1. - Construcción de una sucesión de números naturales (n_k) tal que $\lim_{k\to\infty} \cos n_k = 1$.

Vamos a construir dos sucesiones crecientes de números naturales (n_k), (p_k) tales que

(1) $\quad n_k = p_k 2\pi + \varepsilon_k, \; \varepsilon_k \to 0 \quad (k \to \infty)$

LEMA. - Para ε dado, existe m (número natural) y ε' tal que

(2) $\quad 2\pi = \pm(\varepsilon m - \varepsilon'), \quad |\varepsilon'/\varepsilon| \leq 1/2$

donde se toma el signo (-) cuando $\varepsilon < 0$.

DEMOSTRACION. - Sea :

$$m_0 = [2\pi/|\varepsilon|]$$

entonces $2\pi = |\varepsilon| m_0 + \Delta$, donde $0 \leq \Delta < |\varepsilon|$

Si $\Delta \leq |\varepsilon|/2$, entonces se puede poner $m = m_0$, y $\varepsilon' = \pm\Delta$

Si $\Delta > |\varepsilon|/2$, entonces se tiene

(3) $\quad 2\pi = |\varepsilon|(m_0 + 1) - (|\varepsilon| - \Delta)$

Comparando (2) y (3), se obtiene :

$$m = m_0 + 1, \quad 0 < \pm\varepsilon' = |\varepsilon| - \Delta < |\varepsilon|/2$$

Ahora suponemos la relación

(4) $\quad n_k = 2\pi p_k + \varepsilon_k,$

En el lema anterior, tomando : $m_k = m$, $\varepsilon_k = \varepsilon$ y $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon'$ y multiplicando ambos miembros de la igualdad (4) por $m_{k'}$ se obtiene

$$m_k n_k = 2\pi m_k p_k + m_k \varepsilon_k$$

$$= 2\pi(m_k p_k \pm 1) + (\varepsilon_k m_k \mp 2\pi)$$

(5) $$= 2\pi(m_k p_k \pm 1) + \varepsilon_{k+1}$$

Sean $n_{k+1} = m_k n_k$, $p_{k+1} = m_k p_k \pm 1$; entonces (5) se convierte en

(6) $$n_{k+1} = 2\pi p_{k+1} + \mathcal{E}_{k+1}, \quad |\mathcal{E}_{k+1} / \mathcal{E}_k| \leq \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, aplicando la inducción matemática, podemos construir dos sucesiones crecientes de números naturales (n_k), (p_k), tales que

(7) $$n_k = 2\pi p_k + \mathcal{E}_k, \quad |\mathcal{E}_{k+1} / \mathcal{E}_k| \leq \frac{1}{2}$$

donde n_1, p_1, pueden tomar cualquier valor. De (7) se obtiene :

$$\cos n_k = \cos(2\pi p_k + \mathcal{E}_k) = \cos \mathcal{E}_k \to 1 \quad (k \to \infty)$$

(Yu Takeuchi, U. NAL.)

2. - Los únicos enteros positivos distintos (diferentes de cero) tales que $y^x = x^y$ son 2 y 4. (N. Bourbaki, Alg.chap. I).

Como $2^1 \neq 1^2$ y $3^2 \neq 2^3$, basta establecer la desigualdad $y^x < x^y$ para cualquier pareja de enteros (x, y) que cumplan la condición $y > x \geq 3$. Ya que $y > x$, escrbiendo $y = x + z$, con $z > 0$, la desigualdad a mostrar es $(x + z)^x < x^{x+z}$ para cualquier entero $x \geq 3$. En efecto : por el teorema del valor medio se tiene para $a > 0$, que $e^a - 1 = a e^{x_0}$, donde $0 < x_0 < a$. Como $e^{x_0} \geq 1$ debemos tener $e^a - 1 \geq a$.

Haciendo $a = z/x$ en la última desigualdad, resulta :

$$1 + \frac{z}{x} < e^{z/x}$$

ó :

$$\left(1 + \frac{z}{x}\right)^{x/z} < e$$

Como $e < 3 \leq x$, tenemos que

$$\left(1 + \frac{z}{x}\right)^{x/z} < x \Longrightarrow \left(\frac{x+z}{x}\right)^x < x^z$$

o sea que

$$(x + z)^x < x^{z+x} \qquad \text{O. Q. D.}$$

(Januario Varela, Jairo Charris, U. NAL.)

3. - Demostrar que las únicas tripletas (m, n, p) de números naturales $\neq 0$ tales que $(m^n)^p = (m^{(n^p)}$ son : $(1, n, p)$ para n y p cualesquiera, $(m, n, 1)$ y $(m, n, 2)$, m y n arbitrarios.

