SOBRE VERTEDEROS TIPO SUTRO

CARLO FEDERICI CASA
(Facultad de Matemáticas, Universidad Nacional)

1. - Ecuación general.

Se considera un vertedero (véase figura 0) cuyo perfil está determinado por las siguientes condiciones:

(1) base : $x = -a$

(2) pared de derecha : $y = 0$

(3) pared de izquierda : $y = Y(x)$ cuando $-a < x < 0$

$y = y(x)$ cuando $0 < x < h$

(4) $-\infty < Y(-a),\ Y(0),\ y(0) < +\infty$

Se plantea el problema de encontrar la relación funcional que existe entre $y(x)$ y $Y(x)$ si el caudal C es una función lineal de h

$$C = k(h + pa).$$

Se tiene sucesivamente :

$$C = k(h + pa) = \int_{-a}^{h} f(x)\,(2g\,(h - x))^{1/2}\,dx$$

$$= \int_{-a}^{0} Y(x)\,(2g(h - x))^{1/2}\,dx + \int_{0}^{h} y(x)\,(2g(h - x))^{1/2}\,dx$$

$$= (2g)^{1/2}\int_{-a}^{0} Y(x)\,(h - x)^{1/2}\,dx + (2g)^{1/2}\int_{0}^{h} y(x)(h - x)\,dx$$

Cuando $h = 0$ tenemos :

$$kpa = (2g)^{1/2}\int_{-a}^{0} Y(x)\,(-x)^{1/2}\,dx$$

y despejando k,

$$k = (2g)^{1/2}(pa)^{-1}\int_{-a}^{0} Y(x)\,(-x)^{1/2}\,dx$$

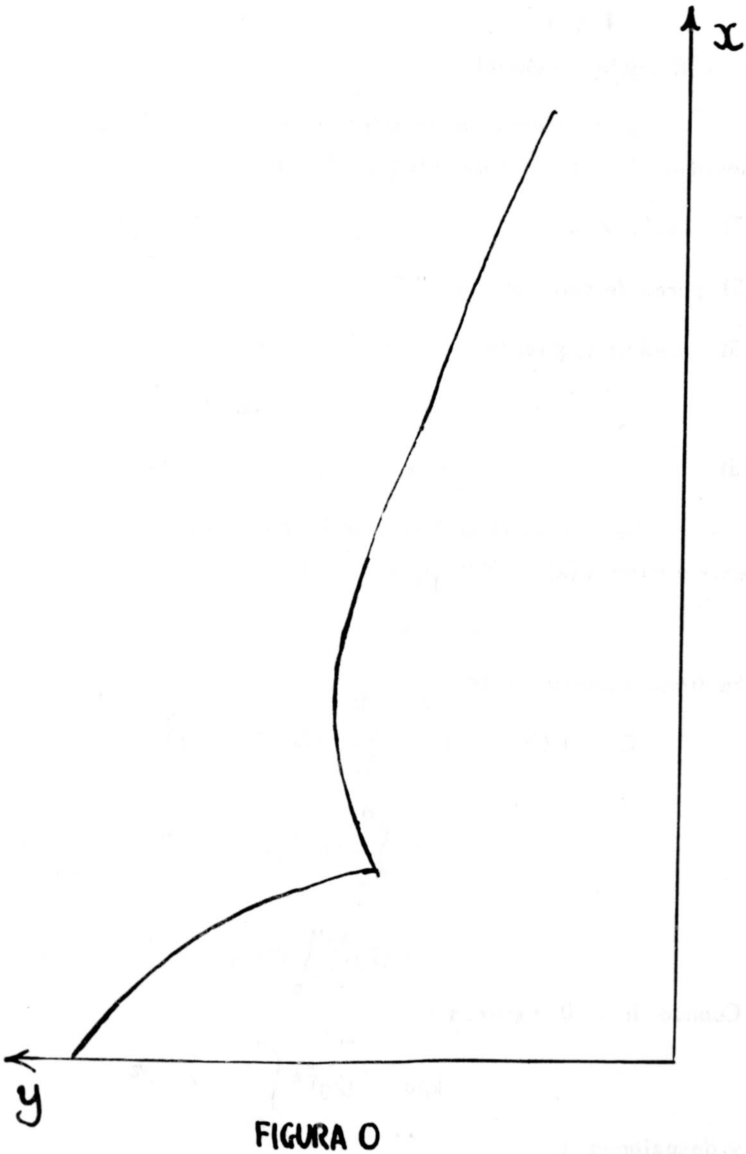

FIGURA O

y por tanto :

