SOLUCION DE PROBLEMAS

108. - Es sabido que todo entero a puede escribirse bajo una de las formas siguientes :

$$8n + k, \quad k = 0, 1, \ldots, 7$$

donde $n = 0, \pm 1. \pm 2, \ldots.$ Si a tiene la forma $8n$, el problema es trivial. Si $k = 1$, entonces

$$a^2 - 1 = (8n + 1)^2 - 1$$

es divisible por 8. En la misma forma :

para $k = 2$, $a^2 - 4 = (8n + 2)^2 - 4$ es divisible por 8;

para $k = 3$, $a^2 - 1 = (8n + 3)^2 - 1$ es divisible por 8;

para $k = 4$, $a^2 = (8n + 4)^2$ es divisible por 8;

para $k = 5$, $a^2 - 1 = (8n + 5)^2 - 1$ es divisible por 8;

para $k = 6$, $a^2 - 4 = (8n + 6)^2 - 4$ es divisible por 8;

para $k = 7$, $a^2 - 1 = (8n + 7)^2 - 1$ es divisible por 8; C.Q.D.

ALVARO RODRIGUEZ

Otras soluciones de : Ivan Obregón, Jaime Vanegas.

112. - El sistema propuesto se puede escribir así :

$$x - by - cz = 0$$

$$ax - y + cz = 0$$

$$ax + y - z = 0$$

Para que este sistema homogéneo tenga una solución diferente de la trivial $(x = y = z = 0)$, es menester que el determinante de los coeficientes sea nulo, es decir

$$\begin{vmatrix} 1 & -b & -c \\ a & -1 & c \\ a & b & -1 \end{vmatrix} = 0$$

La anterior relación puede escribirse en la forma siguiente :

$$\begin{vmatrix} 1 + a & -(1 + \ ) & 0 \\ 0 & -(1 + b) & 1 + c \\ a & b & -1 \end{vmatrix} = 0$$

es decir :

$$(1 + a)(1 + b) = a(1 + b)(1 + c) + (1 + a)(1 + c)b$$

ó

$$\frac{1}{1 + c} = \frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b}$$

Sumando $c/(1 + c)$ a ambos lados, obtenemos :

$$\frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b} + \frac{c}{1 + c} = \frac{1}{1 + c} + \frac{c}{1 + c} = 1 \qquad \text{QED.}$$

(La condición $a \neq -1$, $b \neq -1$, $c \neq -1$, se impone ya que en tal caso la igualdad anterior sería obviamente imposible)

IVAN OBREGON

(Otras soluciones de : Antiguo alumno, A. Chaves Agudelo).

113. - Tenemos

$$\frac{x(x+2)(x+3)+x(x+1)(x+3)+3x(x+1)(x+2)-4}{(x+1)(x+2)(x+3)}=0$$

Luego si $x \neq -1, -2, -2$, tenemos

$$6x^3+22x^2+18x-4=0, \text{ ó, } 3x^3+11x^2+9x-2=0$$

Por tanteo, ensayando las posibles raíces racionales, se obtiene que $x=-2/3$ es una raíz del anterior polinomio; luego

$$(3x+2)(x^2+3x+1)=0$$

De $x^2+3x+1=0$, obtenemos que las otras raíces son $-3+\sqrt{5}/2$, y $-3-\sqrt{5}/2$.

IVAN OBREGON

117. - Denotemos por la letra M el número 12890625; entonces todos los números terminados en estas cifras serán de la forma $k(10)^8+M$. Al desarrollar $(k(10)^8+M)^n$ por el teorema del binomio, observamos que todos los términos contienen potencias de $(10)^8$, menos el último, M^n; por lo tanto, sólo éste influye en las ocho últimas cifras del resultado. El problema se reduce entonces a probar que M^n termina en 12890625 para cualquier valor de n. Ahora bien, $M^2=(12890625)^2=$ $=166168212890625$.

Supongamos que $M^n=a(10)^8+M$, entonces $M^{n+1}=M^nM=$ $=(a(10)^8+M)M=(aM)(10)^8+M^2$, el cual también termina en 12890625.

Hemos, pues, demostrado la aserción por medio de inducción finita.

CLARA INES SANCHEZ.

Otras soluciones: José A. Uribe Botero, Guillermo Arias.

118. - Tenemos

$$S_{n,p+1} = \sum_{k=1}^{n} k^{p+1} = \sum_{k=1}^{n} k^{p+1} - \sum_{k=1}^{n} k^{p} + \sum_{k=1}^{n} k^{p}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^{p} + \sum_{k=1}^{n} (1-k)k^{p}$$

$$= S_{n,p} + 1.2^{p} + 2.3^{p} + \ldots + (n-1)n^{p}$$

Sumando y restando $1^p = S_{1,p}$ en el segundo miembro de la anterior igualdad,, tenemos :

$$S_{n,p+1} = S_{n,p} + 1^{p} + 2^{p} + (1+1)3^{p} + (2+1)4^{p} + \ldots + ((n-2)+1)n^{p} - S_{1,p}$$

$$= S_{n,p} + (1^{p} + 2^{p} + \ldots + n^{p}) + 3^{p} + 2.4^{p} + \ldots + (n-2)n^{p} - S_{1,p}$$

$$= 2S_{n,p} + 3^{p} + 2.4^{p} + \ldots + (n-2)n^{p} - S_{1,p}$$

Sumando y restando ahora $1^p + 2^p = S_{2,p}$, en el segundo miembro de la igualdad, tenemos :

$$S_{n,p+1} = 2S_{n,p} + (1^{p} + 2^{p}) + 3^{p} + (1+1)4^{p} + \ldots + ((n-3)+1)n^{p} - S_{2,p} - S_{1,p}$$

$$= 2S_{n,p} + (1^{p} + 2^{p} + 3^{p} + 4^{p} + \ldots + n^{p}) + 4^{p} + \ldots + (n-3)n^{p}$$

$$- S_{2,p} - S_{1,p}$$

$$= 3S_{n,p} + 4^{p} + \ldots + (n-3)n^{p} - (S_{2,p} + S_{1,p}).$$

Repitiendo n veces éste procedimiento de suma y resta tendremos finalmente :

$$S_{n,p+1} = (n+1)S_{n,p} - \sum_{k=1}^{n} S_{k,p}$$

ALUMNOS PRIMER AÑO,

Facultad de Matemáticas, U. NAL.