PROPAGACION DE UNA ONDA TERMICA EN UNA CORRIENTE DE AIRE

por

YU TAKEUCHI

§ 1 Introducción

En este artículo mostramos por qué no existe una onda térmica en el aire en reposo. La onda térmica se amortigua rápidamente ya que el coeficiente de transmisión del calor en el aire es muy pequeño; sin embargo esta onda térmica se transmite si existe una corriente de aire. Si esta corriente tiene lugar dentro de un cilíndro, el problema tiene por solución la función hipergeométrica confluyente, caso que nos proporciona un ejemplo sencillo de un problema de frontera.

§ 2 Onda térmica pura (sin corriente de aire)

En una corriente de aire cuya velocidad es $\mathbf{V} = (u, v, w)$ la ecuación de la conducción del calor está dada por [1]

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \operatorname{grad} T) = \kappa^2 \Delta T \qquad (1)$$

donde $T(x, y, z, t)$ es la temperatura en el punto (x, y, z), t el tiempo y κ es una constante llamada coeficiente de transmisión del calor. Si $\mathbf{V} = 0$, es decir, si no hay corriente de aire, la ecuación (1) se convierte en la siguiente conocida ecuación : [2],[3]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa^2 \Delta T \qquad (2)$$

Suponemos ahora que existe una solución ondulatoria :

$$T(x, t) = e^{i\nu t - Bx} \qquad (3)$$

Derivando (3) con respecto a x y a t, y sustituyendo en (2) obtenemos :

$$i\nu = \kappa^2 B^2$$

o bien

$$B = \pm \frac{\sqrt{\nu}}{\kappa} i^{1/2} = \pm \frac{1+i}{\kappa} \sqrt{\frac{\nu}{2}} \tag{4}$$

Si, por ejemplo, tomamos el signo $+$ la solución está dada por :

$$T(x,t) = e^{-\frac{1}{\kappa}\sqrt{\frac{\nu}{2}}\,x}\, e^{i\left[\nu t - \frac{1}{\kappa}\sqrt{\frac{\nu}{2}}\,x\right]} \tag{5}$$

El primer factor del segundo miembro de (5) representa la amortiguación de la onda, es decir, si la onda avanza la distancia $x = \kappa\sqrt{2/\nu}$ el valor absoluto de (5) disminuye en $1/e = 0.3\ldots$ Esta distancia

$$l = \kappa\sqrt{2/\nu} \tag{6}$$

se llama "el alcance de la onda" y en el caso de aire su valor es muy pequeño p. e., para $\nu = 100$, l es mas o menos 10^{-2} cm. Este nos muestra que prácticamente no existen ondas térmicas en el aire en reposo.

3 Onda térmica propagada por una corriente uniforme

Si hay una corriente uniforme cuya dirección es la del eje x, entonces $\mathbf{v} = (u, 0, 0)$, y la ecuación (1') toma la forma siguiente :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = \kappa^2\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] \tag{7}$$

Por un procedimiento análogo al del § 1 podemos decir que no existe prácticamente una solución ondulatoria transversal, y que la única solución considerable es la onda longitudinal (3) Sustituyendo (3) en (7) obtenemos

$$i\nu + u(-B) = \kappa^2(-B)^2$$

o bien

$$B = \frac{-u + \sqrt{u^2 + 4i\nu\kappa^2}}{2\kappa^2} = \frac{1}{2\kappa^2}\left[-u \pm \left(u + 2i\nu\frac{\kappa^2}{u} + 2\frac{\nu^2\kappa^4}{u^3} + \cdots\right)\right] \qquad (8)$$

Tomando el signo $+$ para que la solución sea finita cuando $x \rightarrow \infty$, obtenemos

$$B = \frac{\nu^2\kappa^2}{u^3} + i\frac{\nu}{u}$$

Entonces la solución de (7) está dada por :

$$T(x,t) = e^{-\nu^2\kappa^2 x/u^3} e^{i(\nu t - \frac{\nu x}{u})} \qquad (9)$$

En este caso el alcance de la onda es

$$l = u^3/\nu^2\kappa^2$$

y su valor no es muy pequeño, p. e.,

$$\nu \sim 1000 \qquad u = 100 \text{ cm/seg.} \qquad l \sim 10^3 \text{ cm}$$

$$\nu \sim 100 \qquad u = 100 \text{ cm/seg} \qquad l \sim 10^5 \text{ cm}$$

es decir, la amortiguación es despreciable.

