# " INTEGRACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE EULER (CAUCHY) Y LEGENDRE POR EL METODO DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS "

por

JUAN PEDRO JACOBSEN H.

## INTEGRACION DE LA ECUACION DE EULER (Cauchy)

El método que vamos a ilustrar, también es aplicable a la ecuación de Legendre, o sea que en general, se aplica a las ecuaciones diferenciales de la forma :

$$(ax+b)^n\frac{d^n y}{dx^n} + (ax+b)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + (ax+b)\frac{dy}{dx} + y = f(x)$$

El método utilizado generalmente, para integrar las ecuaciones de este tipo, consiste en hacer el cambio de variable: $ax + b = e^z$ con lo cual se logra obtener una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, la cual se integra por medio del método de los operadores, o por "variación de los parámetros". Después de obtenida la ecuación general, tendremos que volver a reemplazar a $\underline{z}$ por log $(ax + b)$, para volver a las condiciones originales del problema.

Lo descrito anteriormente es por lo general muy laborioso, por lo cual, presentamos aquí un nuevo método, que se podría llamar :

**"INTEGRACION DE LAS ECUACIONES DE EULER (Cauchy) Y LEGENDRE POR EL METODO DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS."**

Antes de empezar con la exposición del método, vamos a introducir los siguientes conceptos :

$\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)}$ es la derivada de orden $\underline{n}$ de la función $\underline{y}$ con respecto a $\underline{x}$

$\frac{d^2 y}{dx^2} = \dot{y}''$ es la segunda derivada de $\underline{y}$, con respec- pecto a $\underline{x}$

$\dfrac{dy}{dx} = y'$ es la primera derivada de $y$ con respecto a $x$

$\dfrac{d^0 y}{dx^0} = y^{(0)} = y$ es la derivada de "orden cero" de $y$ con respecto a $x$, o sea la función misma.

$\dfrac{d^{-1} y}{dx^{-1}} = y^{(-1)}$ es la derivada de "orden menos uno" de $y$ con respecto a $x$, o también se puede definir como la expresión cuya primera derivada es la función $y$

o sea :

$$\boxed{\frac{d\,\dfrac{d^{-1}y}{dx^{-1}}}{dx} = \frac{d^0 y}{dx^0} = y}$$

ó :

$$\boxed{\frac{d\,y^{(-1)}}{dx} = y^{(0)} = y}$$

Asímismo podríamos continuar introduciendo el concepto de derivada de orden "menos n". El concepto nuevo de derivada de "orden negativo", no es pues otra cosa que una integral.

El procedimiento que voy a exponer consiste en buscar la **Ley de Formación de las Derivadas (Positivas o Negativas)** y aprovechando esta ley, lograr que uno ó varios coeficientes se anulen, con el fin de obtener una expresión más sencilla.

A continuación expondré el método con algunos ejemplos :

Ejemplo Nº. 1 : **Integrar la ecuación :**

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = \log x$$

Obsérvese que esta acuación debe copiarse en el centro de la hoja. Luego se obtienen las derivadas de la Ec. Dada y se busca su ley de formación (ver abajo). Una vez obtenida la ley de los coeficientes trabajamos hacia arriba (o sea, **INTEGRANDO**). Finalmente hallamos esta última expresión

$$x^2\frac{d^0y}{dx^0} + 0x\frac{d^{-1}y}{dx^{-1}} + 0\frac{d^{-2}y}{dx^{-2}} = \int\left[\int \log x\,dx + c_1\right]dx + c_2$$

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2x\frac{d^0y}{dx^0} + 0\frac{d^{-1}y}{dx^{-1}} = \int \log x\,dx + c_1$$

Ec. Dada :

$$x^2\frac{dy}{dx} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = \log x$$

**Derivada de la Ec. Dada :**

$$x^2\frac{d^3y}{dx^3} + 6x\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

**Derivada de la Ec. Anterior :**

$$x^2\frac{d^4y}{dx^4} + 8x\frac{d^3y}{dx^3} + 12\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Coeficientes difieren en 2 unidades

**4, 6, 8, etc.**

Coeficientes se obtienen sumando los de las columnas 2a. y 3a. de la Ec. Anterior

**4 + 2 = 6**
**6 + 6 = 12**
**etc.**

La expresión así obtenida, es (según la definición de $\frac{d^{o}y}{dx^{o}}$ ):

$$x^2 y = \int \left[ \int \log x \, dx + C_1 \right] dx + C_2$$

$$x^2 y = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{3}{4} x^2 + C_1 x + C_2$$

$$\boxed{\therefore\ y = \frac{\log x}{2} - \frac{3}{4} + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2}}$$

El anterior ejemplo es en extremo sencillo, ya que al hacer las integraciones, , los coeficientes de $\frac{d^{-1}y}{dx^{-1}}$ y $\frac{d^{-2}y}{dx^{-2}}$ resultaron ser nulos.

