# APLICACIONES DE LAS FUNCIONES DE MATHIEU

## Conducción del Calor en los Alrededores de un Alambre de Longitud Infinita

YU TAKEUCHI

Se considera un flujo uniforme y estacionario de un líquido dentro del cual se coloca verticalmente un alambre calentado de longitud infinita. Como el flujo es uniforme y la longitud del alambre es infinita, este problema puede estudiarse en dos dimensiones. Sea $\mathbf{V}=(u, v)$ el vector de la velocidad del líquido en un punto $(x, y)$ y $T$ la temperatura en el mismo punto. La ecuación de conducción del calor es

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{k}{c\rho}\left\{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right\} \tag{1}$$

donde $k$ es el coeficiente de conducción del calor, $c$ es la capacidad calorífica y $\rho$ es la densidad del líquido. En la ecuación (1) el primer miembro representa la convección debido a la traslación del líquido y el segundo miembro representa la conducción del calor. Para mayor facilidad, se supone que el flujo es "sin vórtice" y el líquido es "perfecto", a saber, el líquido no es viscoso. Entonces existe el potencial de velocidad $\phi$ :

$$\mathbf{V} = \operatorname{grad} \phi \qquad \left( u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \tag{2}$$

Sea

$$T = e^{\beta\phi} w \qquad ( \beta = c\rho / 2k ) \tag{3}$$

entonces teniendo en cuenta $\Delta \phi = 0$, la ecuación (1) puede escribirse bajo la forma siguiente :

$$\Delta w = \beta^2 \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 \right\} w \tag{4}$$

Haciendo el cambio de variable

$$x = r \cos \theta \quad , \qquad y = r \operatorname{sen} \theta$$

la ecuación (4) se convierte en:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \beta^2\left\{\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)^2\right\} \tag{5}$$

Si $\varepsilon$ es el radio del alambre y además se toma la dirección del flujo como eje x, entonces se sabe que el potencial de la velocidad de un líquido perfecto tiene la forma:

$$\phi = U \left\{ r + \frac{\varepsilon^2}{r} \right\} \cos\theta \tag{6}$$

Reemplazando (6) en el segundo miembro de (5), se tiene:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = U^2\beta^2\left\{1 + \frac{\varepsilon^4}{r^4} - \frac{2\varepsilon^2}{r^2}\cos 2\theta\right\} \tag{7}$$

Supongamos ahora que $w(r, \theta)$ sea el producto de una función de r y una función de $\theta$ :

$$w(r, \theta) = R(r)\,\Theta(\theta) \tag{8}$$

Derivando (8) y reemplazando en (7) se obtiene:

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} - \beta^2 U^2\left(r^2 + \frac{\varepsilon^4}{r^2}\right) = -\frac{\Theta''}{\Theta} - 2\beta^2\varepsilon^2 U^2\cos 2\theta \tag{9}$$

El primer miembro de (9) es una función solamente de r y el segundo miembro es una función solamente de $\theta$ , por tanto ambos miembros de (9) deben ser iguales a una constante (a), entonces se obtienen las siguientes ecuaciones :

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + (a + 2q\cos 2\theta)\,\Theta = 0 \tag{10}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \left(\beta^2 U^2 + \frac{a}{r^2} + \frac{\beta^2 U^2 \varepsilon^2}{r^4}\right)R = 0 \tag{11}$$

en donde

$$q = \beta^2\varepsilon^2 U^2 \tag{12}$$

En la ecuación (11), haciendo el cambio de variable:

$$r = \varepsilon\, e^{z} \tag{13}$$

se obtiene la siguiente ecuación :

$$\frac{d^2R}{dz^2} - (a + 2q\cosh 2z)\, R = 0 \qquad (14)$$

Como la temperatura del líquido es una función unívoca y además simétrica con respecto al eje x, $\Theta(\theta)$ debe ser una función par y periódica cuyo periodo es $2\pi$. Para que satisfaga esta condición a no puede tomar un valor cualquiera sino que debe tomar el valor propio de la ecuación (10) :

$$a = a_n\,(-q) \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ ) \qquad (15)$$

y la solución correspondiente de (10) es :

$$\Theta(\theta) = ce_n\ (\theta, -q) \qquad (16)$$

donde $ce_n\,(\theta, -q)$ es la "Función de Mathieu" del tipo coseno de orden n. (Apéndice 1)

Para mayor sencillez puede suponerse que la temperatura T tiende a cero cuando r tiende a infinito, a saber,

$$R \to 0 \qquad \text{, cuando} \qquad Z \longrightarrow \infty \qquad (17)$$

La solución de la ecuación (14) que satisface la condición (17) es :

$$R(r) = Me_n^{(1)}(z, -q) = Ce_n(z, -q) + i\ Fey_n(z, -q) \qquad (18)$$

en donde $Ce_n$, $Fey_n$ son las "Funciones de Mathieu de segunda clase". (Apéndice 2 )

De (16), (18) y (8) se obtiene la solución de este problema :

$$\omega(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, Me_n^{(1)}(z, -q)\, ce_n(\theta, -q) \qquad (19)$$

o bien

$$T(r, \theta) = e^{\beta U(r + \frac{\varepsilon^2}{r})\cos\theta} \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, Me_n^{(1)}(z, -q)\, ce_n(\theta, -q) \qquad (20)$$

donde q, z son dados por (12)y (13) respectivamente y $A_n$ (n = 0, 1, 2,...) son constantes cuyos valores se deben determinar por la condición de la superficie del alambre, a saber, la condición de frontera .

Por ejemplo si se supone que la temperatura del líquido sobre la superficie del alambre es igual a la temperatura del alambre, $T_0$ (constante), entonces se obtiene :

$$T(r, \theta) = T_0 \quad \text{cuando} \quad r = \varepsilon \tag{21}$$

o bien

$$T(z, \theta) = T_0 \quad \text{cuando} \quad z = 0 \tag{22}$$

Por tanto de (20) se obtiene :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n Me_n^{(1)}(0,-q)\, ce_n(\theta,-q) = T_0\, e^{-2\beta U\varepsilon \cos\theta} \tag{23}$$

Teniendo en cuenta el desarrollo de exp. ($-2\beta U\varepsilon \cos\theta$) en serie de funciones de Mathieu ( Apéndice 3 ) se obtienen los valores de $A_n$ ( n = 0, 1, 2, . . . ) :

$$A_{2m} = \frac{2T_0 \{ce_{2m}(0,-q)\}^2}{p_{2m}\, Me_{2m}^{(1)}(0,-q)}$$

$$A_{2m+1} = \frac{2T_0 \{ce_{2m+1}(0,-q)\}^2}{s_{2m+1}\, Me_{2m+1}^{(1)}(0,-q)} \tag{24}$$

donde $p_{2m}$, $s_{2m+1}$ son constantes cuyos valores se darán en el Apéndice 2 .

Como el alambre está calentado, éste irradia el calor al líquido. La cantidad del calor que sale del alambre es (por área unitaria en un tiempo unitario ) :

$$\left\{ \int_0^{2\pi} -k\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=\varepsilon} \varepsilon\, d\theta \right\} \Big/ 2\pi\varepsilon \tag{25}$$

Se supone que esta cantidad del calor es proporcional a la diferencia de la temperatura del alambre y el líquido alejado, entonces se obtiene :

$$\left\{ \int_0^{2\pi} -k\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=\varepsilon} \varepsilon\, d\theta \right\} / 2\pi\varepsilon = \alpha T_0 \tag{26}$$

El factor de proporcionalidad $\alpha$ es llamado "coeficiente de transmisión del calor por área unitaria". De (20) se obtiene :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} e^{2\beta U \varepsilon \cos\theta} \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, Me_n^{(1)\prime}(0,-q)\, ce_n(\theta,-q) \tag{27}$$

Substituyendo (27) y los valores de $A_n$ dados anteriormente en la expresión (26), se obtiene el valor de $\alpha$ : (Apéndice 4)

$$\alpha = \frac{2k}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -\frac{\{ce_{2n}(0)\}^4}{(P_{2n})^2} \frac{Me_{2n}^{(1)\prime}(0,-q)}{Me_{2n}^{(1)}(0,-q)} \right.$$

$$\left. + \frac{\{ce_{2n+1}(0)\}^4}{(s_{2n+1})^2} \frac{Me_{2n+1}^{(1)\prime}(0,-q)}{Me_{2n+1}^{(1)}(0,-q)} \right] \tag{28}$$

Por ejemplo, en el caso en que el líquido es aire, los valores de c, $\rho$ , k son

$c = 0.24$ cal/g. deg., $\rho = 1.25 \times 10^{-3}$ g./cm³

$k = 5.5 \times 10^{-5}$ cal/cm. seg. deg.

