SOLUCION DE PROBLEMAS

101. La condición necesaria y suficiente para que el producto de todos los divisores positivos de un número entero positivo $\underline{a}$ sea igual a a^2 es: o bien a es el producto de dos números primos diferentes, o bien a es el cubo de un número primo.

Solución : Llamemos D (a) el número de los divisores positivos del número entero positivo a. Por ejemplo: D(1), = 1 D(2) = 2, D(4) = 3, D(12) = 6, y en general si a tiene la descomposición en factores primos (*ver Vol. I., p. 33*),

$$a = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_r^{\gamma_r}$$

entonces,

$$(1) \qquad D(a) = (\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1) \ldots (\gamma_r + 1).$$

Sea ahora P(a) el producto de los divisores positivos del número entero positivo a ; en fórmula

$$P(a) = \prod_{d/a} d$$

Por ejemplo P(1) = 1, P(2) = 2, P(4) = 8, P(12) = 1728, y en general se tiene,

$$(2) \qquad P(a) = a^{\frac{D(a)}{2}}$$

En efecto, con d también a/d recorre todos los divisores de a y por consiguiente,

$$P(a)^2 = \left(\prod_{d/a} d\right)\left(\prod_{d/a} a/d\right) = \prod_{d/a} a = a^{D(a)}$$

Si ahora P(a) = a^2, de (2) resulta 2 = D(a)/2, o sea D(a) = 4. Poniendo este valor en (1) se ve que hay dos casos posibles:

1º $\quad r = 1 \quad \gamma_1 = 3 \qquad a = p^3$

2º $\quad r = 2 \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 1 \qquad a = pq$

(donde p y q son dos números primos diferentes).

Inversamente, si $a = p^3$, entonces,

$P(a) = 1 . p . p^2 . p^3 = p^6 = a^2$ y si $a = pq$ entonces,

$P(a) = 1 . p . q . pq = (pq)^2 = a^2$

Soluciones de : Olrac Icideref Asac, Heraldo Soto Matallana.

102. Demostrar :

$$\binom{n+k}{n}+\binom{n+k-1}{n}+\cdots+\binom{n}{n}=\binom{n+k+1}{n+1}$$

Soluciones : Se demuestra la fórmula por inducción sobre k. Para k = 0 la fórmula es cierta, ya que

$$\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}$$

Supongamos ahora que la fórmula sea cierta para un valor de k; entonces,

$$\binom{n+k+2}{n+1}=\binom{n+k+1}{n}+\binom{n+k+1}{n+1}=\binom{n+k+1}{n}+\binom{n+k}{n}$$

$$+\binom{n+k+1}{n}+\cdots+\binom{n}{n}$$

lo que demuestra plenamente la validez de la fórmula.

Joaquín Acosta Prieto.

Otras soluciones de : Astolfo Arias, Jaime Rocha R. Alvaro Rodríguez, Arturo Sánchez Weiss, Oscar Villa Moreno.

103. Sea a un número entero positivo y n un número entero no negativo Demostrar la identidad,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{a}{k}=(-1)^n\binom{a-1}{n}$$

Solución : Se demuestra la fórmula por inducción sobre n. Para n = 0 la fórmula es cierta, ya que,

$$\binom{a}{0}=\binom{a-1}{0}$$

Supongamos ahora que la fórmula sea cierta para un valor de n; entonces,

$$(-1)^{n+1}\binom{a-1}{n+1} =$$

$$(-1)^{n}\binom{a-1}{n} + \left\{(-1)^{n+1}\binom{a-1}{n+1} - (-1)^{n}\binom{a-1}{n}\right\} =$$

$$(-1)^{n}\binom{a-1}{n} + (-1)^{n+2}\left\{\binom{a-1}{n+1} + \binom{a-1}{n}\right\} =$$

$$(-1)^{n}\binom{a-1}{n} + (-1)^{n+1}\binom{a}{n+1} =$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{a}{k} + (-1)^{n+1}\binom{a}{n+1} =$$

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{k}\binom{a}{k}$$

lo que demuestra plenamente la validez de la fórmula.

Joaquín Acosta Prieto.

