ALGUNOS ANILLOS ESPECIALES

por

VICTOR ALBIS G. y JANUARIO VARELA B.

Facultad de Matemáticas, Universidad Nacional.

Nos proponemos estudiar aquí una cierta clase de anillos en los cuales un divisor de cero a izquierda, por ejemplo, no lo es derecha. El problema fué propuesto durante el curso de Algebra (1963) en la Facultad de Matemáticas, Universidad Nacional, e intentamos resolverlo en tal forma que procurase la mayor cantidad de ejemplos.

⊕- ⊕- ⊕

Sean I un conjunto y A un dominio de integridad. Consideremos el A-módulo A^I y una forma A-lineal $N: A^I \to A$, es decir, tal aue:

(1) $N(x + y) = N(x) + N(y), \quad \forall x, y \in A^I$

(2) $N(\alpha x) = \alpha N(x), \quad \forall x \in A^I, \quad \forall \alpha \in A.$

Definamos en seguida una multiplicación en A, así:

(3) $(x \star y)(i) = x(i).N(y), \quad \forall i \in I.$

Esto nos conduce de inmediato a la siguiente:

PROPOSICION 1. Para esta multiplicación A^I es un anillo.

Demostración. - Verifiquemos en primer lugar las relaciones distributivas:

a) $((x + y)\star z)(i) = (x + y)(i).N(z) = (x(i) + y(i)).N(z)$
$= (x\star z((i) + (y\star z)(i), \quad \forall i \in I.$

b) $(z\star(x + y))(i) = z(i).N(x + y) = z(i).N(x) + z(i).N(y)$
$= (z\star x)(i) + (z\star y)(i), \quad \forall i \in I.$

Por último, veamos que esta multiplicación es asociativa; en efecto: $y\star z$ es la función tal que $(y\star z)(i) = y(i).N(z)$ para cada $i \in I$, es decir, $N(z).y$; luego $(x\star(y\star z)(i) = x(i).N(y\star z) =$

$= x(i).N(y).N(z)$, para cada $i \in I$ en virtud de (2). Por otra parte, $((x\star y)\star z)(i) = (x\star y)(i).N(z) = x(i).N(y).N(z)$, para cada $i \in I$, lo demuestra que $x\star((y\star z) = (x\star y)\star z$, en la hipótesis de que A es conmutativo. ∎

PROPOSICION 2. Si $N(x) = N(y) \neq 0$, y $x\star y = y\star x$, entonces $x = y$.

Demostración. - Si x, y satisfacen las hipótesis de la proposición, tenemos que $x(i).N(y) = y(i).N(x)$, para cada $i \in I$, y entonces que $x(i) = y(i)$, para cada $i \in I$, ya que A es un anillo entero; es decir, $x = y$. ∎

PROPOSICION 3. Si N no es un isomorfismo, entonces :

a) todos los elementos de A^I son divisores de cero a izquierda;

b) si $N(y) \neq 0$, y no es un divisor de cero a derecha.

Demostración. a) En efecto, como $N^{-1}(0) \neq \{0\}$, para $y \neq 0$ basta tomar $x \in N^{-1}(0)$ para tener $y\star x = 0$; luego y es un divisor de cero a izquierda.

b) Sea ahora $y \notin N^{-1}(0)$, entonces $0 = (x\star y((i) = x(i)N(y)$, para cada $i \in I$, implica que $x(i) = 0$ para cada $i \in I$, porque A es entero; luego $x = 0$ é y no es un divisor de cero a derecha. ∎

Corolario. - Si $x \notin N^{-1}(0)$, los anuladores de x a izquierda y a derecha son (ideales) distintos.

Demostración. - En efecto: sea $\mathfrak{X}_d = \{y \in A^I \mid x\star y = 0\}$ el anulador a derecha de x; entonces, dado que $x(i)N(y) = 0$ para cada $i \in I$ implica que $N(y) = 0$, resulta, que $\mathfrak{X}_d = N^{-1}(0) \neq (0)$. Por otra parte, si $\mathfrak{X}_s = \{y \in A^I \mid y\star x = 0\}$ es el anulador a izquierda de x, la relación $y(i)N(x) = 0$ para cada $i \in I$, implica que $y(i) = 0$ para cada $i \in I$; es decir, $\mathfrak{X}_s = (0)$. ∎

Observación. - Es claro que todos los resultados son aún completamente válidos si tomamos un submódulo M arbitrario de A^I y una forma A-lineal $N : M \rightarrow A$; esto queda clarificado en el siguiente ejemplo :

Consideremos el R-módulo $\mathcal{L}[0,1] \subset \mathbf{R}^{[0,1]}$ de las funcione integrables en el sentido de LEBESQUE. Definiendo :

(4) $(x \star y)(i) = x(i) \int_0^1 y(t)\,dt, \quad \forall i \in [0,1]$

y recordando que $N(y) = \int_0^1 y(t)\,dt$ es una forma $\mathbf{R}$-lineal, estamos en el caso descrito anteriormente. Para verificar de manera directa todo elmento $x \in \mathcal{L}[0,1]$ es un divisor de cero a izquierda, basta tomar una función $y \in \mathcal{L}^*[0,1] = \mathcal{L}[0,1] - \{0\}$ tal que su soporte sop(y) sea de medida nula, para obtener $x \star y = 0$. La proposición 2 nos proporciona en este ejemplo un método para decidir si dos funciones que tienen iguales sus integrales sobre $[0,1]$ son iguales. Sinembargo, desconocemos el alcance de su aplicación.

⊕-⊕-⊕-⊕

BIBLIOGRAFIA

BOURBAKI, N. .... Algèbre, Chaps. I, II, Hermann & Cie, Paris

(Recibido en octubre, 1963)