entonces

$$\beta = 2.72 \text{ seg./cm}^2$$

Si $\beta\varepsilon U = 1$, ) por ejemplo $\varepsilon = 0.01$ cm, $U = 3.67$ m/seg. ) de (20) se obtiene :

$$T(r,\theta) = \frac{T_0}{\sqrt{r/\varepsilon}} \exp\left\{ \frac{\varepsilon}{r} \cos\theta - (1-\cos\theta)\frac{r}{\varepsilon} \right\} \times \Big\{ 8.295$$

$$- 9.149 \cos\theta + 4.360 \cos 2\theta - 1.018 \cos 3\theta + 0.269 \cos 4\theta$$

$$- 0.041 \cos 5\theta + 0.007 \cos 6\theta - \ldots \tag{29}$$

En la figura 1 aparecen las isotermas. En la figura 2 aparece la gráfica de $\alpha$ como función de q, es decir, la función de U. Para la comparación, también aparece la gráfica de $0.53\sqrt{\varepsilon\beta U}$ ( el factor 0.53 se ha tomado por conveniencia para que dos curvas se coincidan en $\beta\varepsilon U = 1.5$ ).

## APENDICE 1.

La ecuación (10)

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + (a + 2q\cos 2\theta)\Theta = 0 \qquad (10)$$

se llama "Ecuación de Mathieu". Si no existiera q, sus soluciones serían

$$\cos\sqrt{a}\,\theta \quad , \qquad \text{sen}\sqrt{a}\,\theta \qquad (30)$$

Para que satisfagan las condiciones enunciadas (solución periódica cuyo periodo es $2\pi$ ) el valor de a son:

$$a = n^2 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

En general la ecuación (10) tiene solución periódica si sólo si a toma el valor adecuado :

$$a = a_n(-q) \quad , n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (31)$$

$$a = b_n(-q) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (32)$$

Las soluciones correspondientes son :

$$\Theta(\theta) = ce_n(\theta, -q) \text{ (solución par)} \qquad (33)$$

$$\Theta(\theta) = se_n(\theta, -q) \text{ (solución impar)} \qquad (34)$$

Si q tiende a cero, $a_n(-q)$ y $b_n(-q)$ tienden a $n^2$, y

$$ce_n(\theta, -q) \longrightarrow \cos n\theta$$

$$(q \longrightarrow 0)$$

$$se_n(\theta, -q) \longrightarrow \text{sen}\, n\theta$$

Como $ce_n(\theta, -q)$ es una función periódica, puede desarrollarse en serie de Fourier como sigue :

$$ce_{2m}(\theta, -q) = (-1)^m \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{2m} \cos 2r\theta \qquad (35)$$

$$ce_{2m+1}(\theta, -q) = (-1)^m \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r}^{2m+1} \cos(2r+1)\theta \qquad (36)$$

Estas funciones también pueden desarrollarse por medio de las funciones de Bessel como sigue. Comparando las siguientes igualdades :

$(h = \sqrt{q})$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} J_{2r}(2h \operatorname{sen}\theta) + 2q\cos 2\theta \; J_{2r}(2h \operatorname{sen}\theta)$$
$$= q\left\{ J_{2r-2}(2h \operatorname{sen}\theta) + J_{2r+2}(2h \operatorname{sen}\theta)\right\} - 4r^2 J_{2r}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}(\cos 2r\theta) + 2q\cos 2\theta\,(\cos 2r\theta) \tag{37}$$
$$= q\left\{\cos(2r-2)\theta + \cos(2r+2)\theta\right\} - 4r^2\cos 2r\theta$$

se puede comprobar facilmente que el siguiente desarrollo :

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \; A_{2r}^{2m} \; J_{2r}(2h \operatorname{sen}\theta) \tag{39}$$

satisface la misma ecuación de $ce_{2m}(\theta, -q)$ :

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + (a_{2m} + 2q\cos\theta)\,\Theta = 0$$

Por esto

$$ce_{2m}(\theta, -q) = E_{2m} \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r}^{2m} J_{2r}(2h \operatorname{sen}\theta) \tag{40}$$

donde $E_{2m}$ es una constante. Si $\theta = 0$ en (40), se obtiene :

$$ce_{2m}(0, -q) = E_{2m} A_0^{2m}$$

o bien

$$E_{2m} = ce_{2m}(0) / A_0^{2m} \tag{41}$$

De la misma manera puede obtenerse la otra expresión de $ce_{2m+1}(\theta, -q)$ por medio de las funciones de Bessel.

