

ALGUNOS ANILLOS ESPECIALES

por

VICTOR ALBIS G. y JANUARIO VARELA B.

Facultad de Matemáticas, Universidad Nacional.

Nos proponemos estudiar aquí una cierta clase de anillos en los cuales un divisor de cero a izquierda, por ejemplo, no lo es derecha. El problema fué propuesto durante el curso de Álgebra (1963) en la Facultad de Matemáticas, Universidad Nacional, e intentamos resolverlo en tal forma que procurase la mayor cantidad de ejemplos.

⊕ - ⊕ - ⊕

Sean I un conjunto y A un dominio de integridad. Consideremos el A -módulo A^I y una forma A -lineal $N: A^I \rightarrow A$, es decir, tal que :

$$(1) \quad N(x + y) = N(x) + N(y), \quad \forall x, y \in A^I$$

$$(2) \quad N(\alpha x) = \alpha N(x), \quad \forall x \in A^I, \quad \forall \alpha \in A.$$

Definamos en seguida una multiplicación en A^I , así :

$$(3) \quad (x \star y)(i) = x(i) \cdot N(y), \quad \forall i \in I.$$

Esto nos conduce de inmediato a la siguiente :

PROPOSICIÓN 1. Para esta multiplicación A^I es un anillo.

Demostración. - Verifiquemos en primer lugar las relaciones distributivas :

$$a) \quad ((x + y) \star z)(i) = (x + y)(i) \cdot N(z) = (x(i) + y(i)) \cdot N(z) \\ = (x \star z)(i) + (y \star z)(i), \quad \forall i \in I.$$

$$b) \quad (z \star (x + y))(i) = z(i) \cdot N(x + y) = z(i) \cdot N(x) + z(i) \cdot N(y) \\ = (z \star x)(i) + (z \star y)(i), \quad \forall i \in I.$$

Por último, veamos que esta multiplicación es asociativa; en efecto : $y \star z$ es la función tal que $(y \star z)(i) = y(i) \cdot N(z)$ para cada $i \in I$, es decir, $N(z) \cdot y$; luego $(x \star (y \star z))(i) = x(i) \cdot N(y \star z) =$

= $x(i) \cdot N(y) \cdot N(z)$, para cada $i \in I$ en virtud de (2). Por otra parte, $((x \star y) \star z)(i) = (x \star y)(i) \cdot N(z) = x(i) \cdot N(y) \cdot N(z)$, para cada $i \in I$, lo demuestra que $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$, en la hipótesis de que A es conmutativo. ■

PROPOSICION 2. Si $N(x) = N(y) \neq 0$, y $x \star y = y \star x$, entonces $x = y$.

Demostración. - Si x, y satisfacen las hipótesis de la proposición, tenemos que $x(i) \cdot N(y) = y(i) \cdot N(x)$, para cada $i \in I$, y entonces que $x(i) = y(i)$, para cada $i \in I$, ya que A es un anillo entero; es decir, $x = y$. ■

PROPOSICION 3. Si N no es un isomorfismo, entonces :

- todos los elementos de A^I son divisores de cero a izquierda;
- si $N(y) \neq 0$, y no es un divisor de cero a derecha.

Demostración. a) En efecto, como $N^{-1}(0) \neq \{0\}$, para $y \neq 0$ basta tomar $x \in N^{-1}(0)$ para tener $y \star x = 0$; luego y es un divisor de cero a izquierda.

b) Sea ahora $y \in N^{-1}(0)$, entonces $0 = (x \star y)(i) = x(i)N(y)$, para cada $i \in I$, implica que $x(i) = 0$ para cada $i \in I$, porque A es entero; luego $x = 0$ y no es un divisor de cero a derecha. ■

Corolario. - Si $x \in N^{-1}(0)$, los anuladores de x a izquierda y a derecha son (ideales) distintos.

Demostración. - En efecto: sea $\mathfrak{A}_d = \{y \in A^I \mid x \star y = 0\}$ el anulador a derecha de x ; entonces, dado que $x(i)N(y) = 0$ para cada $i \in I$ implica que $N(y) = 0$, resulta, que $\mathfrak{A}_d = N^{-1}(0) = \{0\}$. Por otra parte, si $\mathfrak{A}_s = \{y \in A^I \mid y \star x = 0\}$ es el anulador a izquierda de x , la relación $y(i)N(x) = 0$ para cada $i \in I$, implica que $y(i) = 0$ para cada $i \in I$; es decir, $\mathfrak{A}_s = \{0\}$. ■

Observación. - Es claro que todos los resultados son aún completamente válidos si tomamos un submódulo M arbitrario de A^I y una

forma A-lineal $N : M \rightarrow A$; esto queda clarificado en el siguiente ejemplo :

Consideremos el R-módulo $\mathcal{L}[0,1] \subset \mathbb{R}^{[0,1]}$ de las funciones integrables en el sentido de LEBESQUE. Definiendo :

$$(4) \quad (x * y)(i) = x(i) \int_0^1 y(t) dt, \quad \forall i \in [0, 1]$$

y recordando que $N(y) = \int_0^1 y(t) dt$ es una forma R-lineal, estamos en el caso descrito anteriormente. Para verificar de manera directa todo elemento $x \in \mathcal{L}[0, 1]$ es un divisor de cero a izquierda, basta tomar una función $y \in \mathcal{L}^*[0, 1] = \mathcal{L}[0, 1] - \{0\}$ tal que su soporte $sop(y)$ sea de medida nula, para obtener $x * y = 0$. La proposición 2 nos proporciona en este ejemplo un método para decidir si dos funciones que tienen iguales sus integrales sobre $[0, 1]$ son iguales. Sin embargo, desconocemos el alcance de su aplicación.

de potenciales y de transformaciones continuas

no cambia signo, y se llega a las siguientes

$$\oplus - \oplus - \oplus - \oplus$$

El desarrollo de la teoría puede ser suave, cuando las cosas se pue-
sen, pues es igualmente fácil la teoría de los Módulos. Es la única
dificultad que surgen en la teoría de los módulos, pues
se suele pensar de los módulos como de algo sencilla, que se sabe siempre
que es la verdadera.

BOURBAKI, N. *Algèbre*, Chaps. I, II, Hermann & Cie, Paris

definiciones que cumplen el suyo de sentido de los módulos, y
toda otra de equivalencia se obtiene de la teoría de los módulos
mercadamente conocida, en la que se pro-
pone, entre otras cosas, que

(Recibido en octubre, 1963)

Es posible, en efecto, caracterizar los módulos
por el modo más sencillo, es decir, diciendo, por ejemplo, en el
caso de la geometría plana: "Definimos punto, recta, que tienen
mismos puntos y rectas", independiente a estos dosas otras propiedades,
como lo siguiente: dos rectas distintas tienen uno recto, y etc.
De este modo se obtiene una teoría de módulos y definicio-
nes, conduciendo, progresivamente, las definiciones y las proposiciones

Traducción de la Tesis G. Ingeniero Civil, Facultad de Matemá-
ticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia