PROBLEMAS PROPUESTOS

Los problemas son señalados por cero, uno o dos asteriscos según el grado de dificultad. Las soluciones deben ser enviadas a :

Revista de Matemáticas Elementales
Apartado Nacional Nº. 25-21
Bogotá, Colombia.

La solución a cada problema debe venir en hoja por separado. Los alumnos de bachillerato deben enviar, junto con las soluciones, el nombre del colegio y de su profesor de matemáticas.

o-o-o-o

★ 126. - Sea $\varphi(n) = n \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p})$ la función φ de Euler. Demostrar que $\varphi(a, b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ si a y b son primos entre sí. Deducir entonces que

$$\varphi(a,b) = d\, \varphi(a)\, \varphi(b) / \varphi(d)$$

donde d es el máximo común divisor de a y b.

★★ 127. - Para m entero > 0, sea $\tau_m(a)$ el número de soluciones de la ecuación indeterminada

$$x_1 x_2 \ldots x_m = a$$

($x_1, x_2, \ldots, x_m$ recorren los enteros positivos independientemente). En particular, es evidente que $\tau_1(a) = 1$. Demostrar que :

a) $\tau_2(a)$ es el número de divisores de a.

b) $\tau_m(ab) = \tau_m(a)\,\tau_m(b)$ si a y b son primos entre sí.

c) Si a es de la forma $a = p_1 p_2 \ldots p_k$, donde los p_i son números primos diferentes, entonces $\tau_m(a) = m^k$.

d) $\sum \tau_m(a)$ es igual al número de soluciones de la desigualdad $x_1 x_2 \ldots x_m \leq a$ (x_i números enteros positivos).

(I. M. VINAGRADOV.)

128. - Resolver la desigualdad

$$\frac{2x-25}{2(x^2+2x-3)} + \frac{2x+11}{2(x^2-1)} > \frac{1}{x+3}$$

129. - Sean a y b dos números enteros primos entre sí y tales que $a + b \neq 0$. Si p es un número primo, mostrar que el máximo común divisor de $a + b$ y $(a^p + b^p)/(a + b)$ es 1 ó p.

130. - Demostrar que si dos números enteros positivos son primos sí, entonces el máximo común divisor de $a - b$ y $a + b$ es 1 ó 2.

o - o - o - o