## A P E N D I C E 2.

La ecuación (14)

$$\frac{d^2R}{dz^2} - \left\{ a + 2q\cosh 2z \right\} R = 0 \tag{14}$$

puede convertirse en la ecuación de Mathieu (10) si se hace el cambio de variable $z = i\theta$ . Por esto una solución de (14) es

$$R(z) = ce_n(iz, -q) = Ce_n(z, -q) \tag{42}$$

De (40) se obtiene :

$$Ce_{2m}(z,-q) = E_{2m} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{2m} J_{2r}(2ih \operatorname{senh} z) \quad (43)$$

Pero como cualquier función cilíndrica (función que satisface la ecuación de Bessel) satisface la relación (37), la siguiente expresión :

$$Fey_{2m}(2,-q) = E_{2m} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{2m} Y_{2r}(2ih \operatorname{senh} z) \quad (44)$$

es también una solución de (14) para $a = a_{2m}(-q)$. De la misma manera puede definirse $Fey_{2m+1}$.

Sumando (43) y (44) se obtiene

$$Me_{2m}^{(1)} = Ce_{2m} + i\,Fey_{2m} = E_{2m} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{2m} (J_{2r} + i Y_{2r})$$

$$= E_{2m} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{2m} H_{2r}^{(1)}(2ih \operatorname{senh} z) \quad (45)$$

Pero como se sabe que

$$H_{2r}^{(1)}(2ih \operatorname{senh} z) \sim -i(-1)^r \sqrt{\frac{2}{\pi h e^z}} \exp.\{-he^z\} \qquad (Z \longrightarrow \infty)$$

se obtiene el siguiente desarrollo asintótico :

$$Me_{2m}^{(1)}(z) \sim -i\sqrt{\frac{2}{\pi h e^z}}\, E_{2m} \exp.\{-he^z\} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{2m} \qquad (Z \longrightarrow \infty)$$

o bien

$$Me_{2m}^{(1)}(z) \sim \frac{2iP_{2m}}{\sqrt{2\pi\beta r U}} e^{-\beta U r} \qquad (r \to \infty) \quad (46)$$

donde

$$P_{2m} = (-1)^m ce_{2m}(0,-q)\, ce_{2m}(\tfrac{\pi}{2},-q) / A_0^{2m}$$

De la misma manera puede obtenerse el desarrollo asintótico de $Me_{2m+1}^{(1)}(z)$ :

$$Me_{2m+1}^{(1)}(z) \sim - \frac{2i\, s_{2m+1}}{\sqrt{2\pi\beta r U}} e^{-\beta U r} \qquad (r \to \infty) \quad (47)$$

donde

$$s_{2m+1} = (-1)^m ce_{2m+1}(0,-q)\, ce'_{2m+1}(\tfrac{\pi}{2},-q) / h B_1^{2m+1}$$

## APENDICE 3.

$$e^{-2h\cos\theta} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{P_{2n}}\{ce_{2n}(0)\}^2 ce_{2n}(\theta,-q)$$

$$+\frac{1}{S_{2n+1}}\{ce_{2n+1}(0)\}^2 ce_{2n+1}(\theta,-q)\Big] \quad (48)$$

## APENDICE 4.

En la expresión (48) si se reemplaza $\pi-\theta$ en el puesto de $\theta$ se obtiene :

$$e^{2h\cos\theta} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{P_{2n}}\{ce_{2n}(0)\}^2 ce_{2n}(\pi-\theta,-q)$$

$$+\frac{1}{S_{2n+1}}\{ce_{2n+1}(0)\}^2 ce_{2n+1}(\pi-\theta,-q)\Big]$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{P_{2n}}\{ce_{2n}(0)\}^2 ce_{2n}(\theta,-q) - \frac{1}{S_{2n+1}}\{ce_{2n+1}(0)\}^2 ce_{2n+1}(\theta,-q)\Big] \quad (49)$$

Utilizando la ortonormalidad de $ce_n(\theta, -q)$ $(n = 0, 1, \ldots)$

$$\int_0^{2\pi} ce_n(\theta,-q)\, ce_l(\theta,-q)\, d\theta = 0 \qquad n \neq l$$

