Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXV (1991) pgs. 35 - 80

POLINOMIOS ORTOGONALES RELACIONADOS CON PROBLEMAS ESPECTRALES

por

JAIRO CHARRIS CASTAÑEDA,* GUSTAVO SALAS Y VICTORIA SILVA

ABSTRACT. Some Systems of orthogonal polynomials related to the Chebichev polynomials and to spectral problems are considered. One of the systems presents embedded eigenvalues. Their orthogonality measures an their spectra are described in detail. Basic material is explained.

SUMARIO. Se consideran tres sistemas de polinomios ortogonales relacionados con los polinomios de Chebichev y con ciertos problemas espectrales. Uno de tales sistemas presenta valores propios interiores al espectro. Las medidas de ortogonalidad y los espectros de los tres sistemas se estudian en detalle. Se describe el material básico necesario.

§1. INTRODUCCION. En [6], T.S. Chihara (v. también [5]) ha estudiado el sistema de polinomios ortogonales $\{S_n(x)\}$ definido por las relaciones de recurrencia.

$$xS_{2n}(x) = S_{2n+1}(x) + aS_{2n-1}(x),$$

$$xS_{2n}(x) = S_{2n+2}(x) + bS_{2n}(x), \qquad n \geq 0, \quad (1.1)$$

y las condiciones iniciales

$$S_{-1}(x) = 0, \qquad S_0(x) = 1. \quad (1.2)$$

AMS-MOS Subject Classification. Primary 47B25, 33A65. Secondary 47B15, 33A70

* Author partially supported by NSF-INT 8803099 and by Colciencias

Se supone que $a, b > 0$.

Relaciones de recurrencia de la forma (1.1) han aparecido recientemente en el estudio de diversos procesos en físico-química (Slim [17], Wheeler [20]), y corresponden a tri-diagonalizaciones del Hamiltoniano que describe el proceso (Broad [4]; Heller, Yamani and Reinhardt [9], [10]), con respecto a bases apropiadas del espacio L^2. Los polinomios $\{S_n(x)\}$ son el sistema ortogonal asociado a la matriz de Jacobi resultante de tal diagonalización.

En este artículo estudiaremos dos sistemas $\{P_n(x)\}$ y $\{Q_n(x)\}$ resultantes de cambios en las condiciones iniciales de $\{S_n(x)\}$. Así, $\{P_n(x)\}$ será el sistema determinado por (1.1) para $n \geq 1$ y por las condiciones iniciales

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x, \qquad P_2(x) = x^2 - bc, \qquad c > 0 \tag{1.3}$$

(nótese que $S_2(x) = x^2 - b$) mientras que $\{Q_n(x)\}$ estará dado por (1.1) para $n \geq 1$ y por

$$Q_0(x) = 1, \qquad Q_1(x) = x, \qquad Q_2(x) = cx^2 - cb, \qquad c > 0 \tag{1.4}$$

Tales cambios corresponden a variaciones en el estado inicial del proceso y representan la búsqueda de condiciones iniciales que determinen la existencia de concentraciones espectrales, valores propios sumergidos en el espectro continuo y polos de resonancia. Permiten además estudiar en detalle, en un caso relativamente simple, el efecto de perturbaciones de rango finito sobre el espectro de un operador lineal autoadjunto, lo cual constituye su principal interés desde el punto de vista matemático.

Si bien los fenómenos esperados no se encontraron, los polinomios determinados por (1.3) y (1.4) tiene algunas propiedades interesantes. Las investigaciones en torno a ellos condujeron, además, a un sistema $\{R_n(x)\}$ que si presenta características peculiares (puntos de masa interiores al espectro) y que puede describirse, como $\{S_n(x)\}$, $\{P_n(x)\}$ y $\{Q_n(x)\}$, en términos de los polinomios de Chebichev. Aunque ignoramos si tal sistema se relaciona con procesos físicos, ha motivado toda una serie de investigaciones sobre las perturbaciones que conducen a resultados curiosos que esperamos presentar en un futuro próximo.

En la sección Nº2 estudiaremos las nociones básicas relativas a los polinomios ortogonales y las matrices de Jacobi. Aprovecharemos la ocasión para mejorar y completar algunos resultados de [5]. En la Sección Nº3 revisaremos brevemente las propiedades necesarias de los polinomios de Chebichev. Las Secciones Nº4 y Nº5 estarán dedicadas a los sistemas $\{P_n(x)\}$ y $\{Q_n(x)\}$, y la Nº6, a los $\{R_n(x)\}$.

El presente artículo se originó en los resultados obtenidos por V. Silva en su tesis de maestría y por G. Salas en su trabajo de especialización, ambos dentro del Programa de Postgrado en Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá. Algunas de las ideas en que se basan fueron presentadas durante el XIII Congreso Nacional de Matemáticas, Bogotá, Agosto de 1987, y una generalización del sistema descrito en el §6 fue presentado por el primer autor en la primera conferencia Ruso-Americana sobre teoría de la aproximación, Tampa, Florida, marzo de 1990

§2. MATERIAL BASICO. Un sistema de polinomios reales $\{P_n(x)\}$ es un sistema ortonormal (S.O.N.) si

1) Para todo $n \geq 0, p_n(x)$ tiene grado n y su coeficiente de máximo grado es positivo, k_n, es positivo. Además, $p_0(x) = 1$.

2) Existe una medida positiva μ, soportada por el eje real, tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_m(x)\, p_n(x) d\mu = \delta_{mn}, \qquad m, n \geq 0 \tag{2.1}$$

Se dice en tal caso que $\{p_n(x)\}$ es ortonormal con respecto a μ y que μ es una medida de ortonormalidad de $\{p_n(x)\}$.

Si $\{p_n(x)\}$ es un S.O.N., entonces $\{p_n(x)\}$ es una base (algebráica) del espacio $\mathbb{C}[x]$ de los polinomios complejos. Esto implica que existen números reales a_n, b_n, $n \geq 0$, únicos, tales que

$$b_n > 0, \quad n \geq 1, \tag{2.2}$$

y que

$$xp_n(x) = b_{n+1}p_{n+1}(x) + a_np_n(x) + b_np_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \tag{2.3}$$

donde

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = \frac{x - a_0}{b_1}. \tag{2.4}$$

De hecho, a_n, b_n están determinados por

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p_n^2(x)d\mu, \quad b_{n+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p_n(x)p_{n+1}(x)d\mu \tag{2.5}$$

$n \geq 0$, y se verifica además, a partir de (2.5) y con $b_0 = 0$, que

$$a_n^2 + b_n^2 + b_{n+1}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_n^2(x)d\mu, \quad n \geq 0. \tag{2.6}$$

En general existen muchas medidas μ para las cuales (2.1) satisface (v.[6], p.73). Sin embargo, si el soporte Suppμ de μ es acotado, μ es única, como se deduce del teorema de aproximación de Weierstrass (v.[5], p.99). La condición de acotación del soporte implica, en virtud de (2.5) y (2.6), que existe una constante $M > 0$ tal que

$$|a_n| \leq M/3, \quad b_{n+1} \leq M/3, \qquad n \geq 0. \tag{2.7}$$

Supóngase ahora que $\{p_n(x)\}$ es el sistema de polinomios reales dado por una relación de recurrencia de la forma (2.3) con condiciones iniciales (2.4). Supóngase además que (2.7) se satisface, lo cual haremos en todo lo que sigue. La matriz tridiagonal, simétrica e infinita

$$J = \begin{bmatrix} a_0 & b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ b_1 & a_1 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & b_2 & a_2 & b_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

se denomina la matriz de Jacobi de $\{p_n(x)\}$. Sea $\ell_2(\mathbb{C})$ el conjunto de las sucesiones complejas $\{x_n | n \geq 0\}$ tales que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty. \tag{2.9}$$

Con el producto escalar

$$(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{k=0}^{\infty} x_n \overline{y}_n, \tag{2.10}$$

$\ell_2(\mathbb{C})$ es un espacio de Hilbert.

Sea $\{e_n | n \geq 0\}$ la base canónica de $\ell_2(\mathbb{C})$: $e_n = (\delta_{0n}, \delta_{1n}, \delta_{2n}, ..)$, $n \geq 0$. El operador lineal L: $\ell_2(\mathbb{C}) \to \ell_2(\mathbb{C})$, definido por

$$L\, e_n = b_{n+1} e_{n+1} + a_n\, e_n + b_n\, e_{n-1}, \qquad n \geq 0, \tag{2.11}$$

y extensión lineal continua (suponemos que $b_0 = 0$, $e_{-1} = 0$), es un operador autoadjunto acotado, con

$$\|L\| \leq M, \tag{2.12}$$

y cuya matriz, con respecto a $\{e_n\}$, es J. Se dice que L es el operador de Jacobi de $\{p_n(x)\}$, y se verifica fácilmente por inducción a partir de (2.3) y (2.4) que

$$p_n(L)\}\ e_0 = e_n, \qquad \mathrm{n} \geq 0 \tag{2.13}$$

Para todo $n \geq 0$, sean $\mathbb{J}_0 = 1$, $\mathbb{J}_1 = [a_0]$,

$$J_n = \begin{bmatrix} a_0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & b_{n-1} & a_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad J_n = \begin{bmatrix} J_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.14}$$

donde $\hat{J}_n$ es infinita. Como se demuestra en [5], p.85, los valores propios de J_n son las raíces $x_{n1} < x_{n2} < \cdots < x_{n,n}$ de $p_n(x)$, y están todos en $[-M, M]$. Como J_n es simétrica, existe una matriz unitaria U_n tal que

$$U_n^T J_n U_n = \begin{bmatrix} x_{n1} & & & 0 \\ & x_{n2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & x_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

Si

$$\hat{U}_n = \begin{bmatrix} U_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

entonces

$$\widehat{U}_n^T \hat{J}_n \widehat{U}_n = \left[\begin{array}{cccc:c} x_{n1} & & 0 & & \\ & & 0 & & \\ & & & & 0 \\ 0 & & & x_{nn} & \\ \hdashline & & 0 & & 0 \end{array}\right] \tag{2.17}$$

La relación (2.17) puede escribirse (v.[5], p. 108) en la forma

$$\hat{J}_n = \sum_{k=1}^{n} x_{nk}\, \mu_{nk}\, \widehat{F}_{nk}, \tag{2.18}$$

donde

$$\mu_{nk} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} p_i^2(x_{nk})}, \tag{2.19}$$

$$F_{nk} = u_k^{(n)} (u_k^{(n)})^T, \tag{2.20}$$

siendo $u_k^{(n)}$ la k-ésima columna de U_n, y

$$\widehat{F}_{kn} = \begin{bmatrix} F_{nk} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.21}$$

Si se define entonces

$$E_{nx} = \begin{cases} 0, & x < x_{n1}, \\ \sum_{i=1}^{k} \mu_{ni} \hat{F}_{ni}, & x_{nk} \leq x < x_{n,k+1}, \quad k \geq 1, \\ I & x \geq x_{nn}, \end{cases} \tag{2.22}$$

E_{nx} es una resolución de la identidad, continua por la derecha para $\hat{J}_n$, así que si es L_n el operador de $\ell_2(\mathbb{C})$ cuya matriz de Jacobi con respecto a $\{e_n\}$ es $\hat{J}_n$ entonces

$$L_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dE_{nx}. \tag{2.23}$$

Sea $\sigma_n(x) = (E_{nx}e_0;\, e_0)$. El principio de selección de Helly ([6], p.53) permite escoger una subsucesión $\{\sigma_{nk}\}$ de $\{\sigma_n\}$ la cual es puntualmente convergente hacia una función $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La función σ es no-decreciente y, sustituyéndola por la $\widehat{\sigma}(\gamma) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\sigma(\gamma+\varepsilon)$, si es necesario, se puede suponer que σ es continua por la derecha. Es fácil verificar (v.[5], p. 109) que, bajo las hipótesis (2.7), la medida μ, definida para toda función continua con soporte compacto por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\, d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d\sigma(x), \tag{2.24}$$

(donde la integral de la derecha es una integral usual de Riemann-Stieljes) tiene soporte Suppμ contenido en $[-M,M]$. (Obsérvese que σ es constante fuera de $[-M,M]$ y que (v.[6], p.54)

$$\int_{-\infty}^{-\infty} f\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d\sigma_{nk}(x) \tag{2.25}$$

para toda función continua f sobre $\mathbb{R}$).