$$\int_0^h y(x)(h-x)^{1/2}dx = (h+pa)(pa)^{-1}\int_{-a}^0 Y(x)(-x)^{1/2}dx - \int_{-a}^0 Y(x)(h-x)^{1/2}dx$$

$$= \int_{-a}^0 Y(x)((h+pa)(-x)^{1/2} - pa(h-x)^{1/2})/(pa)\,dx$$

$$= \int_{-a}^0 Y(x)((h/pa+1)(-x)^{1/2} - (h-x)^{1/2})\,dx$$

$$= \int_0^h y(x)(h-x)^{1/2}dx$$

es decir, la función $y(x)$ debe satisfacer a la ecuación integral (ecuación de Volterra de primera especie) :

$$\int_0^h y(x)(h-x)^{1/2}dx = \int_{-a}^0 Y(x)((h/pa+1)(-x)^{-1/2} - (h-x)^{1/2})dx$$

que es la relación funcional buscada entre $y(x)$ y $Y(x)$ (en forma implícita). Para resolver esta ecuación se multiplican ambos miembros por 2 y se derivan con respecto a h :

$$\int_0^h y(x)(h-x)^{-1/2}dx = \int_{-a}^0 Y(x)(2(-x)^{1/2}/pa - (h-x)^{-1/2})\,dx$$

de donde, multiplicando ambos miembros por $(u-h)^{-1/2}$ e integrando con respecto a h entre 0 y u, tenemos

$$\int_0^u ((u-h)^{-1/2}\int_0^h y(x)(h-x)^{-1/2}dx)\,dh = \int_0^u ((u-h)^{-1/2}\int_{-a}^0 Y(x)(2(-x)^{1/2}/pa-(h-x)^{-1/2})dx)dh$$

y permutando las integraciones con respecto a x y a h en el primer miembro,

$$\int_0^u (y(x)\int_x^u ((h-x)(u-h))^{-1/2}dh)dx = \int_0^u\int_{-a}^0 (Y(x)(2(-x)^{1/2}/pa - (h-x)^{-1/2})(u-h)^{-1/2}dx)dh$$

y recordando que

$$\pi = \int_x^u ((h - x)(u - h))^{-1/2} dh$$

tenemos

$$\int_0^u y(x)dx = (\int_0^u \int_{-a}^0 Y(x)(2(-x)^{1/2}/pa -(h - x)^{-1/2})(u - h)^{-1/2} dxdh)/\pi$$

Derivando ambos miembros con respecto a u

$$y(u) = D_u(\int_0^u \int_{-a}^0 Y(x)(2(-x)^{1/2}/pa - (h - x)^{-1/2})(u - h)^{-1/2} dxdh)/\pi$$

de donde, permutando las integraciones con respecto a h y a x y derivando debajo del signo de integración

$$y(u) = \int_{-a}^0 D_u(\int_0^u Y(x)(2(-x)^{1/2}/pa - (h-x)^{-1/2}(u-h)^{-1/2})dh)dx/\pi$$

y ejecutando la integración con respecto a h

$$y(u) = \int_{-a}^0 Y(x)D_u(4(-xu)^{1/2}/pa - 2(\pi/2 - tn^*(-x/u)^{1/2}))dx/\pi$$

$$= \int_{-a}^0 Y(x)D_u(4(-xu)^{1/2}/pa - 2ct^*(-x/u)^{1/2})dx/\pi$$

. . . .