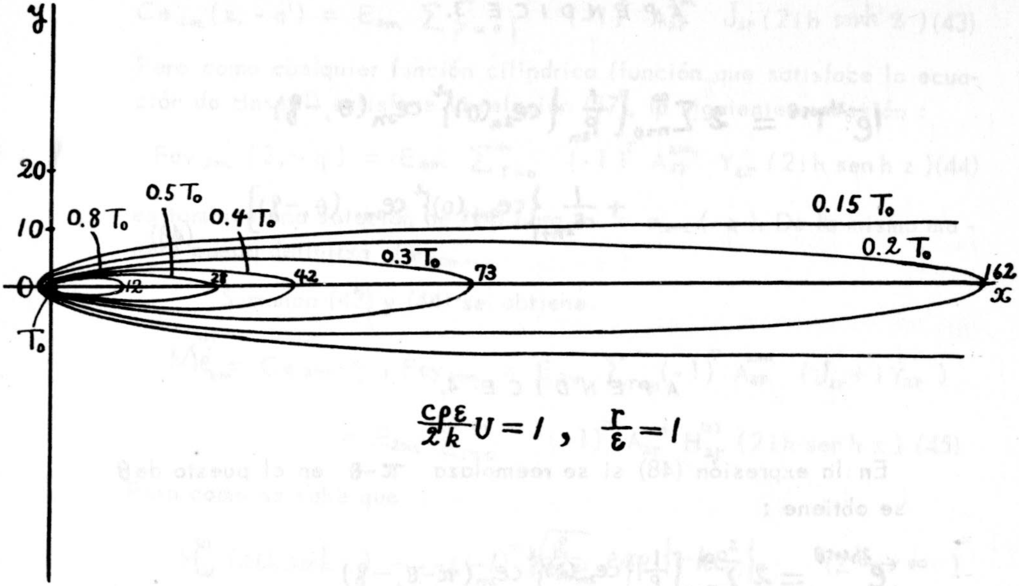
$$= \pi \qquad n = l \quad (50)$$

de (49) se obtiene :

$$\int_0^{2\pi} e^{2h\cos\theta} ce_{2n}(\theta,-q)\, d\theta = 2\pi\,\{ce_{2n}(0)\}^2 / P_{2n}$$

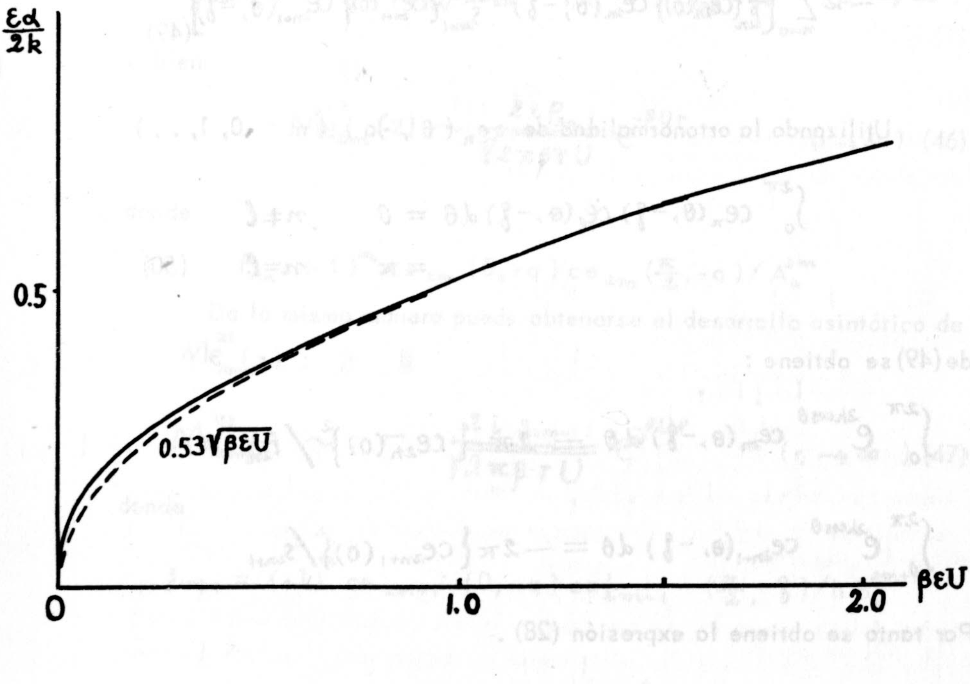
$$\int_0^{2\pi} e^{2h\cos\theta} ce_{2n+1}(\theta,-q)\, d\theta = -2\pi\{ce_{2n+1}(0)\}^2 / S_{2n+1}$$

Por tanto se obtiene la expresión (28) .



y
20
10
0
$T_0$
$0.8\,T_0$
$0.5\,T_0$
$0.4\,T_0$
$0.3\,T_0$
$0.15\,T_0$
$0.2\,T_0$
12
21
42
73
162
x
$\frac{c\rho\varepsilon}{2k}U = 1\ ,\ \ \frac{r}{\varepsilon} = 1$


Fig. 1



$\frac{\varepsilon d}{2k}$
0.5
0
1.0
2.0
$\beta\varepsilon U$
$0.53\sqrt{\beta\varepsilon U}$


Fig. 2