Como se demuestra en [5], p.108, si $k + j < n$ entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_k(x) p_j(x)\, d\sigma_n(x) = \delta_{kj}. \tag{2.26}$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_k(t)p_j(t)d\mu = \lim_{i\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_k(t)p_j(t)d\sigma_{ni}(t) = \delta_{kj}. \quad (2.27)$$

Entonces $\{P_n(x)\}$ es un S.O.N., con medida de ortogonalidad μ, cuyo soporte está contenido en $[-M,M]$.

Por otra parte (v.[5], p.111), si $\{p_n{}^*(x)\}$ es el sistema de polinomios reales definido como $\{p_n(x)\}$ por (2.3) para $n \geq 1$ pero con las condiciones iniciales

$$p_0^*(x) = 0, \; p_1^*(x) = 1/b_1, \quad (2.28)$$

entonces

$$\frac{p_n^*(x)}{p_n(x)} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_{n_k}}{x_{n_k} - x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma_n(t)}{x - t}, \qquad x \notin [-M,M] \quad (2.29)$$

así que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{nk}^*(x)}{p_{nk}(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma_n(t)}{x-t}, \qquad x \notin [-M,M] \quad (2.30)$$

La relación (2.30) fue establecida en [5], p.111, y es todo lo que se necesita usualmente en las aplicaciones. Demostraremos, sin embargo, que, en realidad,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n^*(x)}{p_n(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{x - t}, \qquad x \notin [-M,M], \quad (2.31)$$

y que la convergencia es uniforme en compactos de $\mathbb{C} - [-M,M]$. Esta demostración fue omitida en [5].

La relación (2.31) se conoce como el Teorema de Markov y se demuestra usualmente recurriendo a la teoría de las fracciones continuas. La demostración que sigue, basada, con algunas correcciones, en ideas producidas por M.E.H. Ismail en [11], es, esencialmente, analítico-funcional.

En primer lugar, es importante observar la siguiente relación, conocida como la identidad de Abel (v.[5], p.83):

$$b_{n+1}\left[p_n(x)p_{n+1}^*(x) - p_{n+1}(x)p_n^*(x)\right] = 1, \quad n \geq 0. \quad (2.32)$$

La relación (2.32) se verifica fácilmente por inducción a partir de (2.3), (2.4) y (2.28). De (2.32) se obtiene que

$$\frac{p_{n+1}^*(z)}{p_{n+1}(z)} - \frac{p_n^*(z)}{p_n(z)} = \frac{1}{b_{n+1}} \cdot \frac{1}{p_n(z)p_{n+1}(z)}, \quad z \notin [-M,M]. \quad (2.33)$$

Ahora, el desarrollo en serie de Laurent en la corona $|z| > M$ del miembro de la derecha en (2.33) comienza con $c_{2n+1} \cdot z^{-2n-1}$. Esto implica que los coeficientes $\mu_j^{(n)}$, de z^{-j-1}, $j = 0, 1, 2, \cdots, 2n$, en los desarrollos de Laurent de $p_n^*(z)/p_n(z)$ y $p^*_{n+1}(z)/p_{n+1}(z)$ en la misma corona, coinciden:

$$\mu_j^{(n)} = \mu_j^{(n+1)}, \quad j = 0, 1, \cdots, 2n. \quad (2.34)$$

Pero, de (2.29) se deduce que

$$\frac{p_n^*(z)}{p_n(z)} = \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j-1} \int_{-\infty}^{+\infty} t^j d\sigma_n(t), \quad |z| > M, \quad (2.35)$$

así que

$$\mu_j^{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^j d\sigma_n(t), \quad j = 0, 1, \cdots, 2n \quad (2.36)$$

De (2.36) se concluye que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t) d\sigma_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) d\sigma_m(t) \quad (2.37)$$

para todo polinomio $p(x)$ cuyo grado sea $\leq m+n$. Esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) d\sigma_n(t) = \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) d\sigma_{n_k}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) d\mu \quad (2.38)$$

para todo polinomio $p(x)$.

para todo polinomio $p(x)$.

Volvamos ahora a (2.31). Sean K un compacto de $\mathbb{C}$-$[-M,M]$ y $a_0 < -M < M < b_0$ tales que $K \cap [a_0, b_0] = \emptyset$. Como la función $1/(x-t)$ es continua en $K \times [a_0, b_0]$, dado $\varepsilon > 0$ existe, en virtud del teorema de aproximación de Stone-Weirstrass (v.[21]), un polinomio $p(x, t)$, de grado, digamos; m, tal que

$$\operatorname*{Sup}_{K \times [a_0, b_0]} \left| \frac{1}{x-t} - p(x,t) \right| \leq \varepsilon . \tag{2.39}$$

Se deduce que para $x \in K$ y $k \geq n \geq m$,

$$\left| \frac{p_n^*(x)}{p_n(x)} - \int_{a_0}^{b_0} \frac{d\mu(t)}{x-t} \right| \leq \left| \frac{p_n^*(x)}{p_n(x)} - \int_{a_0}^{b_0} p(x,t)\, d\sigma_n(t) \right| +$$

$$\left| \int_{a_0}^{b_0} p(x,t)\, d\sigma_n(t) - \int_{a_0}^{b_0} p(x,t)\, d\sigma_{n_k}(t) \right| + \left| \int_{a_0}^{b_0} p(x,t)\, d\sigma_{n_k}(t) - \int_{a_0}^{b_0} \frac{d\mu(t)}{x-t} \right|$$

Como el segundo término de la derecha es nulo se obtiene, de (2.29), (2.37) y (2,39), que

$$\left| \frac{p_n^*(x)}{p_n(x)} - \int_{a_0}^{b_0} \frac{d\mu(t)}{x-t} \right| \leq \varepsilon \left| \int_{a_0}^{b_0} d\sigma_n(t) \right| + \left| \int_{a_0}^{b_0} p(x,t)\, d\sigma_{nk}(t) - \int_{a_0}^{b_0} \frac{d\sigma_{n_k}(t)}{x-t} \right|$$

$$+ \left| \int_{a_0}^{b_0} \frac{d\sigma_{nk}(t)}{x-t} - \int_{a_0}^{b_0} \frac{d\mu(t)}{x-t} \right| \leq \varepsilon\, [\sigma_n(b_0) - \sigma_n(a_0)]$$

$$+ \varepsilon\, (\sigma_{n_k}(b_0) - \sigma_{n_k}(a_0)) + \sup_{z \in k} \sup_{t \in [a_0, b_0]} \left| \frac{1}{z-t} \right| \left| \int_{a_0}^{b_0} d\sigma_{n_k}(t) - \int_{a_0}^{b_0} d\sigma_{n_k}(t) \right|$$

Como el miembro de la derecha es $\leq 2\varepsilon\, [\sigma(b_0) - \sigma(a_0)]$ cuando $n \to \infty$, se deduce que el de la izquierda tiende a 0, uniformemente en K, cuando $n \to \infty$. Esto demuestra (2.31).

La función $x(z)$ definida por

$$X(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{p_n^*(z)}{p_n(z)} \tag{2.40}$$

donde el límite exista (lo cual ocurre si $z \notin [-M, M]$), se denomina, por buenas razones (v.[5], p. 105), la fracción continua de $\{p_n(x)\}$. Los polinomios $\{p_n^*(x)\}$, que juegan un papel importante en la teoría de los polinomios ortogonales, se denominan, por razones obvias, los polinomios numeradores del sistema $\{p_n(x)\}$.

Sea ahora E_γ el operador de $\ell_2(\mathbb{C})$ definido por

$$E_\gamma e_k = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\gamma} p_k(t) p_j(t) \, d\mu(t) \right] e_j, \qquad k = 0, 1, \cdots \tag{2.41}$$

y extensión lineal continua. Obsérvese que $E_\gamma = 0$ si $\gamma < -M$, $E_\gamma = I$ si $\gamma \geq M$. Es también fácil verificar que $\lim_{\gamma \to \mu^+} \| E_\gamma x - E_\mu x \| = 0$ y que $E_\gamma E_\mu = E_\alpha$, $\alpha = \text{mín} \{\gamma, \mu\}$. En particular $E_\gamma^2 = E_\gamma$. Como

$$(E_\gamma e_k ; e_j) = \int_{-\infty}^{\gamma} p_k(t) p_j(t) \, d\mu(t), \tag{2.42}$$

se deduce, en particular, que

$$(E_\gamma e_0 ; e_0) = \int_{-\infty}^{\gamma} d\mu = \sigma(\gamma) \tag{2.43}$$

y, más generalmente, que

$$d(E_\gamma e_k ; e_j) = p_k(\gamma) p_j(\gamma) \, d\sigma(\gamma). \tag{2.44}$$

Dado que entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma \, d(E_\gamma e_k ; e_j) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma \, p_k(\gamma) p_j(\gamma) \, d\sigma(\gamma) \tag{2.45}$$

$$= b_{k+1} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{k+1}(\gamma) p_j(\gamma) \, d\sigma(\gamma) + a_k \int_{-\infty}^{+\infty} p_k(\gamma) p_j(\gamma) \, d\sigma(\gamma)$$

$$+ b_k \int_{-\infty}^{+\infty} p_{k-1}(\gamma) p_j(\gamma) \, d\sigma(\gamma)$$

$$= b_{k+1}\,\delta_{k+1,j} + a_k\,\delta_{kj} + b_k\,\delta_{k-1,j}$$

$$= (b_{k+1}e_{k+1} + a_k e_k + b_k e_{k-1}; e_j)$$

$$= (L e_k; e_j),$$

se concluye que $\{E_\gamma \mid \gamma\in \mathbb{R}\}$ es una resolución de la identidad para L, continua por la derecha, y que la medida espectral de L, $d(E_\gamma e_0; e_0)$, es μ (lo anterior constituye, en esencia, una demostración del teorema espectral para los operadores de Jacobi).

Ahora, $\mathrm{Supp}\mu = C\mu \cup P\mu$, donde $C\mu$, denominado el soporte continuo de μ, es el conjunto de los puntos de incremento continuo de σ, es decir, de los puntos $\gamma\in\mathbb{R}$ en los cuales σ es continua y $\sigma(\gamma_1) < \sigma(\gamma_2)$ si. $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$. Por otra parte, $P\mu$, denominado el soporte puntual, es el conjunto, necesariamente enumerable, de puntos de discontinuidad de σ, es decir, de los puntos $\gamma\in\mathbb{R}$ tales que $\sigma(\gamma)-\sigma(\gamma\text{-}0) \neq 0$. (Aquí, $\sigma(\gamma\text{-}0) = \text{lím}_{\varepsilon\to 0^+}\sigma(\gamma\text{-}\varepsilon)$). Claramente

$$\sigma(\gamma) - \sigma(\gamma - 0) = \mu(\{\gamma\}), \qquad \gamma\in\mathbb{R} \tag{2.46}$$

Por lo tanto, $\mu(\{\gamma\}) \neq 0$ si y sólo si $\gamma\in P\mu$.

Como se demuestra en [5], p. 96, el espectro $\sigma(L)$ de L coincide con $\mathrm{Supp}\mu$, $\sigma_C(L)$, el espectro continuo de L, coincide con C_μ, y $\sigma_P(L)$, el espectro puntual, conjunto de los valores propios de L, es P_μ.

Por definición, una sucesión $\vec{x} = \{x_n \mid n \geq 0\}$ de números complejos es un vector propio de L para el valor propio γ si y sólo si $\vec{x}\in \ell_2(\mathbb{C})$, $\vec{x} \neq 0$ y $L(\vec{x}) = \gamma\vec{x}$. En virtud de la definición de L, esto último es equivalente a que

$$\gamma x_n = b_{n+1}x_{n+1} + a_n x_n + b_n x_{n-1}, \qquad n \geq 0 \tag{2.47}$$

(donde $b_0 = 0$, $x_{-1} = 0$), así que

$$x_n = x_0 p_n(\gamma), \qquad n \geq 0 \tag{2.48}$$

Nótese que entonces $x_0 \neq 0$. Por lo tanto, γ es un valor propio de L si y sólo si $\sum_{n=0}^{\infty} p_n^2(\gamma) < +\infty$.

