

SOBRE VERTEDEROS TIPO SUTRO

CARLO FEDERICI CASA

(Facultad de Matemáticas, Universidad Nacional)

1. - Ecuación general.

Se considera un vertedero (véase figura 0) cuyo perfil está determinado por las siguientes condiciones:

$$(1) \text{ base: } x = -a$$

$$(2) \text{ pared de derecha: } y = 0$$

$$(3) \text{ pared de izquierda: } y = Y(x) \text{ cuando } -a < x < 0$$

$$y = y(x) \text{ cuando } 0 < x < h$$

$$(4) \quad -\infty < Y(-a), \quad Y(0), \quad y(0) < +\infty$$

Se plantea el problema de encontrar la relación funcional que existe entre $y(x)$ y $Y(x)$ si el caudal C es una función lineal de h

$$C = k(h + pa).$$

Se tiene sucesivamente:

$$\begin{aligned} C &= k(h + pa) = \int_{-a}^h f(x) (2g(h - x))^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_{-a}^0 Y(x) (2g(h - x))^{\frac{1}{2}} dx + \int_0^h y(x) (2g(h - x))^{\frac{1}{2}} dx \\ &= (2g)^{\frac{1}{2}} \int_{-a}^0 Y(x) (h - x)^{\frac{1}{2}} dx + (2g)^{\frac{1}{2}} \int_0^h y(x) (h - x)^{\frac{1}{2}} dx \end{aligned}$$

Cuando $h = 0$ tenemos:

$$kpa = (2g)^{\frac{1}{2}} \int_{-a}^0 Y(x) (-x)^{\frac{1}{2}} dx$$

y despejando k ,

$$k = (2g)^{\frac{1}{2}} (pa)^{-\frac{1}{2}} \int_{-a}^0 Y(x) (-x)^{\frac{1}{2}} dx$$

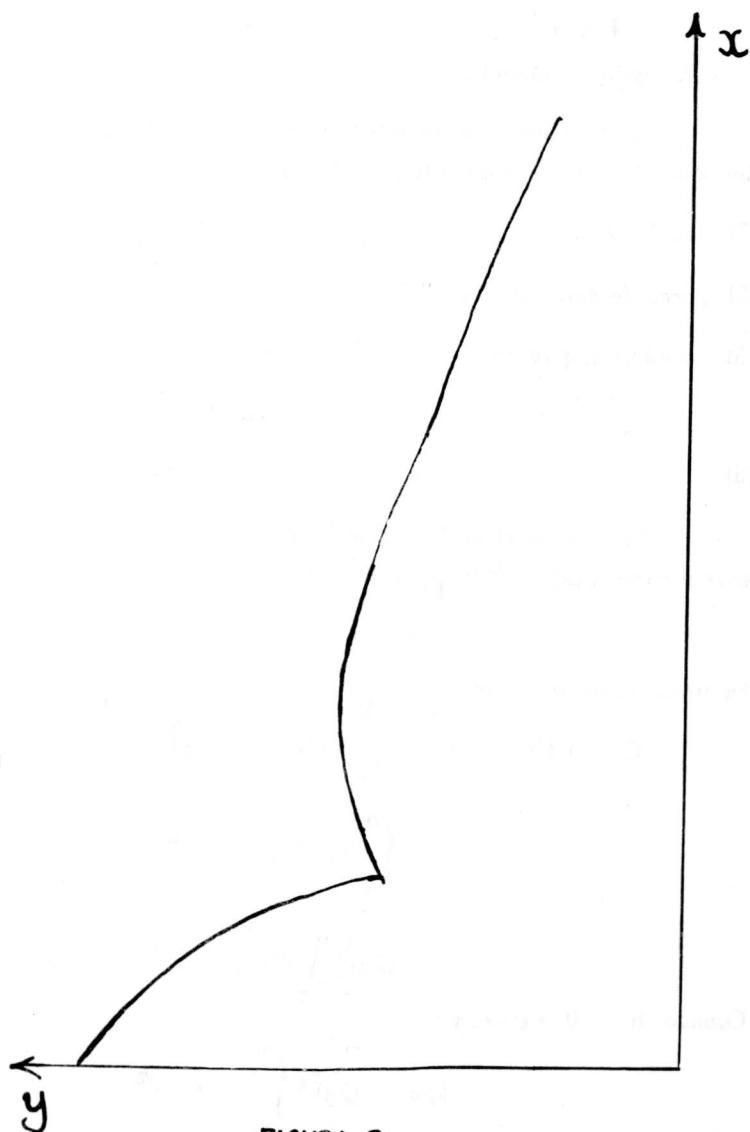


FIGURA O

y por tanto :