Observación. Recordamos que un coeficiente binominal.

$$\binom{n}{k}$$

vale cero si $n < k$. En el caso de $a=n$ la fórmula demostrada arriba se reduce a la fórmula muy conocida

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k} = 0$$

Otras soluciones de : Ignacio Arango Dávila, Astolfo Arias, Jaime Rocha R., Arturo Sánchez Weiss, Oscar Villa Moreno.

104. Sea $\underline{a}$ un número entero positivo y $\underline{m}$ un número impar positivo. Demostrar que

$$\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{k}\binom{a}{k} \geqslant 0$$

1a. solución: Poniendo n = m-l en la fórmula del problema anterior, se ve que el segundo miembro es no negativo, ya que m-l es par.

Joaquín Acosta Prieto.

2a. solución: Los coeficientes binomiales

$$\binom{a}{k}$$

$P \leq k \leq a$, crecen hasta la mitad (*véase Vol. II, P. 30*) y después decrecen. Luego tenemos los casos siguientes:

1º. $m-l \leq a/2$; en este caso la suma es positiva ya que el último término lo es;

2º. $m-l \geq a$; en este caso la suma vale $(1-1)^{a} = 0$

3º. $a/2 < m-l < a$; en este caso

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{a}{k} = -\sum_{k=m}^{a} (-1)^k \binom{a}{k} = \sum_{k=m}^{a} (-1)^{k+1} \binom{a}{k}$$

En la última suma el primer término es positivo, los términos tienen signos alternados y decrecen en valor absoluto. Por consiguiente la suma es positiva.

Otras soluciones de: ***Astolfo Arias, Jaime Rocha, Arturo Sánchez Weiss, Oscar Villa Moreno.***

105. Sea u(r, s) (r, s = 0, 1, 2,...) una sucesión doble de números. Demostrar la relación (1)

$$\sum_{k+l=n} \binom{n}{k} u(r+2k, s+2l) = \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} \Big\{ u(r+2(n-p), s+2p) + u(r+2(n-p), s+2(p+1)) \Big\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(1) Por razones tipográficas se ha cambiado la notación. Esta proposición se encuentra en el trabajo de I. M. Sheffer: A class of funtions related to harmonic functions, Duke Mathematical Journal 21, (1954) pp. 479-489, donde se utiliza para generalizar el concepto de función armónica.

Solución:

$$\sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} \Big\{ u(r+2(n-p), s+2p) + u+2(n-p-1), s+2(p+1) \Big\} = \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} u(r+2(n-p), s+2p + \sum_{p=1}^{n} \binom{n-1}{p-1}$$

$$u(r+2(n-p), s+2p = \sum_{p=p}^{n} \Big\{ \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \Big\}$$

$$u(r+2(n-p), s+2p) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} u(r+2(n-p), s+2p)$$

Poniendo ahora $p=1, n-p=k$ la última expresión vale

$$\sum_{k+1=n} \binom{n}{k} u(r+2k, s+21).$$

Oscar Villa Moreno.

Otras soluciones: Joaquín Acosta Prieto, Astolfo Arias, Jaime Rocha, Alvaro Rodríguez, Arturo Sánchez Weiss.

106. Sea un triángulo ABC, cuyos vértices están en una circunferencia de centro O y radio r. Se designan AA', BB', CC', las alturas, por M, N, P, los puntos medios respectivos de los lados BC, CA, AB. Las alturas se cort an en el ortocentro H y las medianas AM, BN, CP en el centro de gravedad G. Se prolonga AO hasta el punto D diametralmente opuesto a A.

a) Hallar el carácter del cuadrilátero HCDB.

b) Mostrar que AM es una mediana del triángulo AHD y que G es también centro de gravedad de este triángulo.

c) Deducir de lo anterior que O, G, H están en línea recta y que OG es un tercio de OH.

d) Sean X, Y, Z los puntos medios respectivos de HA, HB, HC.

e) Mostrar que el segmento XM tiene el mismo punto medio I que OH y que XM = r.

