NOTA SOBRE LA INDETERMINACION 0^0

por

LUIS IGNACIO SORIANO

Los cursos elementales de cálculo presentan una serie de ejercicios de la indeterminación lim de $f(x)^{g(x)}$ cuando $f(x)$ y $g(x)$ tienden a cero simultáneamente para un valor a de la variable, y el resultado de hallar el límite de esta expresión casi siempre es 1.

El objeto de la presente nota es demostrar que a este resultado se llega siempre que $f(x)$ y $g(x)$ cumplan ciertas condiciones.

Supondremos que $f(x) > 0$ cuando $a - \delta < x < a + \delta$ excepto para $x = a$ en donde se tendrá $f(a) = 0$.

Sea $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$; $g(a) = 0$ y tales que existan dos números positivos m, n para los que

$$C \begin{cases} \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{|x-a|^n} = A \quad (\text{ A finito y diferente de cero }) \\ \\ \lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{|x-a|^m} = B \quad (\text{ B finito }) \end{cases}$$

Cuando se cumplan las condiciones C se tendrá siempre $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = 1$

En efecto la expresión $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{|x-a|^m}$ podemos escribirla en la forma $\dfrac{f(x)}{|x-a|^m} = A + \varepsilon$ siendo ε una variable que tiende a 0 cuando x tiende a a

Igualmente $\dfrac{g(x)}{|x-a|^m} = B + \varepsilon_1$ expresión en la que $\varepsilon_1 \to 0$ cuando $x \to a$

Consideremos la expresión :

$y = f(x)^{g(x)}$ que para $x = a$ se presenta en la forma 0^0

Tomando logaritmos

$$\log y = g(x) \log f(x) = |x-a|^m (B + \varepsilon_1) \log \left\{ |x-a|^n (A + \varepsilon) \right\}$$

$$\log y = (B + \varepsilon_1) \left\{ n\, |x-a|^m \log |x-a| + |x-a|^n \log (A + \varepsilon) \right\}$$

Recordando que $\lim\limits_{z \to 0} z^n \log z = 0$ tendremos

$$\lim_{x \to a} \log y = \lim_{x \to a} (B + \varepsilon_1) \left\{ \lim_{x \to a} n \, | x - a |^n \log | x - a | + \lim_{x \to a} | x - a |^m \log (A + \varepsilon) \right\}$$

o sea

$$\lim_{x \to a} \log y : B \left\{ 0 + 0 \log A \right\} = 0$$

de donde

$$y = 1$$

Cuando las condiciones C no se cumplen la expresión $f(x)^{g(x)}$ puede tender a un límite diferente de 1 como lo muestra el siguiente ejemplo $y = f(x)^{\frac{\psi(x) + \log \alpha}{\log f(x)}}$ (α arbitrario).

en la que $\psi(0) = 0 = \lim\limits_{x \to a} \psi(x)$

$$f(0) = \lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad g(0) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

se tiene $\log y = \dfrac{\psi(x) + \log \alpha}{\log f(x)} \log f(x) = \psi(x) + \log \alpha$

$$\lim_{x \to a} \log y = \log \alpha$$

de donde $y = \alpha$

Con este ejemplo no se cumplen las condiciones C como vamos a verlo

Si $\lim \dfrac{f(x)}{|x - a|^n}$ no es para algún N igual a A, siendo A finito y diferente de cero es claro que no se cumple la 1a. condición C .

Si $\lim \dfrac{f(x)}{|x - a|^n} = A$ (A finito y diferente de cero) veremos que no se cumpla la 2a. de las condiciones C. En efecto para todo $m > 0$ se tendrá

$$\frac{g(x)}{|x - a|^m} = \frac{\psi(x) + \log \alpha}{|x - a|^m \log f(x)}$$

De aquí deducimos

$$\frac{g(x)}{|x-a|^m} = \frac{\psi(x) + \log \alpha}{|x-a|^m \log \{ |x-a|^n \ (A + \varepsilon) \}}$$

$$= \frac{\psi(x) + \log \alpha}{|x-a|^m \{ n \log |x-a| + \log (A + \varepsilon) \}}$$

$$= \frac{\psi(x) + \log \alpha}{n |x-a|^m \log |x-a| + |x-a|^m \log (A + \varepsilon)}$$

Cuando x tiende a a el numerador de la expresión anterior tiende a $\log \alpha$ y el denominador tiende a cero cualquiera que sea m. Por consiguiente no se cumple la segunda de las condiciones C

Sinembargo pueden no cumplirse las condiciones C y el límite de $f(x)^{g(x)}$ puede ser 1, como lo muestra el siguie nte ejemplo:

Sea $f(x)$ la función conocida con el nombre de función de Cauchy que esi igual a cero para $x = 0$ e igual e^{-1/x^2} para $x \neq 0$

Para $g(x)$ tomemos $g(x) = x^3$

Entonces $y = \left[e^{-1/x^2}\right]^{x^3}$ se presenta en la forma 0^0

Cuando $x = 0$ Pero por otra parte $y = e^{-x}$ que tiende a 1 cuando $x \to 0$

Con este ejemplo puede verse fácilmente que la función $\frac{e^{-1/x^2}}{x^m}$ tiende a cero con x cualquiera que sea m.

Otros ejemplos pueden encontrarse en : *"Differential and Integral Calculus by Edmund Landau". Chelsea Publishing Company New York 1951 y en "Unified Calculus and Analytic Geometry by Earl D. Rainville". The Mac Millan Company New York 1961.*