$$\begin{aligned}
 \int_0^h y(x)(h-x)^{\frac{1}{2}} dx &= (h+pa)(pa)^{-1} \int_{-a}^0 Y(x)(-x)^{\frac{1}{2}} dx - \int_a^0 Y(x)(h-x)^{\frac{1}{2}} dx \\
 &= \int_{-a}^0 Y(x)((h+pa)(-x)^{\frac{1}{2}} - pa(h-x)^{\frac{1}{2}}) / (pa) dx \\
 &= \int_{-a}^0 Y(x)((h/pa + 1)(-x)^{\frac{1}{2}} - (h-x)^{\frac{1}{2}}) dx \\
 &= \int_0^h y(x)(h-x)^{\frac{1}{2}} dx
 \end{aligned}$$

es decir, la función $y(x)$ debe satisfacer a la ecuación integral (ecuación de Volterra de primera especie) :

$$\int_0^h y(x)(h-x)^{\frac{1}{2}} dx = \int_{-a}^0 Y(x)((h/pa + 1)(-x)^{\frac{1}{2}} - (h-x)^{\frac{1}{2}}) dx$$

que es la relación funcional buscada entre $y(x)$ y $Y(x)$ (en forma implícita). Para resolver esta ecuación se multiplican ambos miembros por 2 y se derivan con respecto a h :

$$\int_0^h y(x)(h-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \int_{-a}^0 Y(x)(2(-x)^{\frac{1}{2}}/pa - (h-x)^{-\frac{1}{2}}) dx$$

de donde, multiplicando ambos miembros por $(u-h)^{-\frac{1}{2}}$ e integrando con respecto a h entre 0 y u , tenemos

$$\int_0^u ((u-h)^{-\frac{1}{2}} \int_0^h y(x)(h-x)^{-\frac{1}{2}} dx) dh = \int_0^u ((u-h)^{-\frac{1}{2}} \int_{-a}^0 Y(x)(2(-x)^{\frac{1}{2}}/pa - (h-x)^{-\frac{1}{2}}) dx) dh$$

y permutando las integraciones con respecto a x y a h en el primer miembro,

$$\int_0^u \left(\int_x^u ((h-x)(u-h)^{-\frac{1}{2}} dh) dx \right) = \int_0^u \int_{-a}^0 (Y(x)(2(-x)^{\frac{1}{2}}/pa - (h-x)^{-\frac{1}{2}})(u-h)^{-\frac{1}{2}} dx) dh$$

y recordando que

$$\pi = \int_{-a}^a ((h-x)(u-h))^{-\frac{1}{2}} dh$$

tenemos

$$\int_0^u y(x) dx = \left(\int_0^0 \int_{-a}^0 Y(x) (2(-x))^{\frac{1}{2}} / \pi - (h-x)^{-\frac{1}{2}} (u-h)^{-\frac{1}{2}} dx dh \right) / \pi$$

Derivando ambos miembros con respecto a u

$$y(u) = D_u \left(\int_0^u \int_{-a}^0 Y(x) (2(-x))^{\frac{1}{2}} / \pi - (h-x)^{-\frac{1}{2}} (u-h)^{-\frac{1}{2}} dx dh \right) / \pi$$

de donde, permutando las integraciones con respecto a h y a x y derivando debajo del signo de integración

$$y(u) = \int_{-a}^0 D_u \left(\int_0^u Y(x) (2(-x))^{\frac{1}{2}} / \pi - (h-x)^{-\frac{1}{2}} (u-h)^{-\frac{1}{2}} dh \right) dx / \pi$$

y ejecutando la integración con respecto a h

$$\begin{aligned} y(u) &= \int_{-a}^0 Y(x) D_u (4(-xu))^{\frac{1}{2}} / \pi - 2(\pi/2 - \tan^2(-x/u)^{\frac{1}{2}}) dx / \pi \\ &= \int_{-a}^0 Y(x) D_u (4(-xu))^{\frac{1}{2}} / \pi - 2 \cot^2(-x/u)^{\frac{1}{2}} dx / \pi \end{aligned}$$

$$= \pi^{-1} \int_{-a}^0 Y(x) (-x/u)^{\frac{1}{2}} (2/\pi - (x-u)^{-1}) dx$$

de donde, cambiando x en $-Xu$,

$$y(u) = \pi^{-1} \int_{a/u}^0 Y(-Xu) X^{\frac{1}{2}} (-uX-u)^{-\frac{1}{2}} (2(-uX-u)/\pi + 1)(-u) dX$$