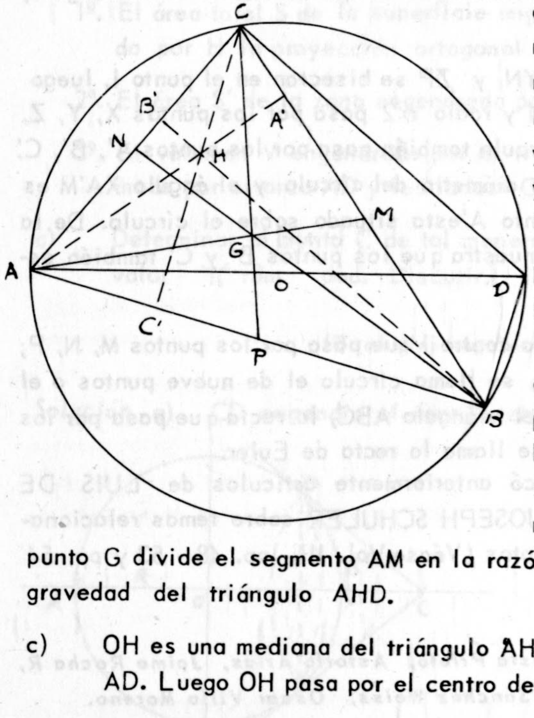
f) Estudiar el carácter del cuadrilátero MNXY y demostrar que XM = YN = ZP.

g) Por dónde pasa el círculo de centro I y de radio r/2 y por qué?

Alumnos del 4º. año del Liceo Francés

Solución.

a) HCDB es un paralegrolamo. En efecto, OC' es perpendicular a AD por construcción y DB es perpendicular a AB, ya que AD es un diámetro. Luego CH es paralelo a DB. De la misma manera BB' es perpendicular a AC por construcción y CD es perpendicular a AC, ya que AD es un diámetro; luego BH es paralelo a DC.



b) Las diagonales BC y HD del paralelogramo HCDB se cortan en sus puntos medios. Puesto que M es el punto medio de BC, también lo es de HD y por consiguiente AM es una mediana del triángulo AHD. El punto G divide el segmento AM en la razón 2 : 1, siendo G centro de gravedad del triángulo AHD.

c) OH es una mediana del triángulo AHD ya que es punto medio de AD. Luego OH pasa por el centro de gravedad G y OG:OH = 1:3.

d) Puesto que OM une los dos puntos medios de los lados HD y AD del triángulo AHD, se tiene 2OM = AH, o sea OM = HX. Por otro lado, XH es paralelo a OM, ya que O y M son puntos medios de los lados AD y HD del triángulo AHD.

e) El cuadrilátero XHMO es un paralelogramo, ya que tiene los lados XH y MO paralelos e iguales. Por consiguiente sus diagonales XM y OH se cortan en sus puntos medios, que es I. Puesto que X y M son puntos medios de los lados AH y DH del triángulo AHD, se tiene 2XM = AD = 2r o sea XM = r.

f) MNXY es un rectángulo. En efecto, XY es paralelo a AB, ya que X y Y son los puntos medios de los lados AH y BH del triángulo ABH; MN es paralelo a AB, ya que M y N son los puntos medios de los lados AC y BC del triángulo ABC, NX es paralelo a CH, ya que N y X son los puntos medios de los lados CA y HA del triángulo CAH; MY es paralelo a CH, ya que M y Y son los puntos medios de los lados CB y HB del triángulo CBH. Puesto que CH es perpendicular a AB, la afirmación queda demostrada.

Por consiguiente, XM = YN, siendo las dos diagonales del rectángulo. De la msima manera se ve que MPXZ es un rectángulo, de donde XM = ZP.

g) Los segmentos XM YN y ZP se bisectan en el punto I, luego el círculo de centro I y radio r/2 pasa por los puntos X, Y, Z, M, N, P. Pero ese círculo también pasa por los puntos A', B', C'. En efecto, XM es un diámetro del círculo y el ángulo XA'M es recto. Luego del punto A'esta situado sobre el círculo. De la misma manera se demuestra que los puntos B' y C' también están sobre el círculo.