Ejemplo Nº. 2 : **Integrar la ecuación :**

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

En este ejemplo se observa, que al derivar se obtiene una simplificación notable, análoga a la del Ejemplo Nº. 1 :

Ec. Dada :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

Derivada de la Ec. dada :

$$x^2 \frac{d^3y}{dx^3} - 2x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} = 0$$

Derivada de la Ec. Anterior :

$$x^2 \frac{d^4y}{dx^4} - 0x \frac{d^3y}{dx^3} + 0 \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

**Coef. difieren en 2 unidades**
**-4, -2, -0**

**Coef. se obtienen sumando los de las columnas 2a. y 3a.**
**-4 + 6 = +2**
**-2 + 2 = +0**

La ecuación obtenida, después de derivar 2 veces, es :

$$x^2 \frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

$$\therefore \frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

Integrando, esta sencilla expresión, se obtiene sucesivamente :

$$\frac{d^3y}{dx^3} = C_1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1 x + C_2$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$y = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Pero, en esta ecuación aparecen 4 constantes arbitrarias, y la ecuación dada era sólo del 2º. orden. Hay que determinar el valor de dos de las constantes, por las condiciones del problema, o sea reemplazando en la ecuación original :

$$x^2(C_1 x + C_2) - 4x\left(C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3\right) + 6\left(\frac{C_1 x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4\right) = 0$$

$$\boxed{\therefore C_3 x + 3C_4 = 0} \qquad (1)$$

y luego en la ecuación derivada una vez :

$$x^2 C_1 - 2x(C_1 x + C_2) + 2\left(C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3\right) = 0$$

$$\boxed{\therefore C_3 = 0}$$

Combinando (1) y (2) :

$$\boxed{C_4 = 0}$$

$$\boxed{y = K\ x^3 + K_2 x^2}$$

Ejemplo Nº. 3 : **Integrar la ecuación :** $x^2 y'' + y = x^2$

$$x^2 y'' - 2xy^{(0)} + 3y^{(-1)} = \frac{x^3}{3} + C_1$$

| | |
|---|---|
| Ec. dada, completando el término con coef. nulo. | $x^2 y'' + 0xy' + \quad y = x^2$ |
| Derivada de la Ec. dada | $x^2 y''' + 2xy'' + \quad y' = 2x$ |
| Derivada de la anterior expresión. | $x^2 y^{IV} + 4xy''' + \quad 3y'' = 2$ |

**0, 2, 4, 6, 8 etc.**     **0 + 1 = 1**

**2 + 1 = 3 etc.**

En este ejemplo, se ve que no es posible lograr una simplificación por derivación o integración sucesiva. Se trata, en efecto de un ejemplo, que hay que resolver por el método general. Este consiste en lo siguiente :

a) Se multiplica la ecuación original por $X^n$

b) Se busca la ley de formación de las derivadas de la ecuación anterior.

c) Se determina el valor del exponente $n$, por la condición del coeficiente que se desee hacer nulo.

En seguida se ilustra la resolución aquí expuesta :

$$X^{n+2}y' - (n+2)X^{n+1}y^{(0)} + (n^2+3n+3)x^{n}y^{(-1)} = \frac{X^{n+3}}{n+3} + C_1$$

Ec. dada multiplicada por $x^n$

$$X^{n+2}y'' + 0X^{n+1}y' + X^{n}y = X^{n+2}$$

Derivada de la Ec. anterior

$$X^{n+2}y''' + (n+2)X^{n+1}y'' + X^{n}y' = (n+2)X^{n+1}$$

Derivada de la Ec. anterior

$$X^{n+2}y^{IV} + (2n+4)X^{n+1}y''' + (n^2+3n+3)X^{n}y'' = (n+1)(n+2)X^{n}$$

Coeficientes difieren en ( n + 2 )

Coeficientes : (se obtienen del renglón superior)
Coef. 2a. columna) (n + 1) + Coef. 3a. columna.

La ecuación que aparece en la parte superior de la página 7a. es una lineal de primer órden, si hacemos

$$(n^2+3n+3)=0$$

$$\boxed{\therefore n = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i} \qquad i = \sqrt{-1}$$

$$x^{n+2}y' - (n+2)x^{n+1}y = \frac{x^{n+3}}{n+3} + C_1$$

$$y' - \frac{n+2}{x}y = \frac{x}{n+3} + C_1 x^{-(n+2)}$$

Integrando esta ecuación lineal de primer orden, se obtiene :

$$y = \frac{1}{n+3} \cdot \frac{x^2}{-n} + C_1 \frac{x^{-(n+1)}}{-2n-3} + C_2 \cdot x^{n+2}$$

Reemplazando cualquiera de los dos valores de n se obtiene :

$$\boxed{y + \frac{x^2}{3} + K_1 x^{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i} + K_2 x^{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}}$$

Ejemplo Nº. 4 : **Integrar la ecuación :**

$$\underline{\underline{x^2y'' - 2xy' + 2y = x \log x}}$$

Esta ecuación se resuelve por una sola derivación, así :

$$x^2 y''' - 0xy'' + 0y' = 1 + \log x$$

$$\therefore\ y''' = x^{-2} + \frac{\log x}{x^2}$$

Integrando : $$y'' = -\frac{2}{x} - \frac{\log x}{x} + C_1$$

Integrando : $$y' = -2\log x - \frac{(\log x)^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Integrando : $$y = -x\log x - \tfrac{1}{2}x(\log x)^2 + \tfrac{C_1}{2}x^2 + (3+C_2)x + C_2$$

Reemplazando en la Ec. original, se determinan los valores de las constantes "**redundantes**", resultando :

$$\boxed{y = K_1 x^2 + K_2 x - x\log x - \tfrac{1}{2}x(\log x)^2}$$