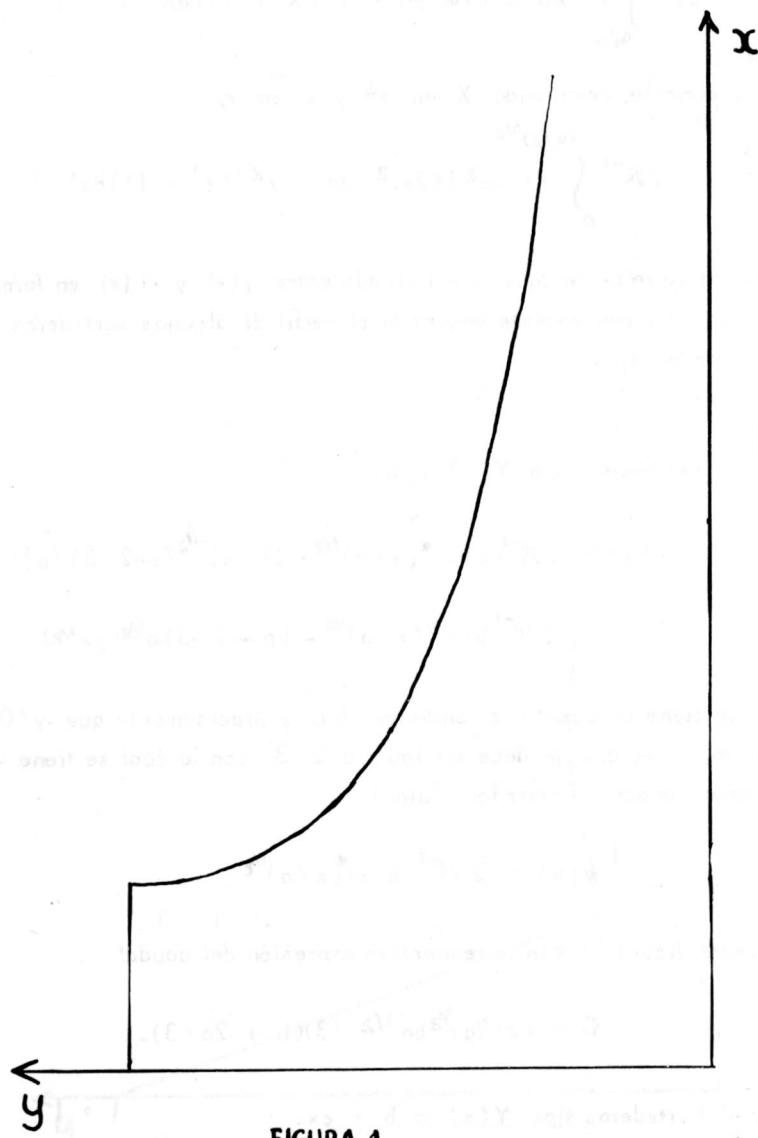


FIGURA 1.

$$\begin{aligned}
 &= \pi^{-1} \int_{a/u}^0 Y(-Xu) X^{\frac{p}{2}} (1/(X+1) - 2u/pa) dX \\
 &= \pi^{-1} \int_{a/u}^0 Y(-Xu) X^{\frac{p}{2}} (2u/pa - 1/(X+1)) dX
 \end{aligned}$$

y finalmente, cambiando X en z^2 y u en x ,

$$y(x) = 2\pi^{-1} \int_0^{(a/x)^{\frac{p}{2}}} Y(-xz^2) (2xz^2/pa - z^2/(z^2 + 1)) dz$$

que es la relación funcional buscada entre $y(x)$ y $Y(x)$ en forma explícita. Es conveniente encontrar el perfil de algunos vertederos especificando $Y(x)$.