Demostraremos ahora un resultado, generalmente atribuído a Chebichev, el cual no se demostró en [5]. La demostración se basa en el análisis funcional, y evita todo uso de la teoría de fracciones continuas, de las desigualdades de Chebichev y, en general, de las técnicas propias del problema de los momentos (v, [1], [2], [16]).

TEOREMA 2.1. *Un punto está en P_μ si y solo si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n^2(\gamma) < +\infty. \tag{2.49}$$

En tal caso,

$$\mu(\{\gamma\}) = \sigma(\gamma) - \sigma(\gamma - 0) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n^2(\gamma)}. \tag{2.50}$$

Demostración. Como hemos dicho, $\gamma \in P_\mu$ si y solo si γ es un valor propio de L. Por lo tanto, $\gamma \in P_\mu$ asegura que (2.49) se satisface. Recíprocamente, si (2.49) se satisface, $\{p_n(\gamma) | \text{ n} \geq 0\}$ es un vector propio de L, como se deduce de (2.3), y $\gamma \in P_\mu$. Obsérvese que (2.48) implica, en particular, que el subespacio $N_\gamma(L)$ de $\ell_2(\mathbb{C})$ generado por los vectores propios de L para γ, es decir, $\text{Ker}(L - \gamma I)$, tiene dimensión uno, y que $\{p_n(\gamma)\}$ es una base. Escribamos $\vec{x}_\gamma = \{p_n(\gamma)\}$. Es fácil ver ([21], p.309) que $lim_{\varepsilon \to 0+} E_{\gamma-\varepsilon} \vec{x}_\gamma$ existe para todo $\vec{x} \in \ell_2(\mathbb{C})$ (en el sentido de la norma). Escribiremos $E_{\gamma-0}\, \vec{x} = lim_{\varepsilon \to 0+} E_{\gamma-\varepsilon}\, \vec{x}$ y $E_{\gamma-0}$ así definida es una proyección ortogonal tal que $E_\mu E_{\gamma-0} = E_{\gamma-0} E_\mu = E_\mu$ si $\mu < \gamma$, $E_{\gamma-0} E_\mu = E_{\gamma-0}$ si $\gamma \leq \mu$. Se tiene (v.[21], p.319) que $(E_\gamma E_{\gamma-0})\, \vec{x} = \vec{x}$ para todo vector propio $\vec{x}$ para γ. En particular, $(E_\gamma - E_{\gamma 0})\, \vec{x}_\gamma = \vec{x}_\gamma$, de lo cual se obtiene que

$$\|\vec{x}_\gamma\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^2(\gamma) = \lim_{\mu \to \gamma^-} \int_\mu^\gamma d(E_t \vec{x}_\gamma; \vec{x}_\gamma) \tag{2.51}$$

Por otra parte, $E_\gamma p(L) = p(L)E_\gamma$ para todo polinomio $p(x)$ (v.[21], pág.311), y de

$$(p(L)E_\gamma\vec{x};\vec{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\, d(E_t E_\gamma \vec{x};\vec{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\, d(E_t\vec{x};\vec{y}) \quad (2.52)$$

se deduce que

$$d(p(L)E_\gamma\vec{x};\vec{y}) = p(t)\, d(E_\gamma\vec{x};\vec{y}). \quad (2.53)$$

Como

$$\int_\mu^\gamma d(E_t\vec{x}_\gamma;\vec{y}_\gamma) = \sum_{m,\, n=0}^{\infty} p_n(\gamma)\; p_m(\gamma) \int_\mu^\gamma d(E_t e_n; e_m) \quad (2.54)$$

y $e_k = p_k(L)e_0$, (2.13) permite concluir que

$$\int_\mu^\gamma d(E_t\vec{x}_\gamma;\vec{y}_\gamma) = \sum_{m,\, n=0}^{\infty} p_n(\gamma)\; p_m(\gamma) \int_\mu^\gamma p_n(t)\; p_m(t) d(E_t e_0; e_0) \quad (2.55)$$

Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n^2(\gamma) = \lim_{\mu\to\gamma} \int_\mu^\gamma d(E_t\vec{x}_\gamma;\vec{y}_\gamma) = \left\{ \sum_{m,n=0}^{\infty} p_n^2(\gamma)\, p_m^2(\gamma) \right\} \left\{ \sigma(\gamma) - \sigma(\gamma - 0) \right\}, \quad (2.56)$$

así que

$$\sigma(\gamma) - \sigma(\gamma - 0) = \mu(\{\gamma\}) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n^2(\gamma)} \quad (2.57)$$

Esto demuestra el teorema. □

Sea $\{P_n(x)\}$ un sistema de polinomios que satisface la relación de recurrencia

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (2.58)$$

donde A_n, B_n son números reales, y las condiciones iniciales

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = A_0 x + B_0 . \quad (2.59)$$

Supóngase que

$$C_{n+1} A_{n+1} A_n > 0, \quad n \geq 0. \tag{2.60}$$

Entonces

$$k_n = \left(A_0/A_n\right) C_1 \cdots C_n = \prod_{k=0}^{n-1} (A_k C_{k+1})/A_{k+1} > 0, \tag{2,61}$$

y se verifica inmediatamente que el sistema de polinomios

$$p_n(x) = P_n(x)/\sqrt{k_n}, \qquad n \geq 0 \tag{2-62}$$

satisface la relación de recurrencia (2.3) y las condiciones iniciales (2.4), con

$$a_n = -B_n / A_n, \quad b_{n+1} = \sqrt{C_{n+1} / A_n A_{n+1}}, \quad n \geq 0 \tag{2.63}$$

$\{p_n(x)\}$ es, por lo tanto, un S.O.N. con respecto a una medida μ, (la cual tendrá soporte acotado si (2.7) se satisface). Entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_m(x) P_n(x) d\mu = k_n \delta_{mn}; \quad m, n \geq 0 \tag{2.64}$$

Se dice que $\{P_n(x)\}$ es un sistema ortogonal de polinomios (S.O.G.) con respecto a μ y que μ es una medida de ortogonalidad para $\{P_n(x)\}$.

Los polinomios numeradores $\{P_n^*(x)\}$ de $\{P_n(x)\}$ se definen mediante (2.58) para $n \geq 1$, con

$$P_0^*(x) = 0, \quad P_1^*(x) = A_0. \tag{2.65}$$

Se verifica que

$$P_n^*(x) = \sqrt{k_n}\, p_n^*(x), \qquad n \geq 0, \tag{2.66}$$

así que

$$X(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n^*(z)}{P_n(z)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{z-t}, \qquad z \notin [-M,M]. \tag{2.67}$$

Si μ es una medida con soporte compacto en $\mathbb{R}$,

$$\widehat{\mu}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{z-t}, \qquad z \notin supp\, \mu, \tag{2.68}$$

es una función analítica de z, denominada la transformada de Cauchy-Stieltjes de μ. La medida μ puede recuperarse, a partir de $\widehat{\mu}(z)$, mediante la fórmula de inversión de Stieltjes (v.[5], p.112; [4], [12]):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d\mu(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{\widehat{\mu}(x+i\varepsilon) - \widehat{\mu}(x+i\varepsilon)\right\} f(x)dx, \tag{2.69}$$

válida para toda función continua f en $\mathbb{R}$. Si

$$\sigma(\gamma) = \int_{-\infty}^{\gamma} d\mu \tag{2.70}$$

es la función de distribución de μ, entonces

$$\sigma(\gamma) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{\widehat{\mu}(x+i\varepsilon) - \widehat{\mu}(x+i\varepsilon)\right\} dx. \tag{2.71}$$

De (2.31) se deduce que si μ es la medida de ortogonalidad de $\{P_n(x)\}$ entonces $X(z) = -2\pi i\,\widehat{\mu}(z)$, $z \notin [-M,M]$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d\mu(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \{X(x-i\varepsilon) - X(x+i\varepsilon)\} f(x)dx, \tag{2.72}$$

y

$$\sigma(\gamma) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\gamma} \{X(x-i\varepsilon) - X(x+i\varepsilon)\} dx, \tag{2.73}$$

NOTA 2.1. Sean

$$X_\varepsilon(x) = X(x-i\varepsilon) - X(x+i\varepsilon) \tag{2.74}$$

y

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0^+} X_\varepsilon(x) \tag{2.75}$$

en los puntos donde el límite exista. Claramente $\phi(x) = 0$ si $x \notin [-M, M]$. Supóngase que $\phi(x)$ existe en casi todo punto de un intervalo acotado $[a,b]$ y que $|X_\varepsilon(x)| \leq C = c(a,b)$ para casi todo $x \in [a,b]$ y todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0(a,b)$. Del teorema de convergencia de Lebesgue ([15], p. 36} se deduce que ϕ es integrable en $[a,b]$ y que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\,d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x)dx \tag{2.76}$$

para toda función continua con soporte compacto en (a,b). Más generalmente, si I es un intervalo abierto en el cual $\phi(x)$ existe para casi todo $x \in I$, y si para todo subintervalo cerrado $[a,b]$ de I es posible escoger $c(a,b)$ y $\varepsilon_0(a,b)$ como arriba, entonces ϕ es integrable en I y (2.76) vale para toda función continua con soporte compacto contenido en I. En efecto, si $[a,b] \subseteq I$ entonces $\phi(x) \geq 0$ para casi todo $x \in [a,b]$; si nó, sería posible encontrar un subconjunto compacto K de $[a,b]$, de medida de Lebesgue positiva, tal que $\phi(x) < 0$ para $x \in K$; pero entonces, de lo anterior,

$$\mu(K) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(x)\phi(x)dx < 0\,, \tag{2.77}$$

donde $C(x)$ denota la función característica de K; esto es absurdo. Como es posible escoger una sucesión $\{f_n\}$ de funciones continuas tales que $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq 1$ para todo $x \in I$, que el soporte de f_n sea un subintervalo cerrado de I, y que $f_n(x) \to 1$, $x \in I$, se deduce, del Teorema de Levi ([15], p.32), que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n \phi\, d\mu = \mu(I),$$

así que ϕ es integrable, con

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi\, d\mu = \mu(I).$$

Obsérvese que el argumento anterior no exige que existan c, $\varepsilon_0 > 0$, tales que $|X_\varepsilon(x)| \le c$ si $x \in I$ y $\varepsilon \le \varepsilon_0$.

Bajo las circunstancias anteriores se concluye que $I \cap P_\mu = \Phi$ y, si $\phi(x) > 0$ para casi todo $x \in I$, que $I \subseteq C_\mu$. Si $\bar{I} = (-M, M)$ entonces $\phi(x)dx$ es la parte absolutamente continua de μ. Si $\phi(x) > 0$ para casi todo $x \in (-M,M)$ y $\mu(\{\pm M\}) = 0$, entonces $C_\mu = \text{Supp}\mu = [-M,M]$.

El conjunto D_μ de los puntos aislados de Suppμ se denomina el soporte discreto de μ. Es claro que $D_\mu \subseteq P_\mu$. El siguiente criterio es útil para determinar si un punto γ está en D_μ, y el valor $\mu(\{\gamma\})$. Para su demostración, veáse [5], p.114.

TEOREMA 2.2. *Un punto γ está D_μ en si y solo si es un polo simple de $X(z)$. En tal caso,*

$$\mu(\{\gamma\}) = \text{Res}(X,\gamma). \tag{2.78}$$

DEFINICION 2.1. Un punto de masa de μ interior a Suppμ se denomina un punto de masa sumergido.

Si γ es un punto de masa sumergido de μ, $\gamma \in P_\mu - D_\mu$. Si L es un operador de Jacobi de $\{P_n(x)\}$ entonces $\gamma \in \overset{0}{\sigma(L)}$ y $\gamma \in \sigma_p(L)$.