Observación.- El círculo de centro I que pasa por los puntos M, N, P; A', B', C'; Z, Y, Z, se llama círculo el de nueve puntos o el círculo de EULER del triángulo ABC, la recta que pasa por los puntos H, I, G, O, se llama la recta de Euler.

Esta Revista publicó anteriormente artículos de LUIS DE GREIFF BRAVO y JOSEPH SCHULER sobre temas relacionados con estos conceptos (Véase.Vol. III., pp. 48 - 53 y pp. 54 y 61)

***Soluciones de:* Joaquín Acosta Prieto, Astolfo Arias, Jaime Rocha R, Alvaro Rodríguez, Arturo Sánchez Weiss, Osaar Villa Moreno.**

107. Se da una semi - circunferencia de centro O y diámetro AB = 2R. De un punto C situado sobre la semirecta OX que pasa por A se traza la tangente CD a la semicircunferencia.

Se pone OC = X y se considera la figura engendrada por rotación alrededor de AB.

a) Cuál es la superficie engendrada por CD ? Indicar el lugar de sus puntos de contacto con la esfera de diámetro AB.

b) Calcular en función de R y X :

1º. El área total S de la superficie engendrada por CDH (designando por H la proyección ortogonal de D sobre OA) ;

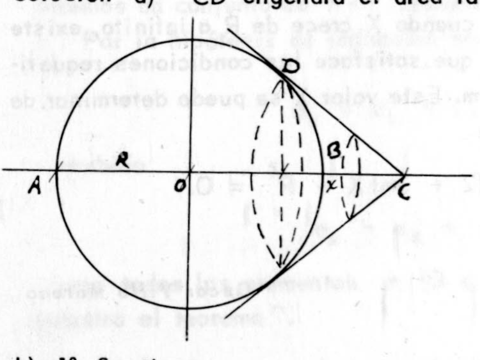
2º. El área S' de la zona engendrada por el arco AD ;

3º. El volumen V engendrado por el triángulo mixtilíneo ACD (formado por el arco AD y los lados CD y AC).

c) Determinar el punto C de tal manera que el volumen V tenga un valor π r3m dad. Discutir.

(Bachillerato, 1a. parte, Lyon, Francia 1951).

Solución a) CD engendra el área lateral de un cono que toca la esfera de diámetro AB en los puntos del círculo de radio DH, donde H es la proyección ortogonal de D sobre OA. Se tiene :



DH : OD = DC : OC

o sea :

$$DH = R\sqrt{x^2 - R^2}/x.$$

b) 1º. Se tiene :

$$S = \quad .DH + \quad .DH.DC. = \quad (x^2 - r^2)(R^2 / x^2 + r^2/x).$$

2º. Tenemos

$$OH : OD = OD : OC$$

de donde

$$OH = R^2 / X$$

y

$$HA = R\,)1 - R/X).$$

Luego

$$S' = 2 \quad R.HA = \text{''} \quad R^2\,(1 - R/X).$$

3º. Se tiene $V = V_1 - V_2$, donde V_1 es el volumen del cono engendrado por CDH y V_2 es el volumen del casquete engendrado por el arco AD. Ahora bien,

$$V_1 = 1/3 \quad DH^2 . HC = \frac{\pi}{3}\frac{R^2}{X^3}\left(X^2 - R^2\right)^2$$

$$V_2 = 1/3 \quad \pi HA^2\left(3R - HA\right) = \frac{\pi}{3}\frac{R^2}{X^3}\left(2RX + R^2\right)$$

Por consiguiente,

$$V = \frac{\pi}{3}\frac{R^2}{X^3}\left(X - R\right)^2$$

c) Se necesita determinar el valor X tal que se tenga

$$Rm = (X - R)^2 / 3X$$

y además X debe estar entre R e infinito. Puesto que la función

$$Y = (X - R)^2 / 3X$$

crece de cero a infinito cuando X crece de R a infinito, existe exactamente un valor X que satisface las condiciones requeridas, cualquiera que sea m. Este valor X se puede determinar de la ecuación cuadrática

$$X^2 - R\,(2 + 3m)\,X + R^2 = 0.$$

Oscar Villa Moreno