2. - Vertederos tipo $Y(x) = b$.

$$\begin{aligned}
 y(x) &= 2\pi^{-1} b \left(\operatorname{ct}^*(x/a)^{\frac{p}{2}} - (x/a)^{-\frac{p}{2}} (p-2/3)/p \right) \\
 &= 2\pi^{-1} b \left(\operatorname{ct}^*(x/a)^{\frac{p}{2}} - (p-2/3) a^{\frac{p}{2}} / px^{\frac{p}{2}} \right)
 \end{aligned}$$

Si se tiene en cuenta la condición (4), y precisamente que $y(0)$ es finito, se ve que p debe ser igual a $2/3$, con lo cual se tiene la solución conocida (vertedero Sutro)

$$y(x) = 2\pi^{-1} b \operatorname{ct}^*(x/a)^{\frac{p}{2}}$$

(véase figura 1) con la respectiva expresión del caudal

$$C = (2(2g)^{\frac{p}{2}} ba^{\frac{p}{2}}/3)(h + 2a/3).$$

3. - Vertederos tipo $Y(x) = b + cx$.

$$y(x) = 2\pi^{-1} \int_0^{(a/x)^{\frac{p}{2}}} (b - cz^2 x) (2xz^2/pa - 1 + 1/(z^2 + 1)) dz$$

que $\int_{-1}^1 (p^3(x) - p^3(x_0))^2 dx = \int_{-1}^1 (p^3(x) - p^3(x_0))^2 dx \geq 0$ para todo $x \in [-1, 1]$.
 Por lo tanto, $\int_{-1}^1 (p^3(x) - p^3(x_0))^2 dx = 0 \Rightarrow p^3(x) = p^3(x_0)$ para todo $x \in [-1, 1]$.
 De modo similar, el resultado se obtiene para la función p^4 .
 Así que p^3 y p^4 son funciones lineales. De hecho, es de hecho que $p^3 = 3x + 2$ y $p^4 = 4x + 3$.
 Al final, $p(x) = p^3(x) + p^4(x) = 3x + 2 + 4x + 3 = 7x + 5$.

Algunas de las conclusiones principales de este problema son las siguientes:

1) La función p es una función polinomial de grado 4.

2) La función p es una función lineal.

3) La función p es una función constante.

4) La función p es una función cuadrática.

5) La función p es una función cúbica.

6) La función p es una función de tipo p^3 o de tipo p^4 .

7) La función p es una función de tipo $p^3 + p^4$.

8) La función p es una función de tipo $p^3 + p^4 + p^5$.

9) La función p es una función de tipo $p^3 + p^4 + p^5 + p^6$.

10) La función p es una función de tipo $p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + p^7$.

11) La función p es una función de tipo $p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + p^7 + p^8$.

12) La función p es una función de tipo $p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + p^7 + p^8 + p^9$.

13) La función p es una función de tipo $p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + p^7 + p^8 + p^9 + p^{10}$.

14) La función p es una función de tipo $p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + p^7 + p^8 + p^9 + p^{10} + p^{11}$.

15) La función p es una función de tipo $p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + p^7 + p^8 + p^9 + p^{10} + p^{11} + p^{12}$.

16) La función p es una función de tipo $p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + p^7 + p^8 + p^9 + p^{10} + p^{11} + p^{12} + p^{13}$.

17) La función p es una función de tipo $p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + p^7 + p^8 + p^9 + p^{10} + p^{11} + p^{12} + p^{13} + p^{14}$.

18) La función p es una función de tipo $p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + p^7 + p^8 + p^9 + p^{10} + p^{11} + p^{12} + p^{13} + p^{14} + p^{15}$.

19) La función p es una función de tipo $p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + p^7 + p^8 + p^9 + p^{10} + p^{11} + p^{12} + p^{13} + p^{14} + p^{15} + p^{16}$.