Los polinomios numeradores $\{P_n{}^*(x)\}$ de $\{P_n(x)\}$ cumplen otro oficio importante. En efecto, cualquier sistema de polinomios $\{Q_n(x)\}$ que satisfaga (2.58) para $n \ge 1$ puede escribirse en la forma

$$Q_n(x) = AP_n(x) + BP_n{}^*(x), \quad n \ge 0 \tag{2.79}$$

con

$$A = Q_0(x), \quad B = \frac{1}{A_0}(Q_1(x) - Q_0(x)P_1(x)). \tag{2.80}$$

Si $\{Q_n(x)\}$ satisface (2.58) para $n \ge 0$ (con C_0 arbitrario) entonces $B = 0$; y si además $Q_0(x) = 1$, entonces $Q_n(x) = P_n(x)$, $n \ge 0$. La relación (2.79) resulta del hecho de que $\{P_n(x)\}$ y $\{P_n^*(x)\}$ forman un sistema linealmente independiente de soluciones de (2.58), como se deduce de la relación

$$\begin{vmatrix} P_n(x) & P_{n+1}(x) \\ P_n^*(x) & P_{n+1}^*(x) \end{vmatrix} = P_n(x)P_{n+1}^*(x) - P_{n+1}(x)P_n^*(x) \tag{2.81}$$

$$= A_0C_1\cdots C_n, \quad n \geq 0$$

otra de las formas de la identidad de Abel (v. (2.32)).

§3. LOS POLINOMIOS DE CHEBICHEV

Estableceremos ahora fórmulas para las fracciones continuas de los polinomios de Chebichev que serán útiles en el futuro. A pesar de que existe una extensa bibliografía sobre los polinomios de Chebichev, raramente se dan estas fórmulas explícitamente. Introduciremos, también, algunas funciones especiales que necesitaremos en las próximas secciones.

Los polinomios de Chebichev se primera clase $\{T_n(x)\}$ están dados por la relación de recurrencia

$$2x\, T_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x), \qquad n \geq 0 \tag{3.1}$$

y las condiciones iniciales

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x. \tag{3.2}$$

Los de segunda clase, $\{U_n(x)\}$, por

$$2xU_n(x) = U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x), \qquad n \geq 0,$$

$$U_0(x) = 1, \;\; U_1(x) = 2x. \tag{3.3}$$

Obsérvese que

$$T_n^*(x) = U_{n-1}(x), \qquad n \geq 0 \tag{3.4}$$

(es costumbre suponer que $P_{-n}(x) = 0$, $n \geq 1$, en cualquier sistema ortogonal $\{P_n(x)\}$). Por otra parte,

$$U_n^*(x) \;=\; 2U_{n-1}(x), \qquad n \geq 0. \tag{3.5}$$

En la determinación de las fracciones continuas de $\{T_n(x)\}$ y $\{U_n(x)\}$ usaremos el siguiente resultado:

LEMA 3.1. (Darboux). *Sean* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, y *supóngase que* $f(x)$ *y* $g(x)$ *tienen radio de convergencia* $0 < R < +\infty$, *y que* $h(z) = f(z) - g(z)$ *es continua en* $\{z : |z| \leq R\}$. *Entonces*

$$a_n = b_n + o\left(\frac{1}{R}\right) \tag{3.6}$$

Una demostración del Lema 3.1, consecuencia inmediata del teorema de Riemann-Lebesgue, puede encontrarse en [5], p.116, donde se dan referencias acerca de las diferentes extensiones y múltiples aplicaciones del denominado método de Darboux.

Como se verifica inmediatamente a partir de (3.1) y (3.2),

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(z)t^n \;=\; \frac{1 - zt}{1 - 2zt + t^2}, \tag{3.7}$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(z)t^n \;=\; \frac{1}{1 - 2zt + t^2}. \tag{3.8}$$

Sean

$$(z \pm 1)^{1/2} = \sqrt{|z \pm 1|} \cdot e^{1/2 \operatorname{Arg}(z \pm 1)}, \tag{3.9}$$

donde $-\pi < \operatorname{Arg}(z \pm 1) \leq \pi$, y

$$\left(z^2 - 1\right)^{1/2} = (z+1)^{1/2}(z-1)^{1/2}. \tag{3.10}$$

La función $\left(z^2-1\right)^{1/2}$ es evidentemente analítica para $z\in\mathbb{C}-(-\infty,1]$, y puede prolongarse analíticamente a $\mathbb{C}-[-1,1]$ (pues es continua en $(-\infty,-1)$). Se tiene que

$$\left(z^2-1\right)^{1/2}=\sqrt{z^2-1},\ z\in\mathbb{R},\ z\geq 1;$$
$$\left(z^2-1\right)^{1/2}=-\sqrt{z^2-1},\ z\in\mathbb{R},\ z\leq -1 \tag{3.11}$$

Además,

$$\left(x^2-1\right)^{1/2}=i\sqrt{1-x^2},\ -1\leq x\leq 1, \tag{3.12}$$

con

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\left(x\pm i\varepsilon\right)^2-1\right)^{1/2}=\pm i\sqrt{1-x^2},\ -1\leq x\leq 1. \tag{3.13}$$

Sean ahora

$$\alpha(z)=z+\left(z^2-1\right)^{1/2},\quad \beta(z)=z-\left(z^2-1\right)^{1/2}, \tag{3.14}$$

así que $\alpha(z)+\beta(z)=2z$, $\alpha(z)\beta(z)=1$. Es claro además que

$$\alpha(x)-\beta(x)=2i\sqrt{1-x^2},\quad -1\leq x\leq 1, \tag{3.15}$$

y que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\alpha(x+i\varepsilon)=\alpha(x),\ \lim_{\varepsilon\to 0^+}\beta(x+i\varepsilon)=\beta(x),\quad -1\leq x\leq 1, \tag{3.16}$$

mientras que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\alpha(x-i\varepsilon)=\beta(x),\ \lim_{\varepsilon\to 0^+}\beta(x-i\varepsilon)=\alpha(x),\quad -1\leq x\leq 1. \tag{3.17}$$

Se verifica también que $|\beta(z)|\leq|\alpha(z)|$, con $|\beta(z)|=|\alpha(z)|$ si y solo si $z\in[-1,1]$, en cuyo caso $|\alpha(z)|=|\beta(z)|=1$. Las funciones $\alpha(z)$, $\beta(z)$ son entonces analíticas en $\mathbb{C}-[-1,1]$ y $|\beta(z)|<|\alpha(z)|$ para z en este dominio.

Con $\alpha=\alpha(z)$, $\beta=\beta(z)$, (3.7) puede escribirse

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(z)t^n = \frac{1 - zt}{(t-\alpha)(t-\beta)}. \qquad (3.18)$$

Esta es una función analítica de t para $|t| < |\beta|$, y tiene en $t = \beta$ un polo simple. De la misma manera se concluye que $\frac{1 - z\beta}{(\beta-\alpha)(t-\beta)}$ es también analítica para $|t| < |\beta|$ y tiene en $t = \beta$ un polo simple. Como

$$h(z,t) = \frac{1 - zt}{(t-\alpha)(t-\beta)} - \frac{1 - z\beta}{(\beta-\alpha)(t-\beta)} = \frac{\alpha z - 1}{(\beta-\alpha)(t-\alpha)}$$

es continua para $|t| \leq |\beta|$ cuando $z \notin [-1,1]$, y

$$\frac{1 - z\beta}{(\beta-\alpha)(t-\alpha)} = \frac{1 - \beta z}{\alpha - \beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{-n-1} t^n,$$

se deduce que

$$T_n(z) = \frac{1 - \beta z}{\alpha - \beta} \cdot \beta^{-n-1} + 0\left[\frac{1}{|\beta|^n}\right], \qquad (3.19)$$

así que

$$\beta^n T_n(z) \sim \frac{1 - z\beta}{\alpha - \beta} \cdot \beta^{-1}, \quad n \to \infty, \quad z \notin [-1,1]. \qquad (3.20)$$

(La expresión $a_n \sim b_n$, $n \to \infty$, significa que $lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$).

Un argumento enteramente análogo demuestra que

$$\beta^n U_n(z) \sim \frac{1}{\alpha - \beta} \cdot \beta^{-1}, \quad n \to \infty, \quad z \notin [-1,1]. \qquad (3.21)$$

Por lo tanto, la fracción continua $\boldsymbol{T}(z)$ de $\{T_n(x)\}$ es

$$\boldsymbol{T}(z) = \frac{\beta(z)}{1 - z\beta(z)}, \qquad z \notin [-1,1]. \qquad (3.22)$$

Esta es una función analítica de z para $z \notin [-1,1]$. De la misma manera se verifica que la fracción continua $\boldsymbol{U}(z)$ de $\{U_n(x)\}$ es

$$\boldsymbol{U}(z) = 2\beta(z), \quad z \notin [-1,1], \qquad (3.23)$$

y es analítica en $\mathbb{C}$-[-1,1].

Nótese que

$$\phi(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\{U(x - i\varepsilon) - U(x + i\varepsilon)\}}{2\pi i} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{1 - x^2}, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \tag{3.24}$$

es continua sobre $\mathbb{R}$.

Como $|U_\varepsilon(x)| = |U(x - i\varepsilon) - U(x + i\varepsilon)| \leq 40\sqrt{1 + \varepsilon^2}$ si $|x| \leq 1$ y $\varepsilon \leq 1$ (la estimativa es burda), la medida de ortogonalidad μ de $\{U_n(x)\}$ resulta ser absolutamente continua, y está dada por

$$d\mu(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{1 - x^2} \cdot C(x)dx, \tag{3.25}$$

donde $C(x)$ es la función característica del intervalo (-1,1). Análogamente se comprueba que la parte absolutamente continua de la medida de ortogonalidad ν de $\{T_n(x)\}$ es

$$\frac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2}} \cdot C(x)dx, \tag{3.26}$$

Como Supp$\nu \subseteq$ [-1,1], entonces $P_\nu \subseteq \{\pm 1\}$. Pero

$$T_n(-1) = (-1)^n, \quad T_n(1) = 1, \tag{3.27}$$

mientras que $k_0 = 1$, $k_n = \frac{1}{2}$. Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} T_n^2(\pm 1)/k_n$ es divergente, así que $P_\nu = \emptyset$ y ν es absolutamente continua.

Las relaciones de ortogonalidad para $\{T_n(x)\}$ y $\{U_n(x)\}$ son entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T_n(x) T_m(x) d\nu = \begin{cases} 1, & n = m = 0 \\ \frac{1}{2}\delta_{mn}, & m, n \neq 0, \end{cases} \tag{3.28}$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U_n(x) U_m(x) d\mu = \delta_{mn}, \quad m, n \geq 0. \tag{3.29}$$

Por lo tanto $\{U_n(x)\}$ es un S.O.N., pero $\{T_n(x)\}$ no lo es (el S.O.N. correspondiente a $\{T_n(x)\}$ es $t_0(x) = 1$, $t_n(x) = \sqrt{2}\, T_n(x)$, $n \geq 1$).

Relaciones trigonométricas elementales muestran, por otra parte, que

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\,\theta,\quad U_n(\cos\theta) = \frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta},\qquad 0 \le \theta \le \pi. \tag{3.30}$$

Un estudio detallado se los polinomios de Chebichev puede encontrarse en [13], [14], [18].

