto, sea

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

$$F(x) = (a_0 + a_1 x)^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n$$

Aplicando la fórmula (15), los coeficientes serán

$$A_0 = a_0^m = \binom{n}{0} a_0^m$$

$$A_1 = A_0 \;,\; \frac{(n+1)-1}{2} = a_0^m \frac{a_1}{a_0} n\, a_0^{m-1} a_1 = \binom{n}{1} a_0^{m-1} a_1$$

$$A_2 = A_1 \;,\; \frac{(n+1)-2}{2} = a_0^{m-1} a_1 n \frac{a_1}{a_0} \frac{(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$a_0^{m-2} a_1^2 = \binom{n}{2} a_0^{m-2} a_1^2 .$$

Como aplicación del método expuesto, y dejando al lector el trabajo de obtener y comprobar los coeficientes, copiamos a continuación el resultado de elevar a la cuarta potencia un polinomio de cuarto grado.

$$(1 - 3x + 2x^2 + 4x^3 - x^4) = 1 - 12x + 62x^2 - 164x^3 + 173x^4$$
$$+ 204x^5 - 796x^6 + 588x^7 + 718x^8 - 1.284x^9 + 46x^{10} +$$
$$872x^{11} - 252x^{12} - 148x^{13} + 88x^{14} - 16x^{15} + x^{16}$$

En este caso, $p = 5$; $_4 = -1$; $_3 = 4$; $_2 = 2$; $_1 = -3$;) y aplicando la fórmula (15), un coeficiente cualquiera, por ejemplo el A_{11} se obtendrá en función de los cuatro anteriores, ya calculados, y de los datos conocidos del modo siguiente:

$$A_{11} = A_7 \alpha_4 \frac{4p-11}{11} + A_8 \alpha_3 \frac{3p-11}{11} + A_9 \alpha_2 \frac{2p-11}{11} + A_{10} \alpha_1$$

$$\frac{p-11}{11} = 588(-1) + 718(4)\frac{4}{11} + (-1.284)(2)\frac{-1}{11}$$

$$+ 46(-3)\frac{-6}{11} = \frac{1}{11}(-5392 + 11488 + 2568 + 828 =$$

$$\frac{9592}{11} = 872.$$

Como el desarrollo tiene mn=l términos, en nuestro caso 17, los coeficientes A_i para $i \geq 16$ se anulan. Por ejemplo,

$$A_{17} = A_{13}\alpha_4 \frac{4p-17}{17} + A_{14}\alpha_3 \frac{3p-17}{17} + A_{15}\alpha_2 \frac{2p-17}{17} +$$

$$A_{16}\alpha_1 \frac{p-17}{17} = (-148)(-1)\frac{3}{17} + 88 \cdot 4 \frac{-2}{17} + (-16)$$

$$2\frac{-7}{17} + 1(-3)\frac{-12}{17} = \frac{1}{17}(444 - 704 + 224 + 36) =$$

$$\frac{0}{17} = 0.$$

El procedimiento general expuesto mediante el empleo de la primera derivada del polinomio y los coeficientes indeterminados, ya se encuentra en sus líneas fundamentales, aunque con diversa notación y desarrollo, en los primeros escritos científicos de un matemático sudamericano, el doctor Federico Villarreal, publicados en el siglo pasado.

Sin embargo, su trabajo no es tan conocido como debiera serlo. Y es que, como en otros muchos campos, también en éste de las Matemáticas el méritc de nuestros valores intelectuales permanecía oculto, cuando no se hallaba incomprendido o asfixiado en un ambiente de indiferencia que afortunadamente va desapareciendo.

ALBERTO RODRIGUEZ S. I.

Granada, enero de 1957