Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen XXV (1991) pgs. 11- 16

UNA APLICACION DEL TEOREMA DE LINEALIZACION DE HARTMAN

por

Raúl NAULIN

ABSTRACT. In this note we consider the ordinary differential equation $U' = AU + f(t,U)$, where A is a real, constant, $n \times n$ matrix with eigenvalues satisfying $\Re e\lambda = 0$. We assume that the solution $U = 0$ of the system $U' = AU$ is stable. f is a C^1 function, $lim_{U\to 0} f(t,U) = 0$ and $lim_{U\to 0} Df(t,U) = 0$ uniformly in t (Df is the derivate of f with respect to U). We prove that for any $\mu > 0$, there exists $\delta(\mu) > 0$ such that for solutions U_1, U_2 with initial conditions $\xi_1, \xi_2, \xi_1 \neq \xi_2, |\xi_1| < \delta$ we have $lim_{t\to\infty} |U_1(t) - U_2(t)| e^{\mu t} = \infty$.

§1. Introducción. Supongamos que A es una matriz constante con $n \times n$ con coeficientes reales, cuyos valores propios tienen parte real no nula. Consideremos el sistema

$$X' = AX + f(X) \tag{1}$$

donde f es un campo de clase C^1. En [3] Hartman demuestra un teorema de linealización, que fundamentalmente asegura la existencia de un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo que envía las soluciones del sistema (1) en soluciones del sistema lineal $X' = AX$.

En [4], K. Palmer, utilizando las técnicas de la teoría de las dicotomías exponenciales, generalizó este resultado para los sistemas no autónomos. Reproducimos aquí textualmente su teorema, en el cual se apoya nuestro trabajo. Consideremos el sistema:

$$X' = B(t)X + g(t, X) \tag{2}$$

donde $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua tal que

(C1) $|g(t,X)| \leq M$, $m > 0$, para todo $(t, X) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.

(C2) $|g(t,X) - g(t,Y)| \leq \gamma|X-Y|$, para todo (t, X), en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, y γ es una constante.

(C3) Suponemos que el sistema:

$$X' = B(t)X \tag{3}$$

admite una dicotomía exponencial, es decir, que existen una matriz de proyección P $(PP = P)$, una matriz fundamental de (3) que denotaremos por Φ, y constantes positivas K y α tales que:

$$|\Phi(t)P\,\Phi^{-1}(s)|\,,\ |\Phi(s)(I-P)\,\Phi^{-1}(t)| \leq Ke^{\alpha(s-t)},\quad t \geq s. \tag{4}$$

TEOREMA 1. (Hartman-Palmer, [4]). *Si* $4\gamma K \leq \alpha$, *entonces existe una única función* $H(t, X) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *con las dos propiedades siguientes:*

(i) *La función,* $H(t,X) - X$ *es acotada en* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,

(ii) *Si* $X(t)$ *es una solución del sistema (2), entonces* $H(t, X(t))$ *es solución de* (3).

Además, H *es continua en* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ y $|H(t,X) - X| \leq 4kM\alpha^{-1}$, *para todo* (t,X). *Para cada t fijo* $H_t(X) := H(t,X)$ *es un homeomorfismode* $\mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}^n$. $L(t,X) := H_t^{-1}(x)$ *es continua en* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ *y si* $y(t)$ *es cualquier solución de* (3) *entonces* $L(t, y(t))$ *es solución de* (2).

En nuestro trabajo daremos una aplicación de este teorema a sistemas casi lineales $U' = AU + f(t,U)$, donde la matriz A tiene todos sus valores propios con parte real nula.

Este tipo de sistemas, por ejemplo, aparecen en la construcción de la variedad central para sistemas $X' = F(x)$, $F(0) = 0$, para los cuales la matriz jacobiana de F en $x=0$, se puede diagonalizar: $DF(0) = \mathrm{diag}(A,B)$, donde todos los valores propios de

A tienen parte real nula y todos los valores propios de B tienen parte real negativa (ver [2]).

§2. Planteamiento del problema. Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$U' = AU + f(t, U), \quad U \in \mathbb{R}^n \tag{5}$$

donde A es una matriz constante, cuyos valores propios tienen todos parte real nula y $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^1, con la condiciones siguientes:

(H1) $lim_{U \to 0} f(t, U) = 0$ y $lim_{U \to 0} Df(t, U) = 0$ uniformemente respecto a t. (Df denota la matriz jacobiana de f respecto a la variable U).

(H2) La solución $U = 0$ de (5) es estable en $[0, \infty)$.

El objetivo de esta comunicación es la demostración del siguiente resultado.

TEOREMA 2. *Sea* $\mu > 0$. *Entonces existe* $\delta = \delta(\mu)$ *tal que si* U_1, U_2 *denotan las soluciones del sistema* (1) *con condiciones iniciales* $U_i(0) = \xi_i$, $|\xi_i| \leq \delta$, $i = 1, 2$, $\xi_1 \neq \xi_2$, *entonces:*

(a) *Las soluciones* U_1 y U_2 *están definidas en* $[0, \infty]$.

(b) *Las soluciones* U_1 y U_2 *están acotadas.*

(c) $Lim_{t \to \infty} |U_1(t) - U_2(t)| e^{\mu t} = \infty$.