§4. EL SISTEMA $\{P_n(x)\}$. Consideraremos en esta sección el sistema ortogonal definido por

$$\begin{aligned} xP_{2n}(x) &= P_{2n+1}(x) + aP_{2n-1}(x) \\ xP_{2n+1}(x) &= P_{2n+2}(x) + bP_{2n}(x),\quad n \ge 1, \end{aligned} \tag{4.1}$$

y

$$P_0(x) = 1,\quad P_1(x) = x,\quad P_2(x) = x^2 - bc,\qquad c > 0, \tag{4.2}$$

Eliminando $P_{2n}(x)$ y $P_{2n+2}(x)$ de (4.1) se obtiene que

$$(x^2 - a - b)P_{2n+1}(x) = P_{2n+3}(x) + abP_{2n-1}(x),\quad n \ge 1, \tag{4.3}$$

y si

$$\widehat{P}_n(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{ab}\right)^n} P_{2n+1}(x),\quad n \ge 0, \tag{4.4}$$

entonces

$$2w\widehat{P}_n(x) = \widehat{P}_{n+1}(x) + \widehat{P}_{n-1}(x),\quad n \ge 1, \tag{4.5}$$

donde

$$w = w(x) = \frac{x^2 - a - b}{2\sqrt{ab}}. \tag{4.6}$$

Por lo tanto, de (2.78) y (3.5),

$$\widehat{P}_n(x) = AU_n(w) + BU_{n-1}(x),\quad n \ge 0, \tag{4.7}$$

y, puesto que $\widehat{P}_0(x) = x$ y

$$\widehat{P}_1(x) = \frac{x^3 - bcx - ax}{\sqrt{ab}},$$

se obtiene, de (2.79), que

$$A = x, \qquad B = \frac{(1-c)b}{\sqrt{ab}} \cdot x. \tag{4.8}$$

Se deduce que

$$P_{2n+1}(x) = (\sqrt{ab}\,)^n x \cdot \left[U_n(w) + \frac{(1-c)b}{\sqrt{ab}} \cdot U_{n-1}(w)\right], \quad n \geq 0 \tag{4.9}$$

y mediante (3.3), (4.1) y (4.9), que

$$P_{2n}(x) = \left(\sqrt{ab}\right)^n c \left[U_n(w) + \left\{\frac{1}{\sqrt{ab}} \frac{(1-c)x^2}{c} + a\right\} U_{n-1}(w)\right], \; n \geq 0 \tag{4.10}$$

Un cálculo similar da, para los polinomios numeradores $P_n^*(x)$, las expresiones

$$P^*_{2n}(x) = \left(\sqrt{ab}\right)^n \left[U_n(w) + \frac{b}{\sqrt{ab}}\, U_{n-1}(w)\right], \; n \geq 0, \tag{4.11}$$

y

$$P^*_{2n}(x) = \left(\sqrt{ab}\right)^{n-1} x \;\; U_{n-1}(w), \; n \geq 0. \tag{4.12}$$

Observemos que para $c = 1$, es decir, para los polinomios $\{S_n(x)\}$, (4.9) y (4.10) se reducen a

$$\begin{aligned} S_{2n+1}(x) &= \left(\sqrt{ab}\right)^n \cdot x \;\; U_n(w), \; n \geq 0, \\ S_{2n}(x) &= \left(\sqrt{ab}\right)^n \cdot \left[U_n(w) + \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot U_{n-1}(w)\right], \; n \geq 0, \end{aligned} \tag{4.13}$$

que coinciden con las expresiones dadas en [5], [6]. En cuanto a los polinomios numeradores $S_n^*(x)$, estos coinciden, evidentemente, con los $P_n^*(x)$, $n \geq 0$. La fracción continua $S(z)$ de los polinomios $\{S_n(x)\}$ es entonces

$$S(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}^{*}(z)}{S_{2n}(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{z}{\sqrt{ab}}\cdot\frac{U_{n-1}(w)}{U_n(w)}}{1+\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\frac{U_{n-1}(w)}{U_n(w)}}=\frac{\frac{z}{\sqrt{ab}}\cdot\beta(w)}{1+\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\beta(w)}, \quad (4.14)$$

como se estableció en [5].

De la misma manera se llega a que la fracción continua $P(z)$ del sistema $\{P_n(x)\}$ es

$$P(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{P_{2n}^{*}(z)}{P_{2n}(z)}=\frac{\frac{z}{\sqrt{ab}}\cdot\beta(w)}{c\left[1+\frac{1}{\sqrt{ab}}\left(\frac{(1-c)z^2}{c}+a\right)\cdot\beta(w)\right]} \quad (4.15)$$

o, lo que es lo mismo,

$$P(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{P_{2n+1}^{*}(z)}{P_{2n+1}(z)}=\frac{1+\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\beta(w)}{z\left\{1+\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot(1-c)\beta(w)\right\}}. \quad (4.16)$$

y un cálculo simple muestra que

$$P(z)=\frac{S(z)}{c\left[1+\frac{1-c}{c}\cdot zS(z)\right]}, \quad (4.17)$$

donde $S(z)$ está dado por (4.14). Esta es la forma más conveniente de $P(z)$. Si

$$M=\left(-\sqrt{a}-\sqrt{b},\ -|\sqrt{a}-\sqrt{b}|\right)\cup\left(|\sqrt{a}-\sqrt{b}|,\sqrt{a}+\sqrt{b}\right), \quad (4.18)$$

$P(z)$ tiene un conjunto continuo de singularidades esenciales en $\overline{M}$ y es analítica en $\mathbb{C}-\overline{M}$, excepto, tal vez, por polos simples, ubicados sobre el eje real. Como además el soporte de la medida de ortogonalidad μ de $\{P_n(x)\}$ está contenido en $[-N,N]$, donde

$$N = \text{máx}(\sqrt{b},\sqrt{cb}) + \sqrt{a}, \quad (4.19)$$

se deduce que estos polos estarán colocados en uno de los intervalos $[-N,-\sqrt{a}-\sqrt{b})$, $(-|\sqrt{a}-\sqrt{b}|, |\sqrt{a}-\sqrt{b}|)$, $(\sqrt{a}+\sqrt{b}, N]$ (obsérvese que $N \geq \sqrt{a}+\sqrt{b})$. Nótese que $N = \sqrt{a}+\sqrt{b}$ si $c = 1$, y, como se demuestra en [5], $S(z)$ tiene, si $a > b$, y solo en tal caso, un polo simple en $z = 0$. Los polos de $P(z)$, si alguno, estarán entonces ubicado en $z = 0$ y en los puntos fuera de $\overline{M}$ donde se anula el denominador $D(z)$ de $P(z)$ en (4.17):

$$D(z) = c + (1 - c)\, zS(z) = 0. \tag{4.20}$$

Sea ahora

$$\phi(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \{P(x - i\varepsilon) - P(x + i\varepsilon)\} \tag{4.21}$$

en los puntos donde el límite exista. Claramente $\phi(x) = 0$ para $x \notin [-N,N]$, y un cálculo basado en las relaciones

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi i}\{S(x - i\varepsilon) - S(x + i\varepsilon)\} = \frac{b}{\pi\sqrt{ab}\cdot |x|} \cdot \sqrt{1 - w^2}\,, \quad x \in M \tag{4.22}$$

y

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} S(x - i\varepsilon) = \overline{S(x)}, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0^+} S(x + i\varepsilon) = S(x),$$

válidas para tales valores de x (v.[5]), muestra que

$$\phi(x) = \frac{b c^2}{\pi\sqrt{ab}\;|x|}\;\frac{\sqrt{1 - w^2}}{|c + (1 - c)x S(x)|^2}\,, \qquad x \in M\,. \tag{4.23}$$

Como, de (4.22),

$$\mathrm{Im}(c + (1 - c)xS(x)) = \frac{2(c - 1)b}{\sqrt{ab}} \cdot \sqrt{1 - w^2}\,, \quad x \in M\,, \tag{4.24}$$

se deduce que $D(x) = c + (1 - c)xS(x)$ no se anula en este conjunto. Por lo tanto, $\phi(x)$ es continua en M. Por otra parte, $D(\pm|\sqrt{a} - \sqrt{b}|) = 0$ si $a \neq b$ y $c = (\sqrt{b} - \sqrt{a})/\sqrt{b}$. En este caso, sin embargo, $|D(x)|^2 = (1 + w)\,F(x)$, donde $F(\pm|\sqrt{a} - \sqrt{b}|) = 2$. Por lo tanto, $\phi/\overline{M}$ es continua en $\pm|\sqrt{a} - \sqrt{b}|$. Si $a = b$, $\lim_{x \to 0}\phi(x) = 1/\pi\sqrt{a}$, y ϕ/M es también continua en 0. Un raciocinio similar demuestra que ϕ es continua en $\pm(\sqrt{a}+\sqrt{b})$, y es fácil concluir, de lo dicho en la Nota 2.1, que ϕ es integrable en $\overline{M}$ y que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f \, d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x)\,dx \tag{4.25}$$

para toda función continua f, con soporte compacto contenido en $\overline{M}$.

Se deduce que $\phi(x)C(x)dx$, donde $C(x)$ es la función característica de M, es la componente absolutamente continua de μ. Además, puesto que $\phi(x) > 0$ en M, se deduce que $M \subseteq C_\mu$, el soporte continuo de μ.

En cuanto a D_μ, el soporte discreto de μ, éste está contenido en $\{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} - \overline{M} : D(x) = 0\}$, y P_μ, el soporte puntual, será un subconjunto de $D_\mu \cup \{\pm|\sqrt{a} - \sqrt{b}|, \pm(\sqrt{a} + \sqrt{b})\}$. Demostraremos ahora que $\pm|\sqrt{a} - \sqrt{b}|$ y $\pm(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ no soportan masas de μ. Para este propósito necesitamos observar, como se deduce de (4.1) y (4.2), que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x)P_n(x)\,d\mu = k_n\,\delta_{mn}, \qquad m, n \geq 0, \tag{4.26}$$

donde

$$k_0 = 1,\ k_1 = bc;\ k_{2n} = c(ab)^n,\ k_{2n+1} = cb(ab)^n, \quad n \geq 1, \tag{4.27}$$

de tal manera que el sistema ortonormal $\{p_n(x)\}$ asociado con $\{P_n(x)\}$ es

$$p_{2n}(x) = \frac{P_{2n}(x)}{\sqrt{c(ab)^n}}, \quad p_{2n+1}(x) = \frac{P_{2n+1}(x)}{\sqrt{cb(ab)^n}}. \tag{4.28}$$

TEOREMA 4.1 *El soporte puntal P_μ es puramente discreto; es decir, $P_\mu = D_\mu$. En particular, $0 \notin P_\mu$ si $a = b$*

Demostración. Sea $x_0 = \pm|\sqrt{a} - \sqrt{b}|$, así que $w_0 = w(x_0) = -1$. De (4.9) se deduce, teniendo en cuenta que $U_n(-1) = (-1)^n(n+1)$, que si $a \neq b$ entonces

$$p_{2n+1}(x_0) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{cb}} \cdot x_0 \cdot \left[n+1 - \frac{(1-c)b}{\sqrt{ab}} \cdot n \right], \; n \geq 0. \quad (4.29)$$

Si $c = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $p_{2n+1}(x_0) = \frac{(-1)^n x_0}{\sqrt{cb}}$. Si $c \neq \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b}}$,

$$p_{2n+1}(x_0) \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{cb}} \cdot x_0 \cdot \left[1 - \frac{(1-c)b}{\sqrt{ab}} \right] n, \quad n \to \infty. \quad (4.30)$$

En ambos casos $\sum_{n=0}^{\infty} p_{2n+1}^2(x_0)$ diverge, y $x_0 \notin P_\mu$. Supóngase ahora que $a = b$, así que $x_0 = 0$. De (4.10) se deduce que

$$p_{2n}(0) = (-1)^n \sqrt{c} \cdot \left[n(1-a) + 1 \right], \quad (4.31)$$

de lo cual

$$p_{2n}(0) \sim (-1)^n \sqrt{c}(1-a)n, \; a \neq 1; \quad p_{2n}(0) \sim (-1)^n \sqrt{c}, \; a = 1. \quad (4.32)$$

En ambos casos $\sum_{n=0}^{\infty} p_{2n}^2(0)$ diverge, y $0 \notin P_\mu$.

El argumento que demuestra que $\pm(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ no porta masa de μ es enteramente similar.

COROLARIO 4.1. $C_\mu = \overline{M}$.

NOTA 4.1. Obsérvese que $C_\mu = [-2\sqrt{a}, 2\sqrt{a}]$ si $a = b$.

Describimos ahora D_μ.

TEOREMA 4.2. *Si $a \neq b$, el conjunto D_μ es como sigue*:

(1) $0 < c \leq 1, a > b; D_\mu = \{0\}$.

(2) $0 < c \leq 1, b > a$;

$D_\mu = \emptyset$ *si* $c \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})/\sqrt{b}$;

$D_\mu = \{\pm\gamma\}$, *donde* $0 < \gamma < \sqrt{b} - \sqrt{a}$, *si* $c < (\sqrt{a} + \sqrt{b})/\sqrt{b}$.