NOTA : En (8), para que pueda efectuarse el desarrollo en serie binomial, el valor $4\nu\kappa^2/u^2$ debe ser pequeño. Pero como κ^2 es pequeño ($\kappa^2 = 10^{-2} \sim 10^{-3}$ (6)) siempre se satisface esta condición.

§ 4 Onda térmica propagada por una corriente de aire que circula por un tubo

Consideramos ahora un tubo circular de radio a dentro del cual hay una corriente uniforme. Tomando coordinadas cilíndricas (r, φ , z) cuyo eje z coincide con el eje del tubo, la velocidad de la corriente, de acuerdo con la ley de Hagen-Poisuill, (7) está dada por :

$$\mathbf{v} = (0,\ 0,\ w) \qquad w = U\,(a^2 - r^2) \tag{10}$$

Suponiendo la simetría con respecto al eje z la ecuación (1) toma la forma siguiente :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U\,(a^2 - r^2)\frac{\partial T}{\partial z} = \kappa^2\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] \tag{11}$$

Suponemos ahora que la solución ondulatoria de (11) , que avanza en la dirección de z , es de la forma

$$T(r, z, t) = A(r)\,e^{i\nu t - Bz} \tag{12}$$

Derivando (12) y sustituyendo en (11) tenemos :

$$A'' + \frac{1}{r}A' + \left[\left(B^2 + \frac{a^2 BU - i\nu}{\kappa^2}\right) - \frac{BU}{\kappa^2}r^2\right]A = 0 \tag{13}$$

Haciendo el cambio de variable :

$$x = r^2/c^2 \qquad y = e^{r^2/2c^2}\,A(r) \tag{14}$$

en donde

$$c^2 = \frac{\kappa}{\sqrt{BU}} \qquad \Re(\sqrt{B}) > 0 \qquad c^2\left(B^2 + \frac{a^2 BU - i\nu}{\kappa^2}\right) = 4h \tag{15}$$

la ecuación (13) se transforma en :

$$x\frac{d^2 y}{\partial x^2} + (1 - x)\frac{dy}{dx} - \left(\frac{1}{2} - h\right)y = 0 \tag{16}$$

Esta es la ecuación hipergeométrica confluyente y su única solución finita en x = 0 es (2), (3)

$$y = F\left(\frac{1}{2} - h,\ 1,\ x\right)$$

De acuerdo con (14) obtenemos

$$A(r) = e^{-r^2/2c^2} F(\tfrac{1}{2}-h, 1, r^2/c^2) \tag{17}$$

Ahora bien, para determinar el valor de B imponemos la condición de frontera; la temperatura T es igual a cero sobre la superficie interior del tubo, es decir :

T (r, z, t) = 0 cuando r = a

o bien

$$A(a) = 0 \tag{18}$$

de (14) y (15) obtenemos

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{a\sqrt{B}\sqrt{a^2U}}{\kappa} \qquad \mathcal{R}(B) > 0$$