$$= \pi^{-1}\int_{-a}^0 Y(x)(-x/u)^{1/2}(2/pa + (x-u)^{-1})dx$$

de donde, cambiando x en -Xu,

$$y(u) = \pi^{-1}\int_{a/u}^0 Y(-Xu)X^{1/2}(-uX-u)^{-1}(2(-uX-u)/pa + 1)(-u)dX$$

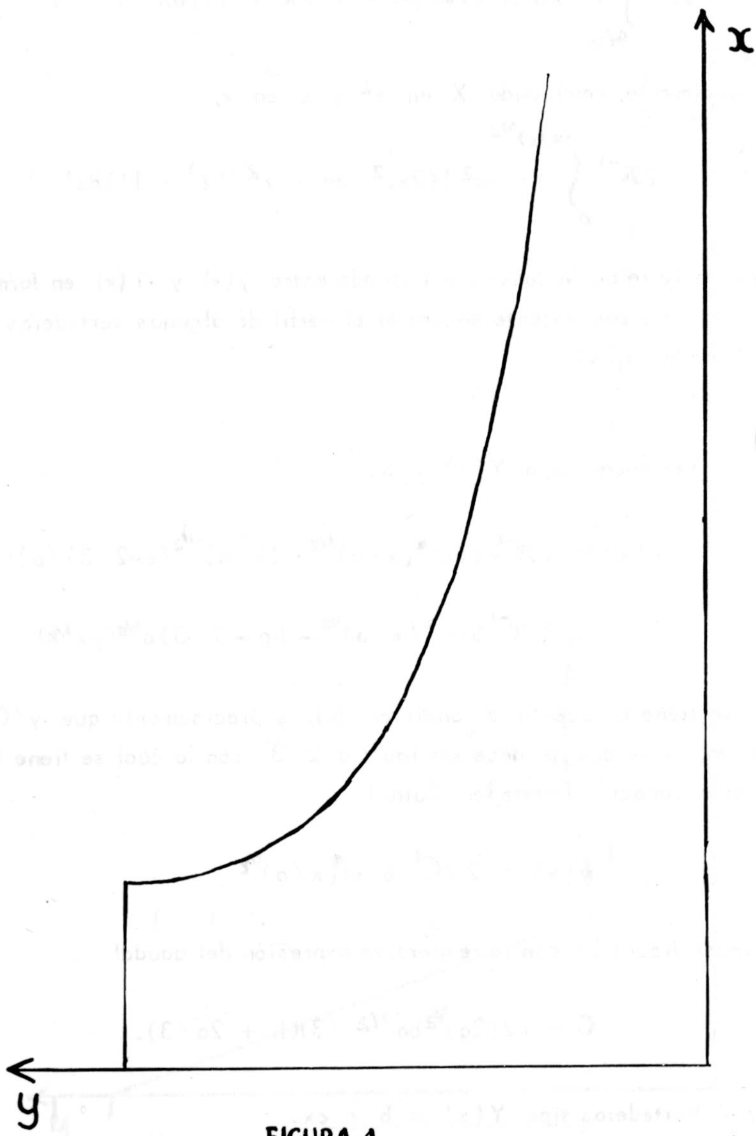

FIGURA 1.

$$= \pi^{-1} \int_{a/u}^{0} Y(-Xu)\, X^{1/2} (1/(X+1) - 2u/pa)\, dX$$

$$= \pi^{-1} \int_{a/u}^{0} Y(-Xu)\, X^{1/2} (2u/pa - 1/(X+1))\, dX$$

y finalmente, cambiando X en z^2 y u en x,

$$y(x) = 2\pi^{-1} \int_{0}^{(a/x)^{1/2}} Y(-xz^2)(2xz^2/pa - z^2/(z^2+1))\, dz$$

que es la relación funcional buscada entre $y(x)$ y $Y(x)$ en forma explícita. Es conveniente encontrar el perfil de algunos vertederos especificando $Y(x)$.

2. - Vertederos tipo $Y(x) = b$.

$$y(x) = 2\pi^{-1} \cdot b(ct^{*}(x/a)^{1/2} - (x/a)^{-1/2}(p-2/3)/p)$$

$$= 2\pi^{-1} \cdot b(ct^{*}(x/a)^{1/2} - (p-2/3)a^{1/2}/px^{1/2})$$

Si se tiene en cuenta la condición (4), y precisamente que $y(0)$ es finito, se ve que p debe ser igual a $2/3$, con lo cual se tiene la solución conocida (vertedero Sutro)

$$y(x) = 2\pi^{-1} \cdot b\ ct^{*}(x/a)^{1/2}$$

(véase figura 1) con la respectiva expresión del acudal

$$C = (2(2g)^{1/2} ba^{3/2}/3)(h + 2a/3).$$

3. - Vertederos tipo $Y(x) = b + cx$.

$$y(x) = 2\pi^{-1} \int_{0}^{(a/x)^{1/2}} (b - cz^2 x)(2xz^2/pa - 1 + 1/(z^2+1))\, dz$$

. . . .