(3) $c > 1, a > b; D_\mu = \{0\}$.

(4) $c > 1, a < b$;

$D_\mu = \emptyset$ *si* $c \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})/\sqrt{b}$;

$D_\mu = \{\pm\gamma'\}$, *donde* $\sqrt{a} + \sqrt{b} < \gamma' \leq N$, si $c > (\sqrt{a} + \sqrt{b})/\sqrt{b}$.

Demostración. De (4.16) se deduce que los posibles polos de $\boldsymbol{P}(z)$ están colocados en $z = 0$ y en los puntos fuera de $\overline{M}$ donde

$$(c - 1)\,\beta(w) = \sqrt{a/b}. \tag{4.33}$$

Ahora,

$$\beta(w(0)) = \beta(-(a+b)/2\sqrt{ab}) = -\sqrt{b/a} \quad \text{si} \quad b < a,$$

$$\beta(-(a+b)/2\sqrt{ab} = -\sqrt{a/b} \quad \text{si} \quad a < b.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{z \to 0} z\,\boldsymbol{P}(z) = \begin{cases} 0, & a < b \\ \dfrac{a-b}{a-b+cb}, & a > b. \end{cases} \tag{4.34}$$

Esto permite concluir, en virtud del Teorema 4.1, que $0 \in D_\mu$ si y solo si $a > b$, cualquiera que sea c. Obsérvese que de (4.34 se deduce, cuando $c = 1$, que

$$\lim_{z \to a} z\,\boldsymbol{S}(z) = \begin{cases} 0, & a < b \\ \dfrac{a-b}{a}, & a > b, \end{cases} \tag{4.35}$$

como se estableció en [5], p.123. Examinemos ahora las distintas posibilidades:

(1) La relación (4.33) es imposible en este caso, pues $|\beta(w)| \leq 1$ para cualquier valor de w.

(2) Si $c = 1$, (4.33) es imposible. Si $1 > c \geq (\sqrt{b} - \sqrt{a})/\sqrt{b}$. entonces $1/(c-1)\sqrt{a/b} \leq -1$, lo cual hace (4.33) imposible si $x \in (\sqrt{a} - \sqrt{b}, 0) \cup (0, \sqrt{b} - \sqrt{a})$, o sea, si $w \in (-(a+b)/2\sqrt{ab}, -1)$, ya que entonces $\beta(w) > -1$. Tal relación es también imposible si $x \in [-N, -\sqrt{a} - \sqrt{b}] \cup [\sqrt{a} + \sqrt{b}], N]$, o sea si $w > 1$, pues $\beta(w) > 0$. Entonces, $D_\mu = \emptyset$. Por otra parte, si $c < (\sqrt{a} - \sqrt{b})/\sqrt{b}$ entonces $-1 < 1/(c-1)\sqrt{a/b} < -\sqrt{a/b} = \beta(-(a+b)/2\sqrt{ab})$, y deberá existir $w_0 \in (-(a+b)/2\sqrt{ab}, -1)$ tal que $\beta(w) = 1/(c-1)\sqrt{a/b}$. Como $\beta(w)$

es creciente en tal intervalo, tal valor w_0 es único. Sea entonces $\gamma \in (0, \sqrt{b} - \sqrt{a})$ tal que $w(\gamma) = w_0$.

Las demostraciones de (3) y (4) siguen las mismas líneas, observando ahora que $1/(c-1)\sqrt{a/b} > 0$ y, por lo tanto, que $(-|\sqrt{a} - \sqrt{b}|, 0) \cup (0, |\sqrt{a} - \sqrt{b}|)$ estará libre de masas en tal caso, mientras que las habrá en $[-N, -\sqrt{a} - \sqrt{b}] \cup [\sqrt{a} + \sqrt{b}, N]$ si y sólo si $1/(c-1)\sqrt{a/b} < 1$.

De la misma manera se verifica que

TEOREMA 4.3. *Si $a = b$, el conjunto D_μ es como sigue:*

(1) *si $0 < c \leq 2$, $D_\mu = \emptyset$,*

(2) *si $c > 2$, $D_\mu = \{\pm\gamma'\}$, donde $\sqrt{a} + \sqrt{b} < \gamma' \leq N$.*

NOTA 4.2. Obsérvese que $0 \in D_\mu$ si y sólo si $a > b$. Si $a = b$, $0 \in C_\mu$. Si $a < b$, $0 \notin \operatorname{Supp}\mu$.

Resumiendo se tiene el siguiente teorema, cuya demostración es consecuencia de lo anterior y de algunos cálculos simples.

TEOREMA 4.4. *La medida de ortogonalidad μ de $\{P_n(x)\}$ es como sigue:*

(1) $0 < c \leq 1$, $a > b$. *Entonces*

$$d\mu(x) = \phi(x)C(x)dx + \mu\delta(x)dx, \tag{4.36}$$

donde $\phi(x)$ está dada por (4.23) para $x \in \overline{M}$ y por $\phi(x) = 0$ para $x \in R - \overline{M}$, $C(x)$ es la función característica de M, $\delta(x)$ es la medida de Dirac en 0, y

$$\mu_0 = \frac{b-a}{b-a+cb}. \tag{4.37}$$

(2) $0 < c \leq 1$, $b > a$, $c \geq (\sqrt{b} - \sqrt{a})/\sqrt{b}$. *Entonces μ es absolutamente continua y*

$$d\mu(x) = \phi(x)C(x). \tag{4.38}$$

(3) $0 < c \leq 1$, $b > a$, $c < (\sqrt{b} - \sqrt{a})/\sqrt{b}$. *Entonces*

$$d\mu(x) = \phi(x)C(x)\,dx + \mu_\gamma\{\delta(x-\gamma) + \delta(x+\gamma)\}dx, \tag{4.39}$$

donde $\delta(x \pm \gamma)$ *es la medida de Dirac en* $\pm\gamma$,

$$\gamma = \sqrt{\frac{c}{1 - c}\,(b\,(1 - c) - a)} \qquad (4.40)$$

y

$$\mu_\gamma = \mathrm{Res}(P(z), \gamma) = \frac{1}{2(1 - c)} \cdot \frac{(1 - c)^2\, b - a}{(1 - c)\, b - a}. \qquad (4.41)$$

(4) $\quad c > 1,\ a > b$. *Entonces*

$$d\mu(x) = \phi(x)\, C(x) dx + \mu_0 \delta(x) dx. \qquad (4.42)$$

(5) $\quad c > 1,\ a < b,\ c \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})/\sqrt{b}$. *Entonces*

$$d\mu(x) = \phi(x)\, C(x) dx\ . \qquad (4.43)$$

(6) $\quad c > 1,\ a < b,\ c > (\sqrt{a} + \sqrt{b})/\sqrt{b}$. *Entonces*

$$d\mu(x) = \phi(x)\, C(x) dx + \mu_{\gamma'}\{\delta(x - \gamma') + \delta(x + \gamma')\} dx, \qquad (4.44)$$

donde

$$\gamma' = \sqrt{\frac{c}{1 - c}\,(b\,(1 - c) - a)} \qquad (4.45)$$

y

$$\mu_{\gamma'} = \frac{1}{2(c - 1)} \cdot \frac{b\,(c - 1)^2 - a}{b\,(c - 1) + a}. \qquad (4.46)$$

(7) $\quad a = b.\ 0 < c \leq 2$. *Entonces*

$$d\mu(x) = \phi(x) C(x) dx. \qquad (4.47)$$

(8) $\quad a = b.\ c > 2$. *Entonces*

$$d\mu(x) = \phi(x) C(x)\, dx + \mu_{\gamma'}\{\delta(x - \gamma') + \delta(x + \gamma')\} dx, \qquad (4.48)$$

donde

$$\gamma' = \sqrt{\frac{c}{1 - c}\, a} \qquad (4.49)$$

y

$$\mu_{\gamma'} = \frac{c\,(c - 2)}{2(c - 1)}. \qquad (4.50)$$

COMENTARIO. Como se mencionó en la introducción, el cambio (1.3) en las condiciones iniciales de $\{S_n(x)\}$ que determina el sistema $\{P_n(x)\}$ corresponde a un cambio en las condiciones iniciales del proceso descrito y, por lo tanto, del correspondiente Hamiltoniano. La matriz de Jacobi, de $\{S_n(x)\}$ es J, como en (2.8), con $a_n = 0$ $n \geq 0$, y

$$b_{2n} = \sqrt{a}, \quad b_{2n+1} = \sqrt{b}, \quad n \geq 0. \tag{4.51}$$

La de $\{P_n(x)\}$ es

$$b_1 = \sqrt{b\,c}, \quad b_{2n} = \sqrt{a}, \quad b_{2n+1} = \sqrt{b}, \quad n \geq 1. \tag{4.52}$$

y $a_n = 0$, $n \geq 0$. El cambio en las condiciones iniciales representa una perturbación de rango 2. Ambas matrices presentan a $\overline{M}$ como espectro continuo y tienen a 0 como valor propio aislado cuando $a > b$. Este valor propio corresponde en tal caso a un estado ligado (bound - state) que desaparece cuando $a = b$. En el caso de $\{P_n(x)\}$ aparecen, cuando $a < b$ y $c < (\sqrt{b} - \sqrt{a})/\sqrt{b}$. ó $c > (\sqrt{a} + \sqrt{b})/\sqrt{b}$, dos valores propios aislados, que pueden entenderse como un desplazamiento del valor propio 0. Sin embargo, no se introducen estados de resonancia (por ejemplo, valores propios interiores al espectro) ni, de hecho, ningún tipo de concentraciones espectrales (por ejemplo, valores propios en los extremos de los intervalos que constituyen el espectro continuo).

§5. El sistema $\{Q_n(x)\}$. Tal sistema está dado por

$$\begin{aligned} xQ_{2n}(x) &= Q_{2n+1}(x) + aQ_{2n-1}(x), \\ xQ_{2n+1}(x) &= Q_{2n+2}(x) + bQ_{2n}(x), \quad n \geq 1, \end{aligned} \tag{5.1}$$

y las condiciones iniciales

$$Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = x, \quad Q_2(x) = (1 + c)\,(x^2 - b), \quad c > -1. \tag{5.2}$$

Nótese que el caso $c = 0$ fue considerado en la Sección Nº4.

Tal como en la Sección Nº4, se verifica que

$$(x^2 - a - b)\, Q_{2n+1}(x) = Q_{2n+3}(x) + abQ_{2n-1}(x), \quad n \geq 1, \tag{5.3}$$

y que si

$$\hat{Q}_n(x) = \frac{Q_{2n+1}(x)}{(\sqrt{ab})^n}, \quad n \geq 0, \tag{5.4}$$

entonces, con w dado por (4.6),

$$\widehat{Q}_n(x) = x \cdot \left[U_n(w) + c\,\frac{x^2 - b}{\sqrt{ab}} \cdot U_{n-1}(w) \right], \quad n \geq 0, \tag{5.5}$$

o sea,

$$Q_{2n+1}(x) = (\sqrt{ab})^n x \cdot \left[U_n(w) + c\,\frac{x^2 - b}{\sqrt{ab}} \cdot U_{n-1}(w) \right], \quad n \geq 0, \tag{5.6}$$

De (3.3), (5.1) y (5.6) se deduce además que

$$Q_{2n}(x) = \tag{5.7}$$
$$(\sqrt{ab})^n \left[(1+c)\,\frac{x^2 - b}{\sqrt{ab}} \cdot U_{n-1}(w) + a\,\frac{cx^2 - (c+1)b}{\sqrt{ab}} \cdot U_{n-2}(w) \right], \ n \geq 0.$$

Un argumento similar da, para los polinomios numeradores, las relaciones

$$Q^*_{2n+1}(x) = \sqrt{ab})^n \left[U_n(w) + \frac{cx^2 - b}{\sqrt{ab}} \cdot U_{n-1}(w) \right]$$
y $$\tag{5.8}$$
$$Q^*_{2n}(x) = (\sqrt{ab})^{n-1} x \left[(1+c)\,U_{n-1}(w) + c\,\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot U_{n-2}(w) \right], \ n \geq 0.$$

La fracción continua será entonces

$$Q(z) = \frac{1}{z}\,\frac{1 + \dfrac{cz^2 + b}{\sqrt{ab}} \cdot \beta(w)}{1 + c\,\dfrac{z^2 - b}{\sqrt{ab}} \cdot \beta(w)} = \frac{1}{z}\,\frac{\alpha(w) + \dfrac{cz^2 + b}{\sqrt{ab}}}{\alpha(w) + 2cw + c\sqrt{a/b}}, \tag{5.9}$$

como se deduce de (5.6) y (5.8). En (5.9), $\alpha(w)$, $\beta(w)$ están dadas por (3.14). Si M es como en (4.18), $Q(z)$ tiene singularidades no aisladas en todo punto de $\overline{M}$, y es analítica en $C - \overline{M}$, excepto, posiblemente, por polos en $z = 0$ y en el subconjunto D de $\mathbf{R} - \overline{M}$ donde

$$D(z) := w + \frac{1}{2c}\left[\alpha(w) + c\sqrt{\frac{a}{b}} \right] = 0. \tag{5.10}$$

Obsérvese que $0 \notin D$, pues $w(0) = -(a+b)/2\sqrt{ab}$ y $\alpha(w(0)) = -\sqrt{a/b}$ si $a \geq b$, $\alpha(w(0)) = -\sqrt{b/a}$ si $b > a$.