Como $m^{(1^p)} \neq (m^1)^p$ para $m, p \neq 1$ las únicas tripletas por considerar son las de la forma (m, n, p) con $m > 1$ y $n, p \geqq 3$

Para que una de estas tripletas sea tal que $(m^n)^p = m^{(n^p)}$ es necesario y suficiente que $np = n^p$, por tanto la propiedad asociativa no se cumple para estas tripletas si demostramos que $n^p > np$ para n, p enteros positivos $\geqq 3$, lo cual se hace por inducción sobre p :

i) $n^3 > 3n$ porque $n^3 > n^2 > 3n$ pues $n > 3$

ii) Supongamos que $n^p > pn$; en este caso

$$n^{p+1} = nn^p > n(np) > 2np > np + n = n(p+1),$$

Con lo cual queda terminada la desmostración.

((Alumnos 3er año Fac. Matemáticas, U. NAL.)

4. - Nota sobre las derivadas de las funciones que tienden al infinito para un valor finito de la variable.

Si una función tiende al infinito cuando la variable tiende a un valor finito a, lo mismo sucede en general para su derivada. (Eugène Rouche et Lucien Levy : Analyse infinitésimal a l'usage des Ingènieurs, tome premier., Paris, Gauthier - Villars et file, 1900). El objeto de la presente nota es el de mostrar que si la derivada tiende a un límite éste es siempre infinito, pero que hay funciones que crecen indefinidamente, sin que su derivada tienda a un límite.

Para fijar las ideas se supondrá que la variable tiende a a por la izquierda. Se admitirá igualmente que en un intervalo abierto $]a-\delta, a[$ existe la derivada. Sea b un punto interior de este intervalo, punto por lo demás arbitrario, y sea $b + h$ un punto también interior a dicho intervalo, situado a la derecha de b. Aplicando el teorema del valor medio, se tendrá

$$f(b + h) = f(b) + hf'(b + \theta h), \qquad 0 < \theta < 1$$

Si el punto $b + h$ se acerca indefinidamente al punto a, $f(b + h)$ crecerá más allá de todo límite, y siendo $f(b)$ fijo y h un número que no crece indefinidamente, $f'(b + \theta h)$ tomará valores mayores que cualquier número dado, si la función f tiende a $+\infty$ cuando x tiende a a por la izquierda.

Por consiguiente, en todo intervalo, por pequeño que sea, situado a la izquierda de a, y que tenga este punto por extremo superior, habrá puntos $z + \theta h$ en los cuales $f'(x)$ es mayor que cualquier valor prefijado. Se puede concluir, pues, que si $f'(x)$ tiende a un límite cuando x tiende a a por la izquierda, este límite es infinito.

El ejemplo siguiente muestra que la función puede crecer indefinidamente sin que su derivada tienda a un límite. Sea

$$f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} x^{-1} \qquad (x \neq 0)$$

Si x tiende a 0 por la derecha, $f(x)$ crece indefinidamente. Para $x \neq 0$ su derivada es

$$f'(x) = -(1 + \cos(1/x))/x^2$$

Cuando x tiende a 0 por la derecha el primer factor, que crece indefinidamente, es finito para $x \neq 0$. El segundo factor oscila entre 0 y 2 infinidad de veces en todo intervalo que contenga a 0 por extremo inferior. Por consiguiente, $f'(x)$ variará entre 0 y $(-2)/x^2$, y la derivada no tiende a ningún límite. Si $f(x)$ tiende a 0 al crecer x indefinidamente subsiste una propiedad análoga: Si existe la derivada para todos los valores de x esta derivada tiende a 0 ó no tiende a ningún límite. En efecto, sea a un punto tal que para él y para todos los valores de x superiores a a se tenga

$$|f(x)| < \varepsilon/2 \qquad (x \geq a)$$

siendo ε un número tan pequeño como se quiera. Para $h > 0$ se tendrá

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$$

o sea

$$|f(a+h) - f(a)| = h|f'(a+\theta h)|$$

y por tanto, $\varepsilon > h|f'(a+\theta h)|$, y para todo $h > 1$, $\varepsilon > |f'(a+h)|$.

Por consiguiente, siempre existirán puntos a la derecha de a para los cuales el valor absoluto de la derivada es tan pequeño como se quiera. Luego si la derivada tiende a un límite éste necesariamente es 0.

Pero no siempre la derivada tiende a un límite, como lo muestra el siguiente ejemplo :

$$f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} x^2 \qquad (x \neq 0)$$

En este caso

$$f'(x) = (-\operatorname{sen} x^2)/x^2 + 2\cos x^2$$

función que no tiene límite cuando x crece indefinidamente por valores positivos.

Si en vez de ser $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ fuera $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, bastaría considerar la función $f(x) - a$ para llegar a las mismas conclusiones.

(Luis Ignacio Soriano, U. NAL.)