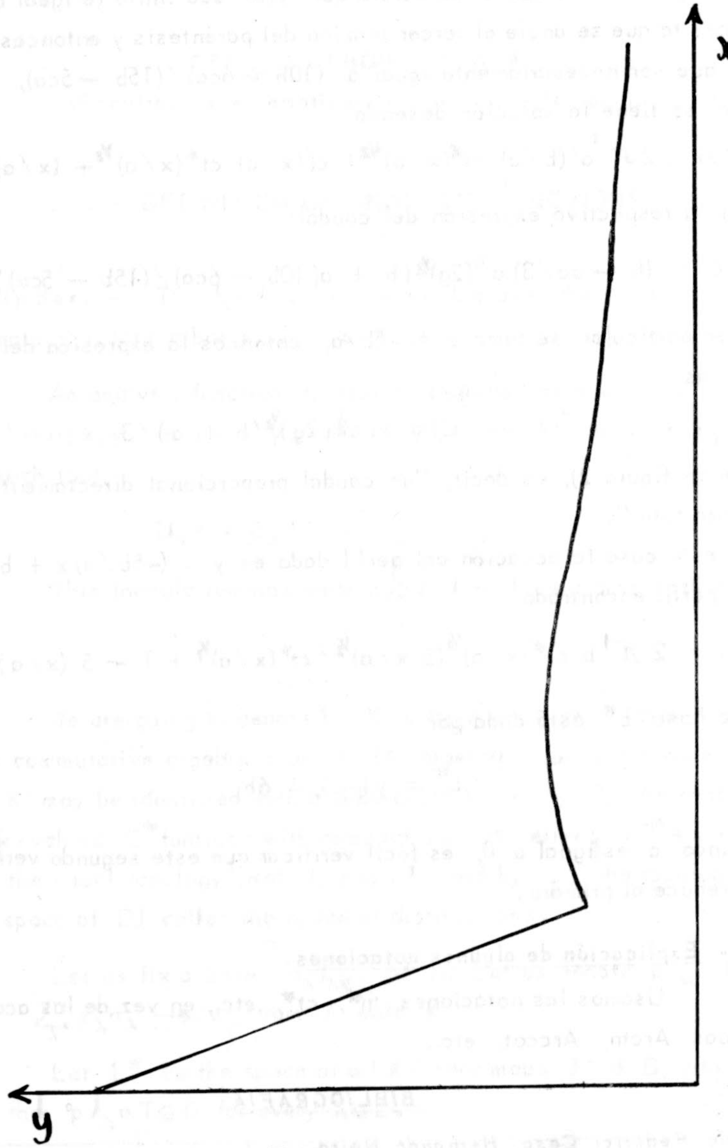

FIGURA 2

$$= 2\pi^{-1}(b\ tn^*(a/x)^{1/2} + c(x\ tn^*(a/x)^{1/2} - (ax)^{1/2}) +$$

$$(a^{1/2}(ca/3 - b)(p - (10b - 6ca)/(15b - 5ca))/px^{1/2})).$$

En seguida se ve que si se quiere que $y(0)$ sea finito (e igual a b) se necesita que se anule el tercer término del paréntesis y entonces p tiene que ser necesariamente igual a $(10b - 6ca)/(15b - 5ca)$, con lo cual se tiene la solución deseada :

$$y(x) = 2\pi^{-1}a((b/a)\ ct^*(x/a)^{1/2} + c((x/a)\ ct^*(x/a)^{1/2} - (x/a)^{1/2})).$$

con la respectiva expresión del caudal

$$C = (b - ac/3)\,a^{1/2}(2g)^{1/2}(h + a(10b - 6ca)/(15b - 5ca))$$

Si en particular se toma $c = -5b/a$, entonces la expresión del caudal es

$$C = 8ba^{\frac{1}{2}}(2g)^{1/2}(h + a)/3$$

(véase figura 2), es decir, "un caudal proporcional directamente a la altura total".
En este caso la ecuación del perfil dado es $y = (-5b/a)x + b$ y la del perfil encontrado

$$y(x) = 2\pi^{-1}b\ ct^*(x/a)^{1/2}(5(x/a)^{1/2}/\ ct^*(x/a)^{1/2} + 1 - 5(x/a))$$

y la base b^* está dada por

$$b^* = y(-a) = 6b$$

Cuando c es igual a 0, es fácil verificar que este segundo vertedero se reduce al primero.

4. - Explicación de algunas notaciones.

Usamos las notaciones tn^*, ct^*, etc., en vez de las acostumbradas Arctn, Arccot, etc..

5. - BIBLIOGRAFIA

Carlo Federici Casa, Hernando Neira.
Ingeniería y Arquitectura, Vol. XIII, No. 148, Bogotá, 1959.

(Recibido, Septiembre 13, 1963)