Si $c \geq 0$, $D \subseteq (-|\sqrt{a} - \sqrt{b}|, |\sqrt{a} - \sqrt{b}|)$, ya que w, $\alpha(w) > 0$ para $x \in \mathbf{R} - (\overline{M} \cup \dot{D})$. Esto era de esperarse, pues si ν denota la medida de ortogonalidad de $\{Q_n(x)\}$,

$$Supp\ \nu \subseteq \left[-\sqrt{a} - \sqrt{b}, \sqrt{a} + \sqrt{b}\right], \quad c \geq 0. \tag{5.11}$$

Si $-1 < c < 0$, $D = D_0 \cup D_1 \cup D_{-1}$, donde $D_0 \subseteq (-|\sqrt{a} - \sqrt{b}|, |\sqrt{a} - \sqrt{b}|)$, $D_1 \subseteq (\sqrt{a} + \sqrt{b}, N)$, y $D_{-1} = -D_1 \subseteq [-N, -\sqrt{a} - \sqrt{b})$. Aquí,

$$N = \text{máx}\left(\sqrt{\frac{a}{1+c}}, \sqrt{a}\right) + \sqrt{b}. \tag{5.12}$$

Daremos ahora condiciones que garanticen que $D \neq \emptyset$. Obsérvese que $D = \emptyset$ si $c = 0$, como se demostró en la Sección Nº4.

TEOREMA 5.1. *Si $c > 0$, $D \neq \emptyset$ si y sólo si $a/b > [(2c+1)/c]^2$. En tal caso $D = \{\pm\gamma\}$, donde $0 < \gamma < \sqrt{a} - \sqrt{b}$.*

Demostración. Si $\sqrt{a/b} \leq (2c+1)/c$ entonces $(1/2c)(-1+c\sqrt{a/b}) \leq 1$, lo cual implica que $w + (1/2c)(\alpha(w)+c\sqrt{a/b}) < 0$ para $w \in (-(a+b)/2\sqrt{ab}, -1)$, es decir, para $z \in (\sqrt{b}-\sqrt{a}, \sqrt{a}-\sqrt{b})$. Entonces $D = \emptyset$. Por otra parte, si $\sqrt{a/b} > (2c+1)/c$ entonces $D(0) = -(1/2)(\sqrt{b/a} + \sqrt{a/b}) < 0$, mientras que $D(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = -1 + (1/2c)(1+c\sqrt{a/b}) > 0$, así que debe existir $\gamma \in (0, \sqrt{a}-\sqrt{b})$ tal que $D(\gamma) = 0$. Como $D(x)$ es creciente en este intervalo, γ es único.

NOTA 5.1. El valor γ puede obtenerse resolviendo la ecuación

$$w(x) + \frac{1}{2c}\left[\alpha(w(x)) + c\sqrt{\frac{a}{b}}\right] = 0. \tag{5.13}$$

Esta es una ecuación de segundo orden en w y bicuadrada en x.

TEOREMA 5.2. *Si $-1 < c < 0$ entonces $D_0 = \emptyset$.*

Demostración. Es claro que $D_0 = \emptyset$ si $a = b$.

Si $a > b$ entonces $D(0) = (-1/2)(\sqrt{b/a} + (1/c)\sqrt{a/b}) > 0$. Como $D(x)$ es creciente en $(0, |\sqrt{a}-\sqrt{b}|)$, entonces $D(x) > 0$ en este intervalo.

TEOREMA 5.3. *Si $-1 < c < 0$, $D_1 \neq \emptyset$ si y sólo si $\sqrt{a/b} > -(2c+1)/c$. En tal caso $D_1 = \{\gamma'\}$, donde $\sqrt{a} + \sqrt{b} < \gamma' \leq N$.*

Demostración. La condición es equivalente a que

$$D(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 1 + \frac{1}{2c}\left[1 + c\sqrt{\frac{a}{b}}\right] > 0.$$

Por otra parte

$$D(x) = w + \frac{1}{2c}\left[\alpha(w) + c\sqrt{\frac{a}{b}}\right] \rightarrow -\infty$$

cuando $x \rightarrow \infty$, y es una función decreciente de x en $[\sqrt{a} + \sqrt{b}, +\infty)$ Entonces, debe existir $\gamma' > \sqrt{a} + \sqrt{b}$, único tal que $D(\gamma') = 0$. Claramente $\gamma' \leq N$.

COROLARIO 5.1. *Si $-1 < c < 0$, $D \neq \emptyset$ si y sólo si $\sqrt{a/b} > -(2c+1)/c$, en cuyo caso $D = \{\pm\gamma'\}$. donde $\sqrt{a} + \sqrt{b} < \gamma' \leq N$.*

COROLARIO 5.2. *Si $-1 < c < -1/2$ entonces $D = \{\pm\gamma'\}$, con γ' como en el corolario anterior.*

El espectro discreto D_ν de ν es entonces un subconjunto de $D \cup \{0\}$. Más precisamente:

COROLARIO 5.3. *El conjunto $D_\nu = \{0\}$ es como sigue:*

(1) $c = 0$. *Entonces $D_\nu = \{0\}$ si $a > b$, $\emptyset$* si $b \leq a$.

(2) $c > 0$. *Entonces $D_\nu = \emptyset$ si $a/b \leq 1$; $D_\nu = \{0\}$ si $1 < \sqrt{a/b} \leq (2c+1)/c$; $D_\nu = \{0, \pm\gamma\}$, $0 < \gamma < \sqrt{a} - \sqrt{b}$,* si $\sqrt{a/b} > (2c+1)/c$.

(3) $-1 < c < 0$. *Entonces $D_\nu = \emptyset$ si $\sqrt{a/b} \leq 1$, $-(1+2c)/c$.*

(4) $-1 < c < 0$. *Entonces $D_\nu = \{0\}$, si $1 < \sqrt{a/b} \leq -(1+2c)/c$.*

(5) $-1 < c < 0$. *Entonces $D_\nu = \{\pm\gamma'\}$, con $\sqrt{a} + \sqrt{b} < \gamma' \leq N$, si*

$-(1+2c)/c < \sqrt{a/b} \leq 1.$

(6) $-1 < c < 0$. *Entonces* $D_\nu = \{0, \pm\gamma'\}$, *con* γ' *como en* (5), *si* $\sqrt{a/b} > 1$, $1+2c)/c$.

Demostración. Todo lo que queda por ver es que $0 \in D_\nu$ si $a > b$ y sólo en este caso. Ahora, si $a = b$, $0 \in \overline{M}$, así que $0 \notin D_\nu$. Podemos suponer entonces que a ≠ b, así que 0 es, a lo sumo, un polo de $\mathbf{Q}(z)$. Como $\alpha(w(0)) = -\sqrt{a/b}$ si $a > b$, $\alpha(w(0)) = -\sqrt{b/a}$ si $a < b$, se deduce de (5,9), que

$$\lim_{z \to 0} zQ(z) = \begin{cases} 0, & a < b, \\ \dfrac{a-b}{a+cb}, & a > b. \end{cases}$$

Por lo tanto ν tiene en 0 una masa, cuyo valor es

$$\nu(\{0\}) = \frac{a-b}{a+cb}, \qquad (5.14)$$

si y sólo si $a > b$.

En cuanto a P_ν, se tiene que $P_\nu \subseteq D_\nu \cup \{\pm|\sqrt{a} - \sqrt{b}|, \pm(\sqrt{a} + \sqrt{b})\}$, y recordamos que $D_\nu = \emptyset$ si $c = 0$ y $a \leq b$, $D_\nu = \{0\}$ si $c = 0$ y $a > b$. En este caso, $P_\nu = D_\nu$. Más generalmente:

TEOREMA 5.4. $P_\nu = D_\nu$. *Es decir los puntos* $x_1 = \pm(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ y $x_2 = \pm|\sqrt{a} - \sqrt{b}|$ *no portan masas de* ν.

Demostración. Obsérvese en primer lugar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_m(x)\, Q_n(x)\, d\mu = K_n \delta_{mn}, \quad m, n \geq 0, \qquad (5.15)$$

donde

$$K_0 = 1,\ K_1 = b;\ K_{2n} = (1+c)(ab)^n,\ K_{2n+1} = (1+c)\, b\, (ab)^n,\ n \geq 1. \quad (5.16)$$

Por otra parte, de (5.6) se deduce, teniendo en cuenta que $w_1(x) = 1$ y que $U_n(1) = n + 1$, que

$$Q_{2n+1}(x_1) = (\sqrt{ab})^n x_1 \left[n+1 + c(\sqrt{\frac{a}{b}} + 2)\cdot n \right]$$

$$= (\sqrt{ab})^n x_1 \left[n \left\{ 1 + c(\sqrt{\frac{a}{b}} + 2) \right\} + 1 \right].$$

Por lo tanto,

$$\frac{Q_{2n+1}(x_1)}{\sqrt{K_{2n+1}}} = \frac{x_1}{\sqrt{(1+c)b}}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = -\frac{2c+1}{c},$$

mientras que

$$\frac{Q_{2n+1}(x_1)}{\sqrt{K_{2n+1}}} \sim \frac{x_1}{\sqrt{(1+c)b}} \left[1 + c\left\{ \sqrt{\frac{a}{b}} + 2 \right\} \right] \cdot n, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} \neq -\frac{2c+1}{c}.$$

En ambos casos $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_{2n+1}^2(x_1)}{K_{2n+1}}$ diverge.

La demostración para $x_2 = \pm|\sqrt{a} - \sqrt{b}|$ es esencialmente la misma, usando (5.7) en lugar de (5.6) cuando $a = b$, y observando que $U_n(-1) = (-1)^n (n + 1)$, como se deduce, por ejemplo, de (3.30).

NOTA 5.2. Obsérvese, en particular, que $0 \notin P_\nu$ cuando $a = b$.