Si suponemos que

$$a \gtrsim 1\ cm \qquad a^2U \gtrsim 100\ cm/seg \qquad \kappa^2 \sim 10^{-2}, \quad |B| \gtrsim 1 \tag{19}$$

entonces el valor de a^2/c^2 es mayor que **100** por lo tanto podemos utilizar el desarrollo asintótico de F para calcular el valor de A (a). Si x es grande y $\mathcal{R}(x) > 0$, tenemos el familiar desarrollo asintótico **(4)** ;

$$F(\tfrac{1}{2}-h, 1, x) \sim \frac{e^x x^{-(h+\frac{1}{2})}}{\Gamma(\frac{1}{2}-h)} \left\{ 1 + \frac{(h+\frac{1}{2})^2}{1!}\left(\frac{1}{x}\right) + \cdots \right\} \tag{20}$$

De (17), (18) y (20) obtenemos

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}-h)} = 0$$

es decir,

$$h = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots \frac{2n+1}{2}, \cdots \tag{21}$$

Con la aproximación que hemos supuesto en (19) se calcula que

$$B^2 \ll \frac{a^2 BU - i\nu}{\kappa^2}$$

De (15), despreciando B, obtenemos

$$\frac{\kappa}{\sqrt{BU}}\left(\frac{a^2 BU - i\nu}{\kappa^2}\right) = 4h \tag{22}$$

y resolviendo esta ecuación cuadrática tenemos :

$$\sqrt{BU} = \frac{2h\kappa \pm (4\kappa^2 h^2 + i\nu a^2)^{1/2}}{a^2} \tag{23}$$

Teniendo en cuenta que κ^2/ν^2 es muy pequeño, entonces $(4\kappa^2h^2 + i\nu a^2)^{1/2}$ puede desarrollarse en serie binomial, por consiguiente se tiene

$$a^2\sqrt{BU} = \left(\sqrt{\frac{\nu}{2}}a + 2h\kappa + \sqrt{\frac{2}{\nu}}\frac{\kappa^2h^2}{a}\right) + i\left(\sqrt{\frac{\nu}{2}}a - \sqrt{\frac{2}{\nu}}\frac{\kappa^2h^2}{a}\right) \tag{24}$$

Para obtener (24) hemos tomado únicamente el signo + en (23) porque el signo - no satisface la condición $\Re(\sqrt{B}) > 0$.
Elevando al cuadrado ambos miembros de (24) se tiene :

$$B = \left(\frac{2\sqrt{2\nu}\,\kappa h}{a^3U} + \frac{8\kappa^2h^2}{a^4U}\right) + i\left(\frac{\nu}{a^2U} + \frac{2\sqrt{2\nu}\,\kappa h}{a^3U}\right) \tag{25}$$

y sustituyendo los valores de h dados en (21), los valores de B vienen dados como sigue :

$$B_n = \frac{\kappa\sqrt{2\nu}}{a^3U}(2n+1) + \frac{2\kappa^2(2n+1)^2}{a^4U} + i\left(\frac{\nu}{a^2U} + \frac{\kappa\sqrt{2\nu}}{a^3U}(2n+1)\right) \tag{26}$$

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

De (12), (17) y (21), se obtiene que la solución correspondiente a (26) está dada por :

$$T_n(r,z,t) = e^{i\nu t - B_n z} e^{-r^2/2c^2} F(-n, 1, r^2/c^2)$$

$$= e^{-\left\{B_n z + \frac{\sqrt{B_n U}\, r^2}{2\kappa}\right\}} e^{i\nu t} L_n\left(\frac{\sqrt{B_n U}}{\kappa} r^2\right)$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (27)$$

donde L_n es la "función de Laguerre" (2), (5) .

REFERENCIA

(1) HIDRODINAMICA : *Lamb*

(2) MODERN ANALYSIS : *Whittaker y Watson*

(3) PHYSICAL MATHEMATICAS : *Page*

(4) HIGHER TRASCENDENTAL FUNCTIONS : *Erdelyi - Magnus*

(5) ORTHOGONAL FUNCTIONS : *Sansone, G.*

(6) PHYSICAL TABLES : *Shiba, K.*

(7) INTRODUCCION A LA FISICA TEORICA : *Slater, J. C.*