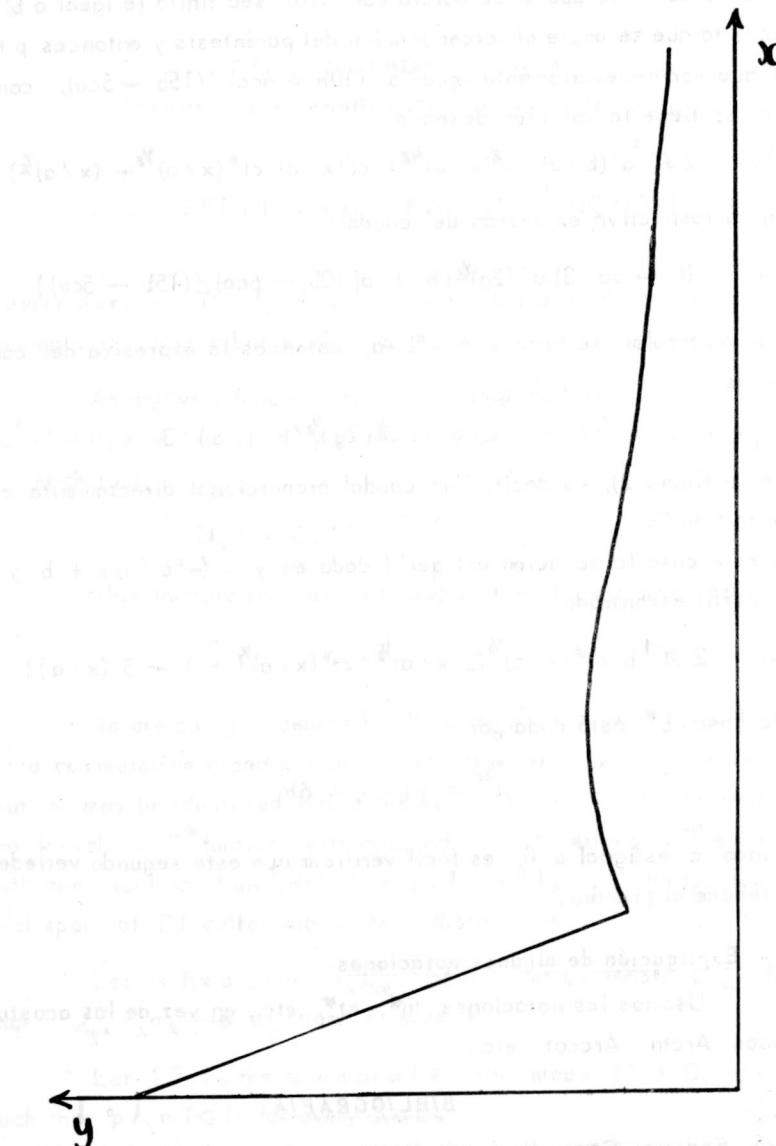


FIGURA 2

$$= 2 \pi^{-1} (b \operatorname{tn}^*(a/x)^{1/2} + c(x \operatorname{tn}^*(a/x)^{1/2} - (ax)^{1/2}) + (a^{1/2}(ca/3 - b)(p - (10b - 6ca)/(15b - 5ca))/px^{1/2})).$$

En seguida se ve que si se quiere que $y(0)$ sea finito (e igual a b) se necesita que se anule el tercer término del paréntesis y entonces p tiene que ser necesariamente igual a $(10b - 6ca)/(15b - 5ca)$, con lo cual se tiene la solución deseada :

$$y(x) = 2 \pi^{-1} a((b/a) \operatorname{ct}^*(x/a)^{1/2} + c((x/a) \operatorname{ct}^*(x/a)^{1/2} - (x/a)^{1/2})).$$

con la respectiva expresión del caudal

$$C = (b - ac/3) a^{1/2} (2g)^{1/2} (h + a(10b - 6ca)/(15b - 5ca))$$

Si en particular se toma $c = -5b/a$, entonces la expresión del caudal es

$$C = 8ba^{1/2} (2g)^{1/2} (h + a)/3$$

(véase figura 2), es decir, "un caudal proporcional directamente a la altura total".

En este caso la ecuación del perfil dado es $y = (-5b/a)x + b$ y la del perfil encontrado

$$y(x) = 2 \pi^{-1} b \operatorname{ct}^*(x/a)^{1/2} (5(x/a)^{1/2} / \operatorname{ct}^*(x/a)^{1/2} + 1 - 5(x/a))$$

y la base b^* está dada por

$$b^* = y(-a) = 6b$$

Cuando c es igual a 0, es fácil verificar que este segundo vertedero se reduce al primero.

4. - Explicación de algunas notaciones.

Usamos las notaciones tn^* , ct^* , etc., en vez de las acostumbradas Arctn , Arccot , etc..

5. -

BIBLIOGRAFIA

Carlo Federici Casa, Hernando Neira.

Ingeniería y Arquitectura, Vol. XIII, No. 148, Bogotá, 1959.

(Recibido, Septiembre 13, 1963)