Describiremos ahora la parte absolutamente continua de ν. De (5.9) se obtiene que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{Q(x - i\varepsilon) - Q(x + i\varepsilon)}{2\pi i} \\ &= \frac{(1+c)b}{\pi\sqrt{ab}\cdot|x|} \cdot \frac{\sqrt{1 - w^2}}{\left[(1+2c)w + c\sqrt{a/b}\right]^2 + 1 - w^2}, \quad x \in M. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Nótese que

$$L(x) = \left[(1+2c)w + c\sqrt{a/b}\right]^2 + 1 - w^2 > 0, \quad x \in M,$$

de lo cual $\phi(x)$ es continua en $\overline{M} - \{0\}$, excepto si $\sqrt{a/b} = (2c+1)/c$, en cuyo caso $L(\pm|\sqrt{a} - \sqrt{b}|) = 0$. En este caso

$$L(x) = (1 + w)F(x), \quad x\in\overline{M},$$

donde $F(\pm|\sqrt{a} - \sqrt{b}|) = 2$, y

$$\phi(x) = \frac{(1+c)b}{\pi\sqrt{ab}\cdot|x|}\cdot\frac{\sqrt{1-w^2}}{(1+w)\cdot F(x)} = \frac{(1+c)b}{\pi\sqrt{ab}F(x)}(1-w)^{1/2}(1+w)^{-1/2}, \quad x\in M,$$

es integrable. Obsérvese finalmente que si $a = b$, en cuyo caso $0\in\overline{M}$,

$$\lim_{x\to 0} \phi(x) = \frac{1+c}{\pi\sqrt{a}}.$$

Esto permite concluir que $\phi(x)$ es, en todos los casos, integrable en M. Los argumentos expuestos en la sección Nº2 permiten entonces demostrar que

TEOREMA 5.5. *La parte absolutamente continua de* ν *es* $\phi(x)$ *es* $\phi(x)\cdot C(x)dx$, *donde* $\phi(x)$ *está dada por* (5.7) *para* $x\in M$ *y por* $\phi(x) = 0$ para $x\in \boldsymbol{R}\text{-}M$, *y* $C(x)$ *es la función característica de* M.

El Corolario 5.3 y el Teorema 5.4 permiten entonces describir completamente a ν. Obsérvese que el valor de la masa que ν tiene en los puntos $\pm\gamma$ es

$$\nu(\{\pm\gamma\}) = \frac{(1+c)b\sqrt{1-w^2}}{\left\{w+(1+2c)\sqrt{w^2-1}\right\}\gamma^2}, \quad w = w(\gamma) = \frac{\gamma^2-a-b}{2\sqrt{ab}}. \tag{5.18}$$

COMENTARIO. La matriz de Jacobi de $\{Q_n(x)\}$ está dada por $a_n = 0$, $n \geq 0$, y

$$b_1 = \sqrt{b}, \; b_2 = \sqrt{\frac{a}{1+c}}; \quad b_{2n} = \sqrt{a}, \quad b_{2n+1} = \sqrt{b}, \quad n \geq 1,$$

y representa una perturbación de rango 2 de la matriz de Jacobi de $\{S_n(x)\}$. El operador de Jacobi correspondiente presenta un desacoplamiento del valor propio 0, pero, también, tres estados ligados simultáneos, lo cual no ocurre con el de $\{S_n(x)\}$ ni con el de $\{P_n(x)\}$.

§6. El sistema $\{R_n(x)\}$. Este está definido por

$$
\begin{aligned}
xR_{2n}(x) &= R_{2n+1}(x) + \frac{n+2}{4(n+1)} \cdot R_{2n-1}(x),\\
xR_{2n+1}(x) &= R_{2n+2}(x) + \frac{n+1}{4(n+2)} \cdot R_{2n}(x), \quad n \geq 0,
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

con condiciones iniciales

$$R_{-1}(x) = 0, \quad R_0(x) = 1. \tag{6.2}$$

La eliminación de $R_{2n}(x)$ y $R_{2n+2}(x)$ de (6.1) conduce a que

$$(x^2 - 1/2)R_{2n+1}(x) = R_{2n+3}(x) + \frac{1}{4^2} R_{2n-1}(x), \quad n \geq 0, \tag{6.3}$$

así que los polinomios

$$\widehat{R}_n(x) = 4^n R_{2n+1}(x), \quad n \geq 0, \tag{6.4}$$

satisfacen

$$\widehat{R}_{-1}(x) = 0, \quad \widehat{R}_0(x) = x, \quad \widehat{R}_1(x) = 4x^3 - 2x \tag{6.5}$$

y

$$2w\widehat{R}_n(x) = \widehat{R}_{n+1}(x) + \widehat{R}_{n-1}(x), \quad n \geq 0 \tag{6.6}$$

donde

$$w = T_2(x) = 2x^2 - 1. \tag{6.7}$$

Por lo tanto, de (2.78) y (2.79),

$$\widehat{R}_n(x) = xU_n(w), \quad \widehat{R}_{2n+1}(x) = \frac{1}{4^n} \cdot xU_n(w), \quad n \geq 0. \tag{6.8}$$

Por otra parte, si

$$\widetilde{R}_n(x) = \frac{1}{4^n} \cdot R^*_{2n+1}(x), \quad n \geq 0, \tag{6.9}$$

entonces $\left\{\widetilde{R}_n(x)\right\}$ satisface (6.6) para $n \geq 1$, mientras que

$$\widetilde{R}_0(x) = 1, \quad \widetilde{R}_1(x) = 4x^2 - 3/2. \tag{6.10}$$

De (2.78) y (2.79) se deduce nuevamente que

$$\widetilde{R}_n(x) = U_n(w) + \frac{1}{2}U_{n-1}(w);$$
$$R^{*}_{2n+1}(x) = \frac{1}{4^n}\left[U_n(w) + \frac{1}{2}U_{n-1}(w)\right], \quad n \geq 0. \tag{6.11}$$

La fracción continua $R(z)$ de $\{R_n(x)\}$ es entonces

$$R(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{z}\left[1 + \frac{1}{2}\,\frac{U_{n-1}(w)}{U_n(w)}\right] = \frac{1}{z}\left[1 + \frac{1}{2}\,\beta(w)\right], \tag{6.12}$$

$w = 2z^2 - 1$. Aquí $\beta(w)$ está dado por (3.14). Esta es una función analítica de z para $z \notin [-1, 1]$, y

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi i}\{R(x-i\varepsilon) - R(x+i\varepsilon)\} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & x \in [-1, 0) \cup (0, 1], \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases} \end{aligned} \tag{6.13}$$

la cual es integrable sobre R. De lo discutido en la Nota 2.1 se deduce entonces que la parte absolutamente continua de la medida de ortogonalidad μ de $\{R_n(x)\}$ es $\phi(x)dx$, y queda por determinar si $0 \in P_\mu$.

Obsérvese que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_m(x) R_n(x)\, d\mu = K_n \delta_{mn}, \quad m, n \geq 0. \tag{6.14}$$

donde

$$K_{2n} = \frac{n+2}{2^{4n+1}(n+1)}, \quad K_{2n+1} = \frac{1}{2^{4n+3}}, \quad n \geq 0. \tag{6.15}$$

Si

$$r_n(x) = \frac{R_n(x)}{\sqrt{K_n}}, \quad n \geq 0, \tag{6.16}$$

entonces

$$r_{2n}(0) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{(n+1)(n+2)}}, \quad n \geq 0, \tag{6.17}$$

como se deduce de (6.1), (6.8), (6.15) y de $U_n(-1) = (-1)^n(n+1)$. Como $r_{2n+1}(0) = 0$ entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n^2(0) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 2, \tag{6.18}$$

así que $0 \in P_\mu$ y

$$\mu(\{0\}) = \frac{1}{2}. \tag{6.19}$$

Por lo tanto

TEOREMA 6.1. *La medida de ortogonalidad* μ *de* $\{R_n(x)\}$ *es*

$$d\mu = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{1-x^2}\, C(x)\, dx + \frac{1}{2}\delta(x) dx, \tag{6.20}$$

donde $C(x)$ *es la función característica de* $[-1, 1]$ *y* $\delta(x)$ *es la medida de Dirac en* 0. $Supp\,\mu = [-1, 1]$, *y* 0 *es un punto de masa sumergido en* μ.

COMENTARIO. El operador de Jacobi L de $\{R(x)\}$, el cual está dado por la matriz de Jacobi (2.8) con

$$a_n = 0; \quad b_{2n} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}, \quad b_{2n+1} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}, \quad n \geq 0, \tag{6.21}$$

tiene entonces un valor propio, 0, interior de $\sigma(L)$. Solo recientemente se ha encontrado, en forma más o menos explícita, sistemas ortogonales con tal propiedad (v. [8]). Creemos que nuestro ejemplo es el más sencillo que existe.

AGRADECIMIENTOS. Agradecemos al profesor M. E. H. Ismail sus consejos, sugerencias y críticas, que contribuyeron en gran medida a una mejor presentación de los resultados. En particular, la idea de describir directamente los sistemas considerados en términos de los polinomios de Chebichev, en lugar de determinar funciones generatrices para los mismos (y que tiene mucho mayor alcance que lo que este artículo muestra), fue insinuada por él. Agradecemos igualmente a profesor Luis A Gómez de la U.P.T.C. su ayuda en la verificación de múltiples detalles y en la corrección de varios errores, algunos de los cuales hubiera sido embarazoso que aparecieran en la versión final.

REFERENCIAS

[1] AHKIEZER, N. I. , *The Clasical Moment Problem,* Hafner, New York, N. Y. , 1965.

[2] ASKEY, R. and ISMAIL M. E. H. , *Recurrence relations, continued fractions and orthogonal polynomials,* Memoirs Amer. Math. Soc., 300 (1984), 108 pages.

[3] BREMERMANN, H. ,*Distributions, Complex Variables and Fourier Transforms,* Addison - Wesley, Reading Mass., 1965.

[4] BROAD, J. T. , *Gauss quadrature generated by diagonalization of H in finite L^2 basis,* Phys. Rev. A18 (1978), 1012-1027.

[5] CHARRIS, J. A.and GOMEZ, L. A., *Funtional analysis, orthogonal polynomials and a theorem of Markov,* Rev. Col. de Mat., Vol. XXII (1979), 77-128.

[6] CHIHARA, T., *An Introduction to orthogonal polynomials,* Gordon and Breach, New York, N. Y., 1978.

[7] CHIHARA, T., *Orthogonal polynomials and measures with end point masses,* Rocky Mountain J. Math., 15 (1985), 705-719.

[8] GERONIMO, J. S.and VAN ASSCHE W., *Orthogonal polynomials on several intervals via a polynomial mapping,* Transaction of the Amer. Math. Soc. 308 (1988), 559-581.

[9] HELLER, E. J., YAMANI H. A. and REINHARDT, W. P., *On quadrature calculations of matrix elements using L^2 expansions thecniques,* J. Comp. Phys. 13 (1973), 536-549.

[10] HELLER, E. J., YAMANI H. A. and REINHARDT, W. P., *L^2 - discretitation of the continuum: radial kinetic energy and Coulomb hamiltonians,* Phys. Rev. A 11(1975), 1144-1155.

[11] ISMAIL, M. E. H., *Lectures on orthogonal polynomials, the Hellmann - Feynmann theorem and birth an death proceses,* Programa de Intercambio BID - ICFES, Depto. de Mat. y Est. U.N., Bogotá, Colombia, 1988.

[12] LAND, S., *Real Analysis,* Addison Wesley, Reading, Mass. 1984.

[13] LEBEDEV, N. H., *Special Functions and their Apllications,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N, J, 1965.

[14] RAINVILLE, E. D., *Special Functions,* McMillan, New York, N Y., 1960.

[15] SHILOV, G. E. AND GUREVICH B. L., *Integral, Measure and Derivates: A Unified Approach,* Dover, New York, N. Y. 1977.

[16] SHOHAT, J., TAMARKIN J. P., *The problem of Moments,* Amer. Math. Soc., Surveys, Vol. I, Providence, R. I., 1950.

[17] SLIM, H. A., *On co - recursive orthogonal polynomials and their applications to potencial scattering,* J. Math. Anal. and Applic., 136 (1988), 1-19.

[18] SZEGÖ, G.,*Orthogonal Polynomials,* Amer. Math. Soc., Colloquium Publications, Vol XXII, 4th. Ed., Providence, R. 1., 1975

[19] WALL, H., *Analytic Theory of Continued Fractions.* Van Nostrand, Princeton, N. J., 1948.

[20] WHEELER, J. C., *Modified moments and continued fraction coefficients for the diatomic linear chain,* J Chem. Phys., 80 (1984), 472-476.

[21] YOSIDA, K., *Functional analysis*, Springer, Berlín, 1963.

J. A. Charris, y V. Silva
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia.

G. Salas
Departamento de Matemáticas
Universidad Distrital
Bogotá, Colombia.

(Recibido en mayo de 1990)