§3. Demostración del teorema 2. Denotaremos por $U(t, \xi)$ la solución de (5) que en el momento inicial $t = 0$ tiene condición inicial ξ. Sea $\varepsilon > 0$, entonces en virtud de la hipótesis de estabilidad (H2) podemos escoger $\delta > 0$ tal que cualquier solución de (5) con condición inicial $|\xi| < \delta$ cumple $|U(t, \xi)| < \varepsilon$ para $t \geq 0$. Tomemos dos de estas condiciones iniciales $\xi_1 \neq \xi_2$ y abreviemos $U_i(t) = U(t, \xi_i)$, $i = 1, 2$. Definamos

$$w(t) := (U_1(t) - U_2(t)) e^{\mu t} \tag{6}$$

en donde μ es la constante dada, en función de la cual se determinará posteriormente el valor de ε y en consecuencia el valor δ(μ). Entonces w satisface la siguiente ecuación:

$$w' = (A(t) + \mu I)w = F(t)w \tag{7}$$

donde I denota la matriz identidad y

$$F(t) := \int_0^1 Df\,\big(t, U_2(t) + s(U_1(t) - U_2(t)\big)ds \tag{8}$$

Así, nuestro objetivo es demostrar que $lim_{t\to\infty}|w(t)| = \infty$. En virtud de (8) y (H1) es posible fijar ε suficientemente pequeño para tener $|F(t)| \leq \beta$ para $t \geq 0$, donde β es un número pequeño que específicaremos pronto. Supongamos que nuestra tesis es falsa, es decir, que existe $N \geq 1$ tal que $|w(t)| \leq N$. Observemos que $w(t)$ es solución de la ecuación diferencial

$$X' = (A(t) + \mu I)X + G(|x|/N)\,F(t)X \tag{9}$$

donde $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^∞, tal que $G(t) = 1$ si $|t| \leq 1$, $G(t) = 0$ si $|t| \geq 2$ y $|G(t)| \leq 1$ para todo t en $\mathbb{R}$. Aplicaremos el teorema 1 a (9). Debemos verificar las hipótesis C1 - C3 para la función $g(t,x) := G(|x|/N)\,F(t)x$, y $B(t) := A + \mu I$:

(C1) La función $|G(|x|/N)|\,|x|$ se anula en el abierto definido por $|x| > 2N$, por lo tanto está acotada por una constante R. Así $|g(t,x)| \leq \beta R$.

(C2) Como G es una función de clase C^∞ con soporte compacto, entonces $g(t,x)$ es una función de Lipschitz: $|g(t,x) - g(t,y)| \leq \beta L|x - y|$, en donde L es una constante.

(C3) La existencia de la dicotomía exponencial (4) (con $P = I$) sigue del hecho que la matriz $B := A + \mu I$ es constante y todos sus valores propios λ satisfacen $\Re e\,\lambda = \mu > 0$.

Sea ahora β suficientemente pequeño para obtener $4\beta LK \leq \mu$. Entonces existe una única función $H: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que satisface las condiciones (i) y (ii) del teorema (1). Así concluímos que $H(t, w(t))$ es la solución de la ecuación:

$$X' = (A + \mu I)X \tag{10}$$

$H(t,w(t))$ no puede ser la solución trivial de (10). En caso contrario deberíamos tener $H(0, w(0)) = 0$, pero se verifica directamente que $K(t,x) := H(t,0)$ satisface las condiciones (i) y (ii) del teorema 1. Por la unicidad de existencia de la función que satisface estas condiciones se debería cumplir $H(t,x) = K(t,x)$ lo que implica $H(t,0) = 0$. La identidad $H(t,w(t)) = H(t,0) = 0$ nos conduce a $w(t) = 0$, en particular $w(0) = 0$ lo que contradice $w(0) = \xi_1 - \xi_2 \neq 0$.

Pero las soluciones $x(t)$ no nulas de (10) satisfacen $lim_{t\to\infty}|x(t)| = \infty$, y por lo tanto $lim_{t\to\infty}|H(t,w(t))| = \infty$. Luego la función $H(t,w(t))$ -$w(t)$ no es acotada pues $w(t)$ lo es. Esto contradice la tesis del teorema 1 que asegura el acotamiento de $H(t,x) - x$.

Agradecimientos. El autor agradece al árbitro de este artículo por su cuidadosa lectura y por sus sugerencias que contribuyeron a la elaboración final de esta publicación.

REFERENCIAS

[1] Coppel, W.A., *Dichotomies in Stability Theory,* Lecture Notes in Mathematics 629. Springer Verlag, Berlin, 1978

[2] Carr, J. , *Aplications of Center Manifold Theory*, Applied Mathematical Sciences 35. Springer Verlag, Berlin, 1981.

[3] Hartman, P., *Ordinary Differential Equations,* John Wiley, Nueva York, 1964.

[4] Palmer, K.J., *A Generalization of Hartman's Linearization Theorem.* J . Math. Ann. and App. 41, 753-758, 1973.

Universidad de Oriente
Departamento de Matemáticas
Cumana, Venezuela

(Recibido en febrero de 1990, la versión revisada en octubre de 1990)